Serway

Vol. 1

FÍSICA

SOLUCIONARIO



SAN MARCOS

Solucionario
Física de Serway

Vol. 1



Solucionario
Física de Serway

Vol. 1



SAN MARCOS

SOLUCIONARIO - FÍSICA DE SERWAY. Volumen 1
Primera Edición

Hecho el depósito legal ley n.° 26905
Biblioteca Nacional del Perú
REG. n.° 1501322005-2513
ISBN 9972-34-246-8

© Aníbal Paredes Galván - Editor.
Editorial San Marcos
Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304 Jesús María, Lima
Telefax 330-8553 / 332-0153
E-mail: san-marcos@terra.com.pe

Solucionario a cargo de Juan Garibay Calderón

Pedidos:
Av. Inca Garcilaso de la Vega 974 Lima, teléf.: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220. Of. 304 Jesús María, teléf.: 423-1297

Impreso en Perú / Printed in Peru

Composición, diagramación y montaje
Editorial San Marcos
RUC 10090984344

ÍNDICE

Presentación 9

CAPÍTULO 2: MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN.

Desplazamiento, velocidad y rapidez. 11
Velocidad instantánea y rapidez. 15
Aceleración. 20
Movimiento unidimensional con aceleración constante. 28
Cuerpos en caída libre. 44
Ecuaciones cinemáticas derivadas del cálculo. 51
Problemas adicionales. 55

CAPÍTULO 3: VECTORES.

Sistema de coordenadas y marcos de referencia. 73
Cantidades vectoriales y escalares 76
Componentes de un vector y vectores unitarios. 83
Problemas adicionales. 97

CAPÍTULO 4: MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.

Los vectores, desplazamiento, velocidad y aceleración. 105
Movimiento bidimensional con aceleración constante. 110
Movimiento de proyectiles. 111
Movimiento circular uniforme. 127
Aceleración tangencial y radial. 131
Velocidad y aceleración relativa. 135
Problemas adicionales. 142

CAPÍTULO 5: LAS LEYES DEL MOVIMIENTO.

Problemas de repaso. 173
Primera, segunda y tercera leyes de Newton, masa inercial y peso. 175
Algunas aplicaciones de las leyes de Newton. 188
Fuerzas de fricción. 203
Problemas adicionales. 216

CAPÍTULO 6: MOVIMIENTO CIRCULAR Y OTRAS APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON.

La segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme. 245
Movimiento circular uniforme. 252

Movimiento en marcos acelerados. 258
Movimiento en presencia de fuerzas resistivas 262
Problemas adicionales. 266

CAPÍTULO 7: TRABAJO Y ENERGÍA.

Trabajo hecho por una fuerza constante. 285
El producto escalar de dos vectores. 292
Trabajo hecho por una fuerza variable. 297
Energía cinética y el teorema del trabajo y la energía 303
Potencia 318
Energía y automóviles. 323
Energía cinética a altas velocidades. 325
Problemas adicionales. 327

CAPÍTULO 8: ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

Fuerzas conservativas y no conservativas. 345
Fuerzas conservativas y energía potencial. Conservación de la energía. 345
Cambios en la energía mecánica cuando están presentes fuerzas no conservativas. 358
Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial 373
Diagramas de energía y el equilibrio de un sistema. 375
Equivalencia masa-energía. 378
Problemas adicionales. 379

CAPÍTULO 9: MOMENTO LINEAL Y CHOQUES.

Momento lineal y su conservación, impulso y momento 403
Colisiones: choques elásticos e inelásticos en una dimensión. 410
Colisiones bidimensionales. 428
El centro de masa 436
Movimiento de un sistema de partículas 440
Propulsión de cohetes. 444
Problemas adicionales. 447

CAPÍTULO 10: ROTACIÓN DE UN OBJETO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO.

Cinemática rotacional: movimiento rotacional con aceleración angular constante. 467
Relaciones entre cantidades angulares y lineales. 470
Energía rotacional. 474
Cálculo de momentos de inercia. 478
Momento de torsión 479
Relación entre momento de torsión y aceleración angular. 482
Trabajo, potencia y energía en el movimiento rotacional 484
Problemas adicionales. 490

CAPÍTULO 11: MOVIMIENTO DE RODAMIENTO, MOMENTO ANGULAR Y MOMENTO DE TORSIÓN.

Movimiento de rodamiento de un cuerpo rígido 507
El producto vectorial y el momento de torsión 511
Momento angular de una partícula 515
Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. 521
Conservación del momento angular 523
Momento angular como una cantidad fundamental 530
Problemas adicionales 530

CAPÍTULO 12: EQUILIBRIO ESTÁTICO Y ELASTICIDAD.

Las condiciones de equilibrio de un objeto rígido. 559
Más acerca del centro de gravedad. 563
Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático 566
Propiedades elásticas de sólidos 575
Problemas adicionales 582

PRESENTACIÓN

Debido al papel preponderante de la física en disciplinas como la ingeniería, la química y la medicina, y a la trascendencia de las aplicaciones de las leyes físicas en la moderna tecnología y en los avances científicos, en ese sentido el SOLUCIONARIO FÍSICA DE SERWAY *tiene como principal objetivo brindarle al estudiante la posibilidad de comprender y consolidar los conocimientos teóricos aprendidos, esto es, reforzar el aprendizaje de conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones en el mundo real.*

La obra está desarrollada en tres volúmenes que hacen un total aproximado de 2 400 problemas resueltos, en 34 capítulos; abarca temas fundamentales de la física clásica que se dividen en 4 partes. La parte I (capítulos 1 - 15) se abordan los fundamentos de la mecánica newtoniana y de la física de fluidos; la parte II (capítulos 16 - 18) que comprende el movimiento ondulatorio y el sonido; la parte III (capítulos 19 - 22) considera el calor y la termodinámica y la parte IV (capítulos 23-34) comprende la electricidad y el magnetismo.

Cada uno de los capítulos se ha desarrollado siguiendo un orden coherente de temas con el propósito de llegar didácticamente al estudiante, por lo que esperamos que esta obra sirva como un libro de consulta práctica, dentro de esa gran senda del conocimiento científico que le toca a Ud. descubrir.

El editor

Capítulo 2

MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y RAPIDEZ

1. La posición de un automóvil que baja por la pendiente de una colina fue observada en diferentes tiempos y los resultados se resumen en la tabla siguiente. Encuentre la velocidad promedio del automóvil durante a) el primer segundo, b) los últimos tres segundos, c) el periodo completo de observación.

x(m)	0	2,3	9,2	20,7	36,8	57,5
t(s)	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Resolución:

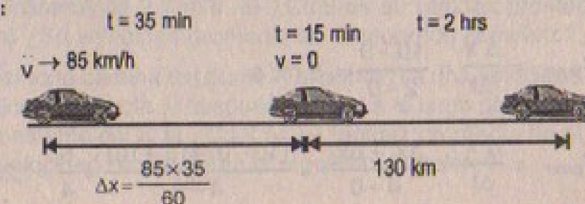
Parte (a): $\vec{V}_{prom} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{2,3-0}{1,0-0} = 2,3\ m/s$

Parte (b): $\vec{V}_{prom.} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{57,5-9,2}{5,0-2,0} = \dfrac{48,3}{3,0} = 16,1\ m/s$

Parte (c): $\vec{V}_{prom} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{57,5-0}{5,0-0} = 11,5\ m/s$

2. Un automovilista viaja hacia el norte durante 35 min a 85 km/h y luego se detiene durante 15 min. Después continúa hacia el norte, recorriendo 130 km en 2,0 h. a) ¿Cuál es su desplazamiento total? b) ¿Cuál es su velocidad promedio?

Resolución:

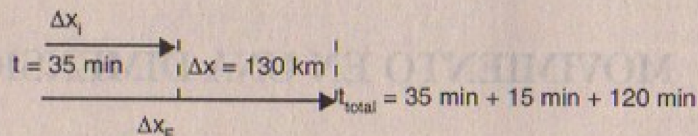


Parte (a) Entonces el desplazamiento total será: $\Delta x + 130$

Luego: $\Delta x = 85\ \frac{km}{h} \times 35\ min \times \frac{1\ h}{60\ min} = 49{,}6\ km$

$\therefore\ \Delta x\ total = 49{,}6 + 130 = 179{,}6\ km$

Parte (b)



$$\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{130\ km}{(170-35)min} = \frac{130}{135}\ km/min = 57{,}7\ km/h$$

3. En la figura P2.3 se muestra la gráfica de desplazamiento versus (vs) tiempo para cierta partícula que se mueve a lo largo del eje x. Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo a) 0 a 2 s, b) 0 a 4 s, c) 2 s a 4 s, d) 4 s a 7 s, y e) 0 a 8 s.

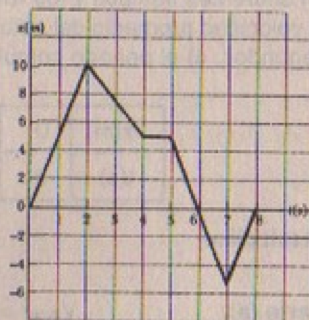
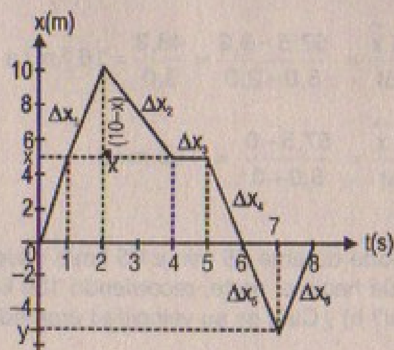
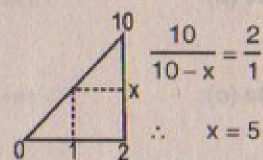


Figura P2.3

Resolución:



Por semejanza de triángulos:



$$\frac{10}{10-x} = \frac{2}{1}$$

$\therefore\ x = 5$

Por semejanza:

$$\frac{5}{y} = \frac{1}{1}$$

$\therefore\ y = 5$

Parte (a) $\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{10-0}{2-0} = 5\ m/s$

Parte (b) $\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{4-0} = \frac{(10-0)+(5-10)}{4-0} = \frac{5}{4} = 1{,}25\ m/s$

Parte (c) $\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{5-10}{4-2} = -\frac{5}{2} = -2{,}5\ m/s$

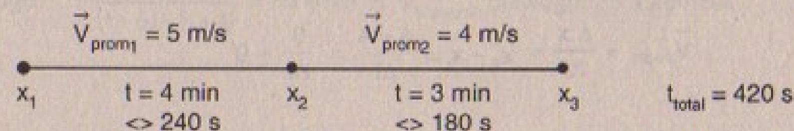
Parte (d) $\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5}{7-4} = \frac{0-5-5}{3} = -3{,}3\ m/s$

Parte (e) $\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5 + \Delta x_6}{8-0}$

$$= \frac{10+(-5)+0+(-5)+(-5)+5}{8} = 0$$

4. Una corredora avanza en línea recta con una velocidad promedio de +5,00 m/s durante 4,00 min, y después con una velocidad promedio de +4,00 m/s durante 3,00 min. a) ¿Cuál es su velocidad promedio durante este tiempo?

Resolución:



$\vec{V}_{p1} = 5 = \frac{x_2 - x_1}{240} \Rightarrow x_2 - x_1 = 1\,220\ m$

$\vec{V}_{p2} = 4 = \frac{x_3 - x_2}{180} \Rightarrow x_3 - x_2 = 720\ m$

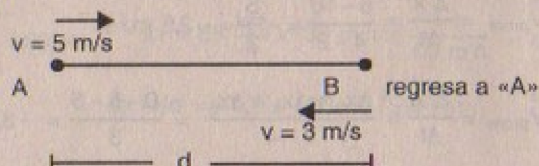
(+) $x_3 - x_1 = 1\,940\ m$

Luego: $\vec{V}_{prom_{total}} = \frac{x_3 - x_1}{420} = \frac{1\,940}{420} = 4{,}62\ m/s$

5. Una persona camina del punto A al punto B a una velocidad constante de 5,0 m/s a lo largo de una línea recta, y después regresa a lo largo de la línea de B a A con una velocidad constante de 3,0 m/s. a) ¿Cuál es su rapidez promedio en el recorrido completo? b) ¿Su velocidad promedio en el recorrido completo?

5A. Una persona camina del punto A al punto B a una velocidad constante de v_1, a lo largo de una línea recta, y después regresa a lo largo de la línea de B a A con una velocidad constante de v_2 a) ¿Cuál es su rapidez promedio en el recorrido completo? b) ¿Su velocidad promedio en el recorrido completo?

Resolución:



Parte (a)

Hallando la rapidez promedio: $v = \dfrac{e}{total} = \dfrac{2d}{\frac{8d}{15}} = \dfrac{30\,d}{8\,d} = 3{,}75\ m/s$

$$(+)\begin{cases} t_1 = \dfrac{d}{5} \\ t_2 = \dfrac{d}{3} \end{cases} \Rightarrow t_{total} = \dfrac{8d}{15}$$

Parte (b)

$$\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = x_F - x_i = \frac{A-A}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

6. Una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación $x = 10t^2$, donde x está en metros y t en segundos. a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de 2,0 s a 3,0 s. b) Determine la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2,0 s a 2,1 s.

Resolución:

Parte (a)

La partícula se mueve de acuerdo a la ecuación: $x = 10t^2$

$x(2) = 40$ m

$x(3) = 90$ m $\qquad \therefore\ \vec{V}_{prom} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{90-40}{3-2} = 50\ m/s$

Parte (b)

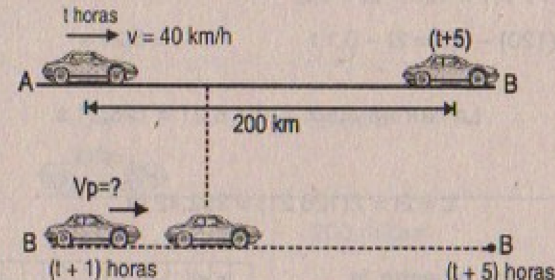
$x(2) = 40$ m $\qquad \therefore\ \vec{V}_{prom} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{44{,}1-40}{2{,}1-2} = \dfrac{4{,}1}{0{,}1}$

$x(2{,}1) = 44{,}1$ m

Luego: $\qquad \vec{V}_{prom} = 41\ m/s$

7. Un automóvil realiza una viaje de 200 km a una rapidez promedio de 40 km/h. Un segundo automóvil que inició el viaje 1,0 h después llega al mismo destino al mismo tiempo. ¿Cuál fue la rapidez promedio del segundo auto durante el periodo que estuvo en movimiento?

Resolución:



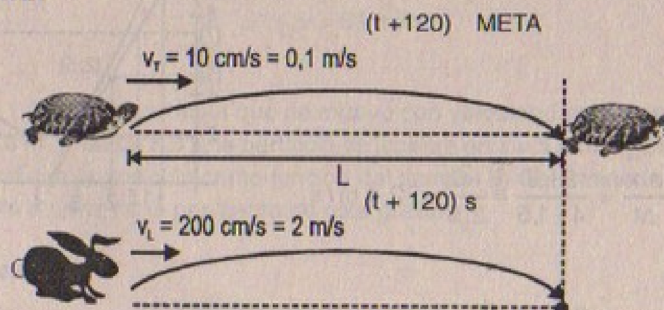
Sabemos que: $v_p = \dfrac{200}{(t+5)-t} = 40$ km/h $\qquad$ Es decir empleó 5 horas

Luego: $\dfrac{200}{(t+5)-(t+1)} = 50$ km/h $= v_{promedio}$ del segundo automóvil

VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y RAPIDEZ

8. Una rápida tortuga puede desplazarse a 10,0 cm/s, y una liebre puede correr 20 veces más rápido. En una carrera, los dos corredores inician al mismo tiempo, pero la liebre se detiene a descansar durante 2,0 min y, por ello, la tortuga gana por un caparazón (20 cm). a) ¿Qué tanto duró la carrera? b) ¿Cuál fue su longitud?

Resolución:



$X_T(t) = 0{,}1\,t$

$X_L(t) = 2\,t$

Por dato **Parte (a)**

$X_T(t + 120) - X_L(t + 120) = 0{,}2$ m

$0{,}1\ (t + 120) - 2t = 0{,}2$

$\Rightarrow\ 0{,}1\ t + 0{,}1 \times 120 - 2t = 0{,}2$

$0{,}1(120) - 0{,}2 = 2t - 0{,}1\ t \qquad \therefore\ t = 6{,}21$ s

$\therefore$ La carrera duró: $120 + 6{,}21 = 126{,}21$ s

Parte (b)

$$L = 2t = 2(126{,}21) = 252{,}42 \text{ m}$$

9. En la figura P2.9 se muestra la gráfica posición-tiempo de una partícula que se mueve a lo largo del eje x. a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo t = 1,5 s a t = 4,0 s. b) Determine la velocidad instantánea en t = 2,0 s midiendo la pendiente de la línea tangente mostrada en la gráfica. c) ¿En cuál valor de t la velocidad es cero?

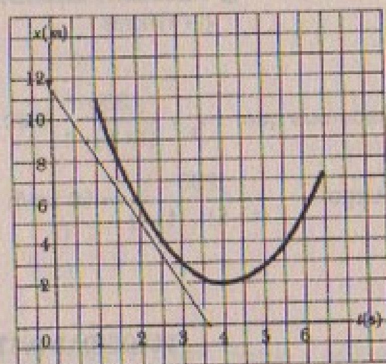
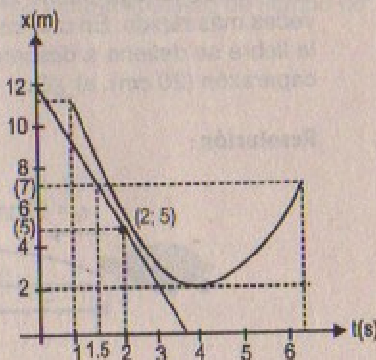


Figura P2.9

Resolución:



Parte (a)

$$\vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{2-8}{4-1{,}5} = \frac{-6}{2{,}5} = -2{,}4 \text{ m/s}$$

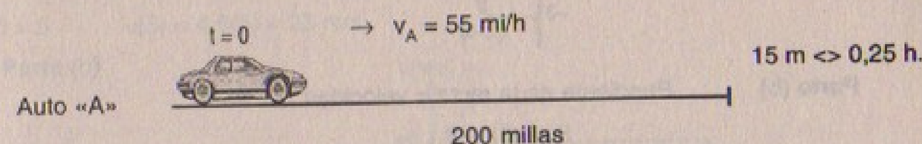
Parte (b)

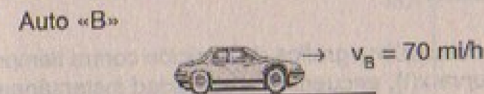
$$t = 2 \text{ s} \ ; \quad v = \frac{dx}{dt} = \text{pendiente de la recta} = \frac{12-5}{0-2} = -3{,}5 \text{ m/s}$$

Parte (c) En t = 4 s la pendiente es horizontal $\therefore\ v = 0$

10. Dos automóviles viajan en la misma dirección a lo largo de una autopista recta, uno a 55 mi/h y el otro a 70 mi/h. a) Suponiendo que empiezan en el mismo punto, ¿con qué ventaja el auto más rápido llega a un destino a 20 millas de distancia? b) ¿Qué tan rápido debe viajar el carro más veloz antes de que adelante 15 min al carro más lento?

Resolución:





Parte (a)

$X_A(t) = 55t \qquad X_B = 70t$

$70t = 200$ millas $\ \Rightarrow\ t = 2{,}86$ horas

Luego $\quad X_A = 55\ (2{,}86) = 157$ millas

Luego el auto B llega con una ventaja de 43 millas.

Parte (b)

$X_A\ (t) = 55t = 200 \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}64$ horas

$\Rightarrow\ X_B\ (t) = v\ .\ t \Rightarrow 200 = v\ (t - 0{,}25) \Rightarrow 200 = v(3{,}64 - 0{,}25)$

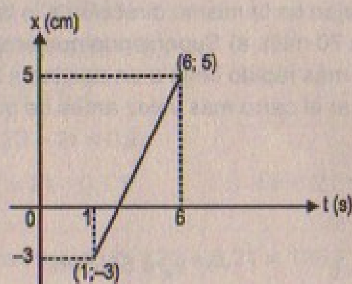
$\therefore\ v = 59$ mi/h

11. En t = 1,0 s, una partícula que se mueve con velocidad constante se localiza en x = –3,0 m y en t = 6,0 s, la partícula se localiza en x = 5,0 m. a) Con esta información grafique la posición como función del tiempo. b) Determine la velocidad de la partícula a partir de la pendiente de esta gráfica.

Resolución:

t	1,0	6,0
x	–3,0	5,0

Parte (a)



Parte (b) Pendiente de la recta = velocidad

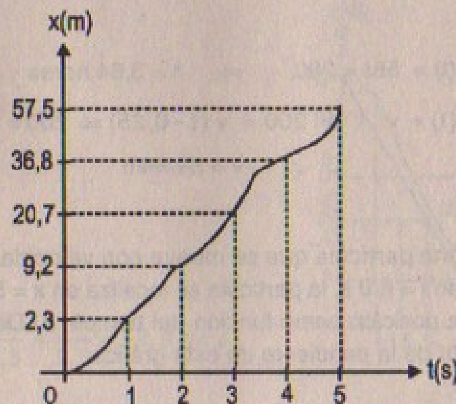
$$\Rightarrow \quad m = v = \frac{5-(-3)}{6-1} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ m/s}$$

12. a) Con los datos del problema 1 construya una gráfica de posición contra tiempo. b) Construyendo tangentes para la curva x(t), encuentre la velocidad instantánea del auto en diferentes instantes. c) Grafique la velocidad instantánea contra el tiempo y, a partir de esto, determine la aceleración promedio del automóvil. d) ¿Cuál es la velocidad inicial del vehículo?

Resolución :

x(m)	0	2,3	9,2	20,7	36,8	57,5
t(s)	0	1,0	3,0	3,0	4,0	5,0

Parte (a)



Parte (b) $v(t) = 4{,}6\,t \quad ; \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2$

$t = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = v = 0 \quad \Rightarrow \quad x(1{,}0) = 2{,}3 = \frac{1}{2}a\,(1{,}0)^2$

$t = 1 \qquad v = \frac{dx}{dt} = 4{,}6 \text{ m/s} \qquad \therefore \quad a = 4{,}6$

Luego: $x(t) = 2{,}3t^2$

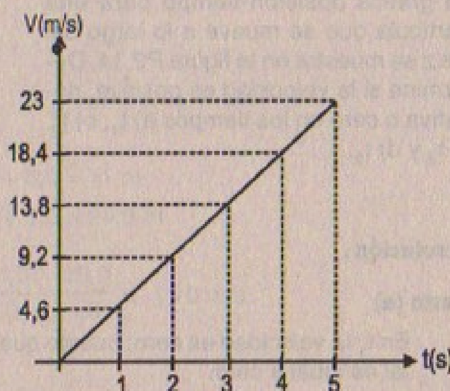
$t = 2 \qquad v(2) = 4{,}6(2) = 9{,}2 \text{ m/s}$

$t = 3 \qquad v(3) = 4{,}6(3) = 13{,}8 \text{ m/s}$

$t = 4 \qquad v(4) = 4{,}6(4) = 18{,}4 \text{ m/s}$

$t = 5 \qquad v(5) = 4{,}6(5) = 23 \text{ m/s}$

Parte (c)

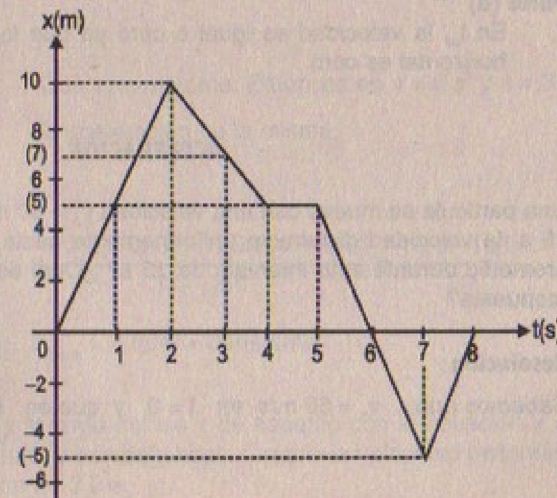


$$a_{prom} = \frac{v_f - v_i}{5-0} = \frac{23}{5} = 4{,}6 \text{ m/s}^2$$

Parte (d) Parte del reposo $V_o = 0$

13. Determine la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura P2.3 en los siguientes tiempos: a) t = 1,0 s, b) t = 3,0 s, c) t = 4,5 s y d) t = 7,5 s.

Resolución :



Parte (a)

t = 1 s

$$v = \frac{5}{1} = 5 \text{ m/s}$$

Parte (b) $t = 3\ s$ $v = \dfrac{10-5}{2-4} = \dfrac{5}{-2} = 2,5\ m/s$

Parte (c) $t = 4,5\ s$ $v = \text{constante} = 0$

Parte (d) $t = 7,5\ s$ $v = \dfrac{-5-0}{7-8} = 5\ m/s$

14. La gráfica posición-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje z se muestra en la figura P2.14. Determine si la velocidad es positiva, negativa o cero en los tiempos a) t_1, b) t_2, c) t_3 y d) t_4.

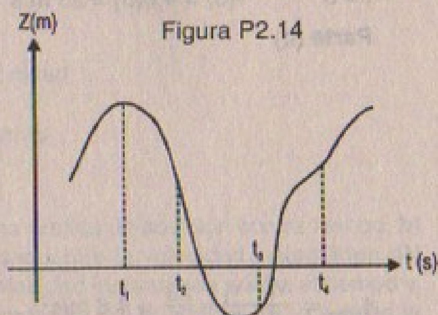


Figura P2.14

Resolución:

Parte (a)

En t_1 la velocidad es cero; puesto que la pendiente de la recta que es horizontal es igual a cero.

Parte (b)

En t_2, la velocidad es $\neq 0$, pero es negativa ya que la pendiente de la recta es < 0.

Parte (c)

En t_3, la velocidad es $\neq 0$, pero es positiva ya que la pendiente de la recta > 0.

Parte (d)

En t_4, la velocidad es igual a cero ya que la pendiente de la recta que es horizontal es cero.

ACELERACIÓN

15. Una partícula se mueve con una velocidad $v_o = 60\ m/s$ en $t = 0$. Entre $t = 0$ y $t = 15\ s$, la velocidad disminuye uniformemente hasta cero. ¿Cuál es la aceleración promedio durante este intervalo de 15 s? ¿Cuál es el significado del signo de su respuesta?

Resolución:

Sabemos que: $v_o = 60\ m/s$ en $t = 0$ y que en $t = 0 \wedge t = 15\ s$ $v_f = 0$

Entonces $\vec{a}_{prom} = \dfrac{v_f - v_i}{\Delta t} = \dfrac{0-60}{15-0} = -4\ m/s^2$

$\Rightarrow$ $\vec{a}_{prom} = -4\ m/s^2$ quiere decir que el movimiento es retardado.

16. Un objeto se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x(t) = (3,0\,t^2 - 2,0t + 3,0)$ m. Determine a) la velocidad promedio entre $t = 2,0$ s y $t = 3,0$ s, b) la velocidad instantánea en $t = 2,0$ s y $t = 3,0$ s, y d) la aceleración instantánea en $t = 2,0$ s y $t = 3,0$ s.

Resolución:

$x(t) = (-2,0 + 3,0 + 3,0)m$

Parte (a)

$x(2,0) = 3,0\,(2,0)^2 - 2,0(2,0) + 3,0 = 11\ m$

$x(3,0) = 3,0\,(3,0)^2 - 2,0(3,0) + 3,0 = 24,0\ m$

$$\Rightarrow \vec{V}_{prom} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{24,0-11,0}{3,0-2,0} = \frac{13,0}{1,0} = 13,0\ m/s$$

Parte (b)

$V_{inst} = \dfrac{dx(t)}{dt} = 6,0t - 2,0$ $\Rightarrow$ $V_{inst} = 6,0\,(2,0) - 2,0 = 10,0$

En $t = 2,0$ s

$V_{inst} = 6,0(3,0) - 2,0 = 16,0$

En $t = 3,0$ s

Parte (d)

$a_{inst} = \dfrac{dv}{dt} = 6,0\ m/s^2$ Que es constante. Entonces en $t = 2$ s y $t = 3$ s la aceleración es la misma.

Parte (c)

$$\vec{a}_{prom} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v(3)-v(2)}{3-2} = \frac{6,0(3)-2,0-[6,0(2,0)-2,0]}{3,0-2,0} = \frac{16,0-10,0}{1,0}$$

$\therefore\ a_{prom} = 6\ m/s^2 = \text{constante}$

17. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $x = 2,0t + 3,0t^2$, donde x está en metros y t en segundos. Calcule la velocidad instantánea y la acelaración instantánea en $t = 3,0$ s.

Resolución :

$x = (3{,}0\ t^2 + 2{,}0\ t)$ m

$v_{inst} = \dfrac{dx}{dt} = (6{,}0\ t + 2{,}0)$m/s $\Rightarrow$ $v_{inst.} = 6{,}0(3{,}0) + 2{,}0 = 20$ m/s

En t = 3 s

$a_{inst} = \dfrac{dv}{dt} = (6{,}0)$ m/s² $\Rightarrow$ $a_{inst.} = 6{,}0$ m/s² = constante

En t = 3 s

18. Una partícula que se mueve en línea recta tiene una velocidad de 8,0 m/s en t = 0. Su velocidad en t = 20 s es 20,0 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración promedio en este intervalo de tiempo? b) ¿La velocidad promedio puede obtenerse de la información anterior? Explique.

Resolución :

v(0) = 8,0 m/s   v(20) = 20.0 m/s

Parte (a) $a_{prom} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{20{,}0 - 8{,}0}{20{,}0 - 0{,}0} = \dfrac{12{,}0}{20{,}0} = 0{,}6\ m/s^2$

Parte (b) Sabemos que: $v_{prom} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Entonces: $\dfrac{dx}{dt} = v \Rightarrow dx = 8dt \Rightarrow \int_0^t dx = 8\int_0^t dt$

Luego: x(t) = 8t

En consecuencia: x(20) = 160 m y x(0) = 0 m

Luego: $v_{prom} = \dfrac{160 - 0}{20 - 0} = 8$ m/s

19. Una partícula parte del reposo y acelera como se indica en la figura P2.19. Determine a) la velocidad de la partícula en t = 10 s y en t = 20 s, y b) la distancia recorrida en los primeros 20 s.

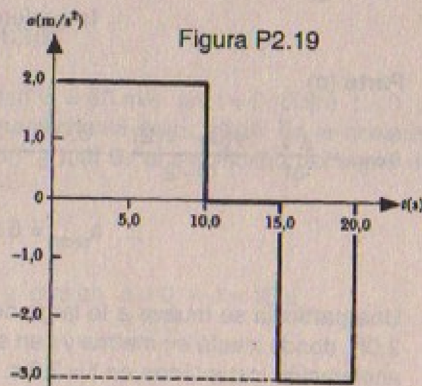


Figura P2.19

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: En t = 10 s la aceleración = 2,0 m/s² $\Rightarrow$ v(10) ≠ constante

En t = 20 s la aceleración = –3,0 m/s²

Entonces: $a = \dfrac{dv}{dt} = 2 \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t 2dt$

$\therefore$ v(t) = 2t   Luego: v(10) = 20,0 m/s

Ahora: $a = \dfrac{dv}{dt} = -3 \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t -3\ dt$

$\therefore$ v(t) = –3t   Luego: v(20) = –60 m/s

Parte (b)

Espacio recorrido en t = 0 → t = 10

$v_{prom} = v(t) = v(10) - v(0) = 20{,}0$ m/s $\wedge$ $v(0) = 0 \Rightarrow d_1 = \dfrac{(20{,}0)^2}{2(2)} = \dfrac{400}{4} = 100$ m

Espacio recorrido en t = 10 → t = 15 s

Como a = 0 $\Rightarrow$ v = cte = 20 m/s

Luego: $d_2 = (20)(15 - 10) = 100$ m

Espacio recorrido en t = 15 s → t = 20 s

$v_{prom} = v(t) = v(15) = -45$ m/s

v(20) = –60 m/s

$\Rightarrow d_3 = \dfrac{v_F^2 - v_i^2}{2(a)} = \dfrac{(-60)^2 - (-45)^2}{2(3)} = 262{,}5$ m

Luego la distancia total recorrida será:

$D = d_1 + d_2 + d_3 = 100 + 100 + 262{,}5$

$\therefore$ D = 462,5 m

20. La velocidad de una partícula como función del tiempo se muestra en la figura P2.20. En t = 0, la partícula se encuentra en x = 0. a) Grafique la aceleración como una función del tiempo. b) Determine la aceleración promedio de la partícula en el intervalo de tiempo t = 2,0 s at = 8,0 s y c) Determine la aceleración instantánea de la partícula en t = 4,0 s.

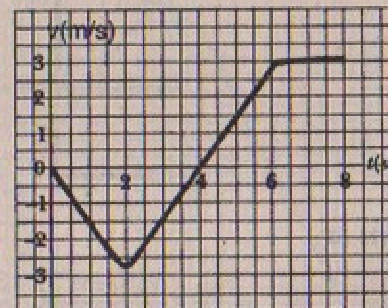
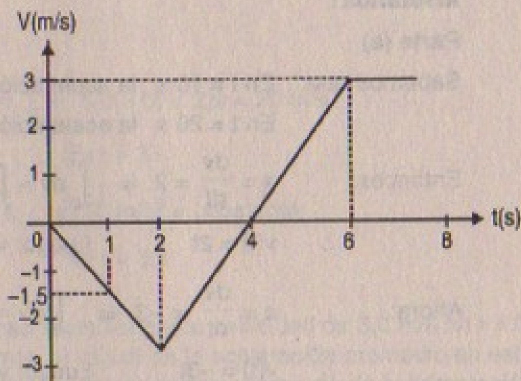


Figura P2.20

Resolución :



Hallando la ecuación de la velocidad de t = 0 a t = 2 s por la ecuación de recta:

$$\frac{v(t)-(0)}{t-0} = -1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = (-1{,}5\ t)\ \text{m/s}$$

Hallando la ecuación de la velocidad desde t = 2 a t = 6

$$\frac{v_1(t)-3}{t-6} = \frac{3}{2} = v_1(t) = \left(\frac{3}{2}t - 6\right)\ \text{m/s}$$

Hallando la ecuación de la velocidad desde t = 6 a t = 8, como la recta es horizontal entonces v = cte = 3 m/s.

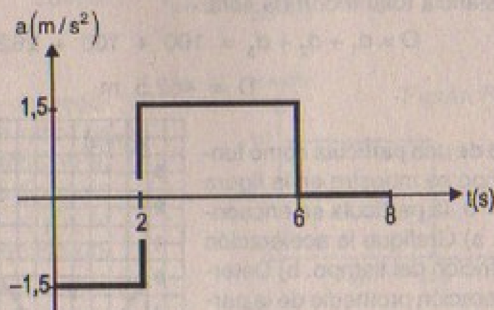
En consecuencia:

En $t = 0 \rightarrow t = 2$ $\quad a = \dfrac{dv}{dt} = -1{,}5\ \text{m/s}^2$

En $t = 2 \rightarrow t = 6$ $\quad a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5\ \text{m/s}^2$

En $t = 6 \rightarrow t = 8$ $\quad a = \dfrac{dv}{dt} = 0$

Parte (a)



Parte (b)

$$a_{prom} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(8)-v(2)}{8-2} = \frac{3-(-3)}{6} = \frac{6}{6} = 1\ \text{m/s}^2 = 1\ \text{m/s}^2$$

Parte (c)

$$a_{INST.} = \frac{dv}{dt} = 1{,}5\ \text{m/s}^2$$

$$t = 40\ \text{s}$$

21. Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación x = 2,0 + 3,0 t – 1,0 t, donde x está en metros y t en segundos. En t = 3,0 s, encuentre a) la posición de la partícula, b) su velocidad y c) su aceleración.

Resolución :

$$x = (2{,}0 + 3{,}0\,t - 1{,}0\,t^2)\ \text{m}$$

Parte (a)

$$t(3\ \text{s}) \Rightarrow x(3{,}0) = (-1{,}0)(3{,}0)^2 + (3{,}0)(3{,}0) + 2{,}0$$

$$\therefore\ x(3) = 2{,}0\ \text{m}$$

Parte (b)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -2{,}0t + 3{,}0 \quad \Rightarrow \quad V(3) = -2{,}0(3{,}0) + 3{,}0$$

$$\therefore\ V(3) = -3{,}0\ \text{m/s}$$

Parte (c)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (-2{,}0)\ \text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a(3) = -2{,}0\ \text{m/s}^2$$

22. Un estudiante maneja su convertible a lo largo de un camino recto, como se describe en la gráfica velocidad-tiempo de la figura P2.22. Dibuje esta gráfica en la parte media de una hoja de papel gráfico. a) Sobre esta gráfica dibuje una gráfica de la posición contra el tiempo, alineando las coordenadas de tiempo de las dos gráficas. b) Dibuje una gráfica de la aceleración contra tiempo directamente debajo de la gráfica v-t, alineando de nuevo las coordenadas de tiempo. Sobre cada gráfica muestre los valores numéricos de x y *a* para todos los puntos de inflexión. c) ¿Cuál es la aceleración en t = 6 s? d) Determine la posición (relativa al punto de inicio) en t = 6 s. e) ¿Cuál es la posición final del convertible en t = 9 s?

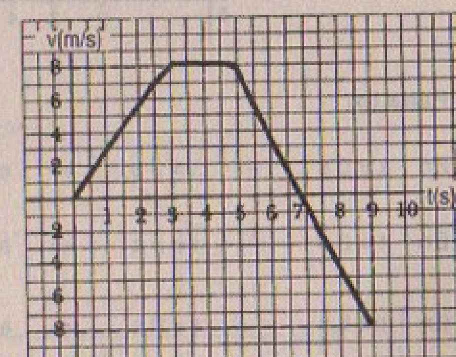


Figura P2.22

Resolución :

* Hallando la ecuación de la velocidad en $t = 0 \rightarrow t = 3$ s

$$\frac{v(t)-0}{t-0} = \frac{8}{3} \Rightarrow v(t) = \frac{8}{3}t \text{ m/s}$$

* Hallando la ecuación de la velocidad en $t = 3$ s $\rightarrow t = 5$ s, como la recta es horizontal

$\Rightarrow v(t) = \text{constante} = 8$ m/s

* Hallando la ecuación de la velocidad en $t = 5$ s $\rightarrow t = 9$ s

$$\frac{v_1(t)-8}{t-5} = \frac{-8}{2} \Rightarrow v_1(t) = -4t + 28 \text{ m/s}$$

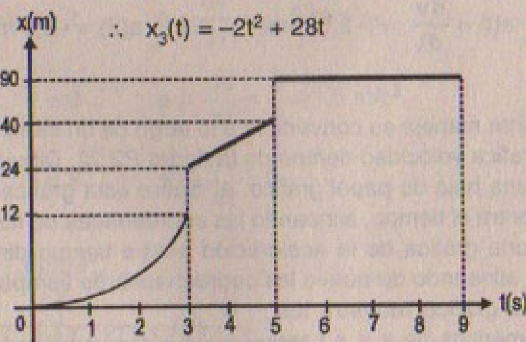
Parte (a)

$t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 3$ s $\qquad \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dfrac{8}{3}t \Rightarrow x_1(t) = \dfrac{4}{3}t^2$

$t = 3$ s $\quad \rightarrow \quad t = 5$ s $\qquad \dfrac{dx_2}{dt} = 8 \Rightarrow \int_0^t dx_2 = \int_0^t 8\,dt \;\therefore\; x_2(t) = 8t$

$t = 5$ s $\quad \rightarrow \quad t = 9$ s $\qquad \dfrac{dx_3}{dt} = -4t + 28 \Rightarrow \int_0^t dx_3 = -\int_0^t 4t\,dt + \int_0^t 28\,dt$

$\therefore\; x_3(t) = -2t^2 + 28t$

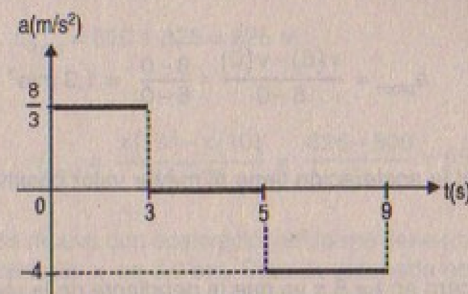


Parte (b)

En $t = 0$ s $\quad \rightarrow \quad t = 3$ s $\quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{8}{3}$ m/s²

En $t = 3$ s $\quad \rightarrow \quad t = 5$ s $\quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{dv}{dt} = 0$

En $t = 5$ s $\quad \rightarrow \quad t = 9$ s $\quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{dv}{dt} = -4$ m/s²



Parte (c)
La aceleración en $t = 6$ s es: $a = -4$ m/s²

Parte (d)
La posición en $t = 6$ s es: $X3(6) = -2(6)^2 + 28(6) = 96$ m

Parte (e)
La posición final en $t = 9$ s es: $X3(9) = -2(9)^2 + 28(9) = 90$ m

23. La figura P2.23 muestra una gráfica de v contra t para el movimiento de una motociclista desde que parte del reposo y se mueve a lo largo de un camino en línea recta. a) Encuentre la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $t_0 = 0$ a $t_1 = 6{,}0$ s. b) Calcule el tiempo en el cual la aceleración tiene su valor positivo mayor y el valor de la aceleración en este instante. c) ¿Cuándo es cero la aceleración? d) Calcule el máximo valor negativo de la aceleración y el tiempo en el que ocurre.

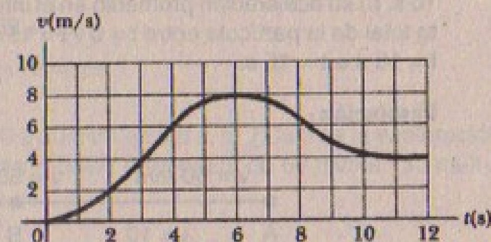
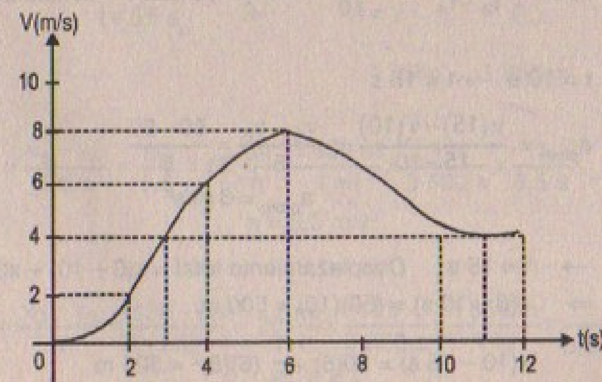


Figura P2.23

Resolución :



Parte (a)

$$a_{prom} = \frac{v(6)-v(0)}{6-0} = \frac{8-0}{6-0} = 1{,}3\ m/s^2$$

Parte (b)
El tiempo en el cual la aceleración tiene el mayor valor positivo es en t = 3 s y vale 2,2 m/s^2.

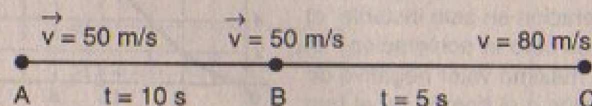
Parte (c)
La aceleración es cero en t = 6 s ya que la pendiente de la recta trazada a la curva es horizontal y vale cero y en t = 11 s también lo es.

Parte (d)
El máximo valor negativo de la aceleración está dada en t = 8,2 s y vale –2 m/s^2.

MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL CON ACELERACIÓN CONSTANTE

24. Una partícula viaja en la dirección x positiva durante 10 s a una velocidad constante de 50 m/s. Luego acelera de manera uniforme hasta una velocidad de 80 m/s en los siguientes 5 s. Encuentre a) la aceleración promedio de la partícula en los primeros 10 s, b) su aceleración promedio en el intervalo t = 10 s a t = 15 s, c) el desplazamiento total de la partícula entre t = 0 y t = 15 s, y d) su velocidad promedio en el intervalo t = 10 s a t = 15 s.

Resolución :



Parte (a)

$$a_{prom} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{50-50}{10} = 0 \quad \text{ya que } v = \text{constante}$$

Parte (b)

t = 10 s → t = 15 s

$$a_{prom} = \frac{v(15)-v(10)}{15-10} = \frac{v_C - v_B}{5} = \frac{80-50}{5}$$

$$\therefore\ a_{prom} = 6\ m/s^2$$

Parte (c)

t = 0 s → t = 15 s   Desplazamiento total = x(0 – 10) + x(10 – 15)

⇒ x(0 – 10 s) = (50)(10) = 500 m

$$x(10-15\ s) = 50(5) + \frac{1}{2}(6)(5)^2 = 325\ m$$

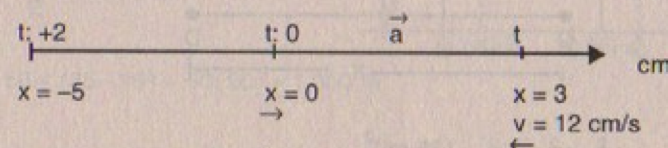
Luego $D_{total} = 500 + 325 = 825$ m

Parte (d)

$$v_{prom} = \frac{x(15)-x(10)}{15-10} = \frac{825-500}{5} = 65\ m/s$$

25. Un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12,0 cm/s cuando su coordenada x es 3,0 cm. Si su coordenada es 2,00 s después de 2,05 – 5,0 cm, ¿cuál es la magnitud de su aceleración?

Resolución :



$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{1}{2}a.t^2$$

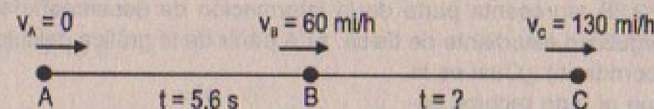
$$x(2) = -5\ cm = 3 + 12(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-a)(2)^2$$

$$\Rightarrow\ -8 = 24 - 2a \ \Rightarrow\ 32 = 2a$$

$$\therefore\ |a| = 16\ cm/s^2$$

26. El nuevo BMW M3 puede acelerar de 0 a 60 mi/h en 5,6 s. a) ¿Cuál es la aceleración resultante en m/s^2? b) ¿Cuánto tardaría el BMW para pasar de 60 mi/h a 130 mi/h a esta tasa?

Resolución :



1 milla ≃ 1 850 m

Parte (a)

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{v_B - v_A}{5{,}6\ s} = \frac{60}{5{,}6} = 60\ \frac{mi}{h}\times\frac{1\,850\ m}{1\ mi}\times\frac{1\ h}{3\,600\ s}\times\frac{1}{5{,}6\ s}$$

$$\therefore\ a = 5{,}5\ m/s^2$$

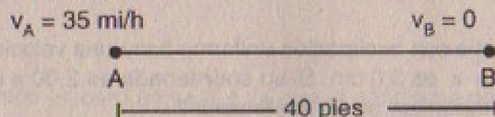
Parte (b)

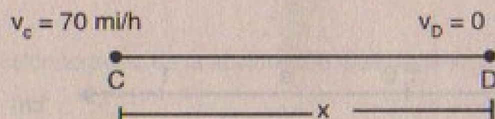
$$t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{130-60}{5{,}5} = 70\ \frac{mi}{h}\times\frac{1\ h}{3\,600\ s}\times\frac{1\,850\ m}{1\ mi}\times\frac{1}{5{,}5\ m/s^2}$$

$$\therefore\ t = 6{,}5\ s$$

27. La distancia mínima necesaria para detener un auto que se mueve a 35 mi/h es 40 pies. ¿Cuál es la distancia de frenado mínima para el mismo auto pero que ahora se mueve a 70 mi/h, y con la misma tasa de aceleración?

Resolución :





$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{-2(d)} = \frac{v_A^2}{2d} = \frac{(35\ \text{mi})^2}{80\ \text{pies}} \quad ...(1)$$

Entonces:

$$CD = x = \frac{v_C^2}{2(a)} = \frac{\left(79\ \frac{m}{h}\right)^2}{\dfrac{2(35)(35)}{80\ \text{pies}}\ \dfrac{m^2}{h^2}} = 160\ \text{pies}$$

$$\therefore\quad x = 160\ \text{pies}$$

28. La figura P2.28 representa parte de la información de desempeño del auto que posee un orgulloso estudiante de física. a) A partir de la gráfica calcule la distancia total recorrida. b) ¿Cuál es la distancia que el auto recorre entre los tiempos t = 10 s y t = 40 s? c) Dibuje una gráfica de su aceleración contra tiempo entre t = 0 y t = 50 s. d) Escriba una ecuación para x como una función del tiempo para cada fase del movimiento, representado por i) ab, ii) bc, iii) cd. e) ¿Cuál es la velocidad promedio del auto entre t = 0 y t = 50 s?

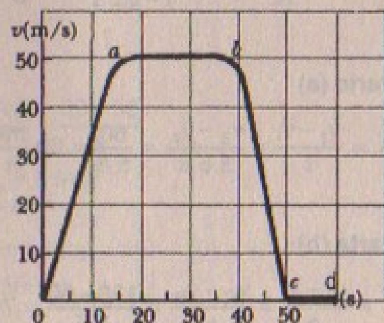
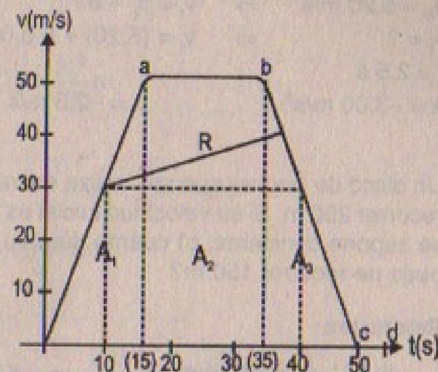


Figura P2.28

Resolución :

Parte (a)

Distancia total recorrida es la suma de las áreas del gráfico es decir:



$A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \frac{15 \times 50}{2} = 375\ \text{m}$$

$$A_2 = 50 \times (35 - 15) = 50(20) = 1\,000\ \text{m}$$

$$A_3 = \frac{50 \times (50 - 35)}{2} = \frac{50(15)}{2} = 375\ \text{m}$$

$$\therefore\quad D_{total} = A_1 + A_2 + A_3 = 1\,000 + 375(2) = 1\,750\ \text{m}$$

Parte (b)

t = 10 $\qquad D_{total} = (40 - 10)(30) = 900\ \text{m} + A_{trapecio}$

a t = 40 s $\qquad A_{trapecio} = R = \dfrac{[(30) + (20)](20)}{2} = 500\ \text{m}$

$$\therefore\quad D_{total} = 900 + 500 = 1\,400\ \text{m}$$

Parte (c)

Hallando las posiciones en cada intervalo de tiempo.
Sabemos:

$t \to 0 \to t = 15$ s

$$\frac{v(t) - 0}{t - 0} = 3 \;\Rightarrow\; v(t) = 3t\ \text{m/s}$$

29. La velocidad inicial de un cuerpo es 5,20 m/s. ¿Cuál es su velocidad después de 2,50 s si acelera uniformemente a a) 3,00 m/s² y b) a = –3,00 m/s²?

Resolución :

Parte (a)

v_o = 5,20 m/s

v_f = ? $\quad\Rightarrow\quad v_f = v_o + a\,.\,t$

t = 2,5 s $\quad\Rightarrow\quad v_f = (5{,}20) + (2{,}5)(3{,}0)$

a = 3,00 m/s² $\quad$ Luego: v_f = 12,7 m/s

Parte (b)

$v_o = 5{,}20$ m/s $\Rightarrow$ $v_f = v_o - a.t$

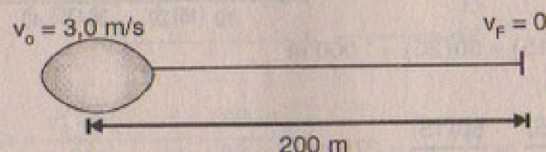
$v_f = ?$ $\Rightarrow$ $v_f = (5{,}20) + (-3{,}00)(2{,}5)$

$t = 2{,}5$ s

$a = -3{,}00$ m/s^2 $\therefore$ $v_f = -2{,}3$ m/s

30. Un disco de *hockey* que se desliza sobre un lago congelado se detiene después de recorrer 200 m. Si su velocidad inicial es 3,00 m/s, a) ¿cuál es su aceleración si ésta se supone constante, b) cuánto dura su movimiento y c) cuál es su velocidad después de recorrer 150 m?

Resolución :



Parte (a)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad -2ad = v_i^2$$

$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{v_i^2}{2d} = \frac{(3{,}00)^2}{2(200)} = -0{,}023\ m/s^2$$

Parte (b)

$$v_f = v_i - a.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_i}{|a|} = \frac{3{,}00}{0{,}023} = 130{,}4\ s$$

Parte (c)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = (3{,}00)^2 - 2(0{,}023)(150)$$

$$\therefore \quad v_f = \sqrt{2{,}1}\ m/s$$

$$\therefore \quad v_f = 1{,}45\ m/s$$

$t = 15$ s $\rightarrow$ $t = 35$ s $\quad v(t) = 50$ m/s

$$t = 35\ s \rightarrow t = 50\ s \qquad \frac{v(t) - 50}{-35} = -3 \Rightarrow v(t) = -3t + 105 + 50$$

$$\therefore \quad v(t) = -3t + 155\ m/s$$

Luego:

$x_1(t)$ en $t = 0 \rightarrow t = 15$ s

$$\frac{d\,x_1}{dt} = v = 3t \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dx_1 = \int_0^t 3t\,dt$$

$$\therefore \quad x_1(t) = \frac{3t^2}{2} m$$

$x_2(t)$ en $t = 15$ s $\rightarrow t = 35$ s

$$\frac{d\,x_2}{dt} = v = 50 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dx_2 = \int_0^t 50\,dt$$

$$\therefore \quad x_2(t) = 50t$$

$x_3(t)$ en $t = 35$ s $\rightarrow$ $t = 50$ s

$$\frac{d\,x_3}{dt} = v = -3t + 155 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dx_3 = -\int_0^t 3t\,dt + \int_0^t 155\,dt$$

$$\therefore \quad x_3(t) = \frac{-3t^2}{2} + 155t\ m$$

Parte (d)

$$v_{prom} = \frac{x_{(50)} - x_{(0)}}{50 - 0} = \frac{\left[\frac{-3(50)^2}{2} + 155(50)\right] - [0]}{50}$$

$$\therefore \quad v_{prom} = 80\ m/s$$

31. Un jet aterriza con una velocidad de 100 m/s y puede acelerar a una tasa máxima de −5,0 m/s² cuando se va a detener. a) A partir del instante en que toca la pista de aterrizaje, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario antes de que se detenga? b) ¿Este avión puede aterrizar en un pequeño aeropuerto donde la pista tiene 0,80 km de largo?

Resolución :

Parte (a)

$$v_f = v_i - at \Rightarrow \quad a = 100 - 5t \qquad \therefore \qquad t = 20\ s$$

Parte (b)

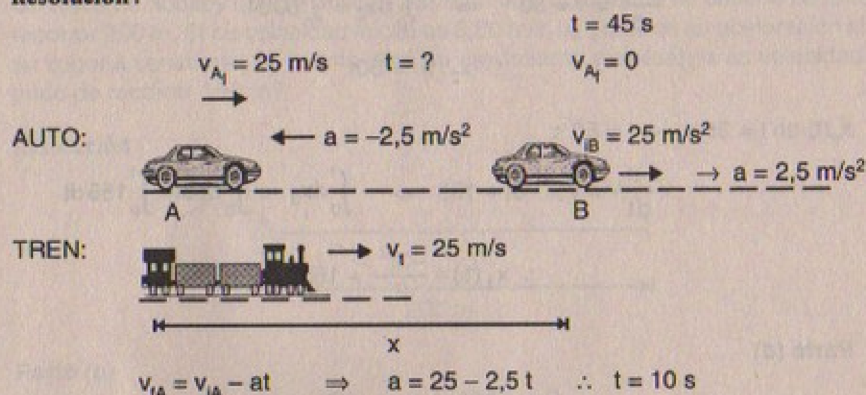
$$v_f^2 = v_i^2 - 2a\,d_{máx} \quad \Rightarrow \quad d_{max} = \frac{100 \times 100}{2{,}5}$$

$$\therefore \quad d_{máx} = 1\,000\ m = 1\ km$$

$\therefore$ No puede aterrizar ya que para poder detenerse necesita un espacio de 1 km.

32. Un auto y un tren se mueven al mismo tiempo a lo largo de trayectorias paralelas a 25,0 m/s. Debido a una luz roja el auto experimenta una aceleración uniforme de $-2{,}50\ m/s^2$ y se detiene. Permanece en reposo durante 45,0 s, después acelera hasta una velocidad de 25,0 m/s a una tasa de $2{,}50\ m/s^2$. ¿A qué distancia del tren está el auto cuando alcanza la velocidad de 25,0 m/s, suponiendo que la velocidad del tren se ha mantenido en 25,0 m/s?

Resolución:



$v_{fA} = v_{iA} - at \quad \Rightarrow \quad a = 25 - 2{,}5\,t \quad \therefore \quad t = 10\ s$

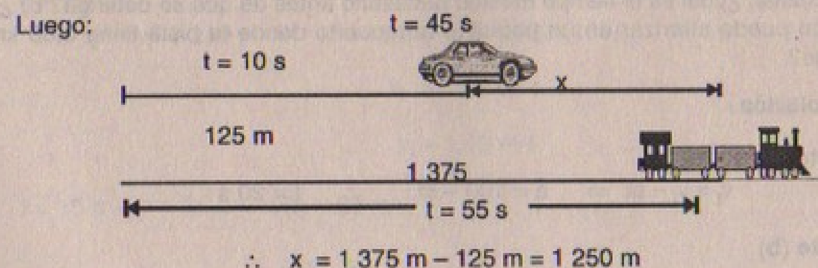
El tren en 10 s recorrerá: $d_T = 25 \times 10 = 250\ m$

Mientras que el auto ha recorrido: $d_c = \dfrac{v_{A_i}^2}{2(a)} = \dfrac{25 \times 25}{2\frac{(5)}{2}} = 125\ m$

Entonces el tren recorrerá en t = 55 s:

$$d_T = 55 \times 25 = 1\ 375\ m$$

Luego:

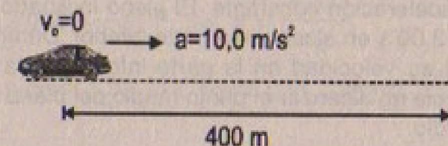


$\therefore \quad x = 1\ 375\ m - 125\ m = 1\ 250\ m$

El auto estará a 1 250 m del tren cuando vuelva a tener 25 m/s.

33. Una piloto de arrancones inicia la marcha de su vehículo desde el reposo y acelera a $10{,}0\ m/s^2$ durante una distancia total de 400 m (1/4 de milla). a) ¿Cuánto tiempo tarda el carro en recorrer esta distancia? b) ¿Cuál es su velocidad al final del recorrido?

Resolución:



Parte (a): $400 = \dfrac{1}{2}(a)\,t^2 \Rightarrow \quad t^2 = \dfrac{800}{10} = 80$

$\therefore \quad t = \sqrt{80} = 8{,}94\ s$

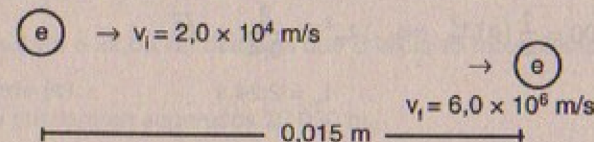
Parte (b)

$v_f^2 = v_i^2 + 2(a)d \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = 0 + 2(10)(400)$

$\therefore \quad v_f = \sqrt{8\ 000} = 89{,}4\ m/s$

34. Un electrón en un tubo de rayos catódicos (TRC) acelera de $2{,}0 \times 10^4$ m/s hasta $6{,}0 \times 10^6$ m/s en 1,5 cm. a) ¿Cuánto tiempo tarda el electrón en recorrer esta distancia? b) ¿Cuál es su aceleración?

Resolución:



Parte (a): $v_f = v_i + a.t$ ... (3)

$0{,}015 = 2{,}0 \times 10^4 t + \dfrac{1}{2} a \cdot t^2$ ... (1)

$(6{,}0 \times 10^6)^2 = (2{,}0 \times 10^4)^2 + 2a(0{,}015)$

$\therefore \quad a = 1{,}2 \times 10^{15}\ m/s^2$ ... (2)

(2) en (1): $15 \times 10^{-3} = 2{,}0 \times 10^4\,t + 6.10^{14} t^2$

$\Rightarrow \quad 6{,}10^{14}\,.t^2 + 2{,}0 \times 10^4\,t - 15.10^{-3} = 0$

Reemplazando (2) en (3):

$6{,}0 \times 10^6 = 2{,}0 \times 10^4 + 1{,}2 \times 10^{15} t$

$\Rightarrow \quad t = \dfrac{6{,}0 \times 10^6 - 2{,}0 \times 10^4}{1{,}2 \times 10^{15}} \approx \dfrac{3{,}0 \times 10^6}{1{,}2 \times 10^{15}}$

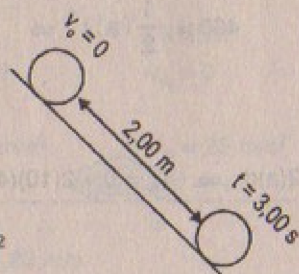
Luego: $t = 25 \times 10^{-10}\ s$

Parte (b):

De (2) $\quad a = 1{,}2 \times 10^{15}\ m/s^2$

35. Una partícula parte desde el reposo de la parte superior de un plano inclinado y se desliza hacia abajo con aceleración constante. El plano inclinado tiene 2,00 m de largo, y la partícula tarde 3,00 s en alcanzar la parte inferior. Determine a) la aceleración de la partícula, b) su velocidad en la parte inferior de la pendiente, c) el tiempo que tarda la partícula en alcanzar el punto medio del plano inclinado, y d) su velocidad en el punto medio.

Resolución :



Parte (a)

$$2{,}00 = \frac{1}{2}(a)(3{,}00)^2$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{4{,}00}{9{,}00} = 0.4 \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

$$v_f = v_i + a.t \Rightarrow v_f = (0{,}4)(3{,}00) = 1{,}2 \text{ m/s}$$

Parte (c)

$$1{,}00 = \frac{1}{2}(a).t_m^2 \Rightarrow t_m^2 = \frac{2}{0{,}4} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \; t_m = 2{,}24 \text{ s}$$

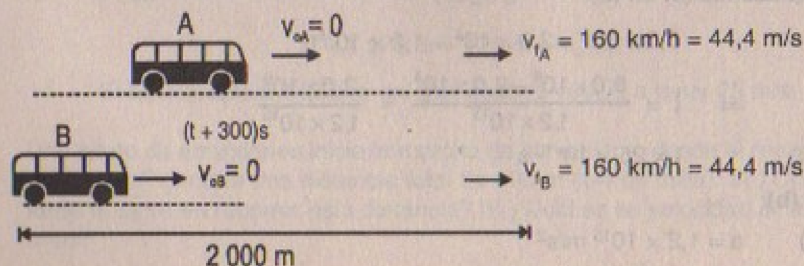
Parte (d)

$$v_f = 0 + (0{,}4)(2{,}24) \quad \therefore \; v_f = 0{,}896 \text{ m/s}$$

En el punto medio

36. Dos trenes expresos inician su recorrido con una diferencia de 5 min. A partir del reposo cada uno es capaz de alcanzar una velocidad máxima de 160 km/h después de acelerar uniformemente en una distancia de 2.0 km. a) ¿Cuál es la aceleración de cada tren? b) ¿A qué distancia está el primer tren cuando el segundo inicia su trayecto? c) ¿Qué tan separados se encuentran cuando ambos viajan a máxima velocidad?

Resolución :



Parte (a)

$$2\,000 = \frac{1}{2}a_A t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4\,000}{a_A} \quad \text{... (1)}$$

$$2\,000 = \frac{1}{2}a_B (t+300)^2 \Rightarrow (t+800)^2 = \frac{4\,000}{a_B} \quad \text{... (2)}$$

Hallando a_A:

$$v_f^2 = v_i^2 + a_A\,(d) \Rightarrow a_A = \frac{(44{,}4)^2}{2(2\,000)} = 0{,}49 \text{ m/s}^2 \quad \text{... (3)}$$

Hallando a_B:

(3) en (1):

$$t^2 = \frac{4\,000}{0{,}49} \Rightarrow t_A = 90{,}4 \text{ s}$$

$$t_B^2 = (t+300)^2 = \frac{4\,000}{a_B} \Rightarrow a_B = \frac{4\,000}{(390{,}4)^2} = 0{,}026 \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

$$d_A = \frac{1}{2}(0{,}49)(300)^2 = 22\,050 \text{ m} = 22{,}05 \text{ km}$$

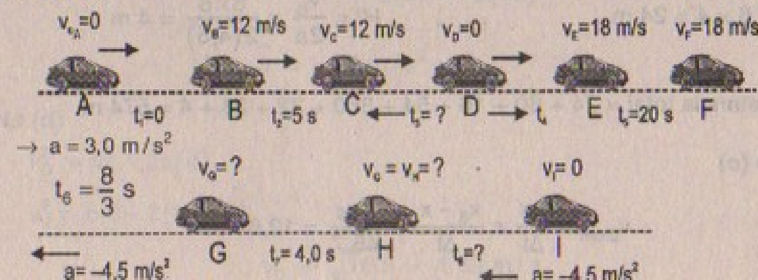
A estará a 22,05 km después que B inicia su movimiento.

Parte (c)

Se encuentran separados 22 050 m.

37. Un adolescente tiene un auto que acelera a 3,0 m/s² y desacelera a –4,5 m/s². En un viaje a la tienda, acelera desde el reposo hasta 12 m/s, maneja a velocidad constante durante 5,0 s y luego se detiene momentáneamente en la esquina. Acelera después hasta 18 m/s, maneja a velocidad constante durante 20 s, desacelera durante 8/3 s, continúa durante 4,0 s a esta velocidad y después se detiene. a) ¿Cuánto dura el recorrido? b) ¿Qué distancia se recorre? c) ¿Cuál es la velocidad promedio del viaje? d) ¿Cuánto tardaría si caminara a la tienda y regresara de ese mismo modo a 1,5 m/s?

Resolución :



Parte (a)

Tiempo total = $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8$

$t_1 = \frac{v_B - v_{0A}}{a} = \frac{12}{3} = 4\,s$; $t_2 = 5\,s$ (dato)

$t_3 = \frac{v_D - v_C}{-a} = \frac{0-12}{-4,5} = 2,7\,s$; $t_4 = \frac{v_E - v_D}{a} = \frac{18-0}{3} = 6\,s$

$t_5 = 20\,s$ (dato) ; $t_6 = \frac{8\,s}{3}$ (dato)

$t_7 = 4,0\,s$ (dato) ; $t_8 = ?$

Sabemos que $t_6 = \frac{8}{3} = \frac{v_G - v_F}{-a} = \frac{v_G - 18}{-4,5} = \frac{8}{3}$ $\therefore v_6 = 6\,m/s$

$$t_8 = \frac{v_I - v_G}{-4,5} = \frac{0-6}{-4,5} = 1,3\,s$$

Luego

$$t_{total} = \sum_{i=1}^{8} t_i = 1,3 + 4 + 2,7 + 5 + 6 + 20 + 2,7 + 4,0 = 45,7\,s$$

Parte (b)

Distancia total = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI

$AB = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{12\times12}{2(3)} = 24\,m$; $BC = 12 \times 5 = 60\,m$

$CD = \frac{v_C^2}{2a} = \frac{12\times12}{2(4,5)} = 16\,m$; $DE = \frac{v_E^2}{2a} = \frac{18\times18}{2\times3} = 54\,m$

$EF = 18 \times 20 = 360\,m$; $FG = \frac{v_F^2 - v_G^2}{2a} = \frac{18\times18 - 6\times6}{2(4,5)} = 32\,m$

$GH = 6 \times 4 = 24\,m$; $HI = \frac{v_H^2}{2a} = \frac{6\times6}{2(4,5)} = 4\,m$

$\therefore$ Distancia total = 24 + 60 + 16 + 54 + 360 + 32 + 24 + 4 = 574 m

Parte (c)

$$v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_8 - x_1}{\Delta t} = \frac{574}{45,7} = 12,6\,m/s$$

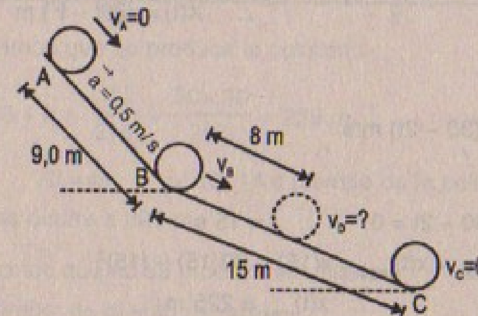
Parte (d)

$574 = (1,5)(t) \Rightarrow t_{ida} = 382,7\,s$

$\therefore$ Tardaría en ir y regresar = $2\,t_{ida} = 765,3\,s$

38. Una pelota acelera a 0,5 m/s² mientras se mueve hacia abajo en un plano inclinado de 9,0 m de largo. Cuando alcanza la parte inferior, la pelota rueda por otro plano, donde, después de moverse 15 m, se detiene. a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en la parte inferior del primer plano? b) ¿Cuánto tarda en rodar por el primer plano? c) ¿Cuál es la aceleración a lo largo del segundo plano? d) ¿Cuál es la velocidad de la pelota 8,0 m a lo largo del segundo plano?

Resolución :



Parte (a)

$v_B^2 = v_A^2 + 2(a)(d) \Rightarrow v_B = \sqrt{2ad} = \sqrt{2(1/2)(9)}$

$\therefore v_B = 3\,m/s$

Parte (b)

$v_B = v_A + at \Rightarrow t = \frac{v_B}{a} = \frac{3}{0,5} = 6\,s$

Parte (c)

$v_C^2 = v_B^2 + 2(a)(d) \Rightarrow a = -\frac{v_B^2}{2(d)} = -\frac{6\times6}{2(15)} = -1,2$

$\therefore \vec{a} = -1,2\,m/s^2$

Parte (d)

$v_D^2 = v_B^2 - 2a(d)$

$\Rightarrow v_D^2 = 6,6 - 2(1,2)(8)$

$\therefore v_D = \sqrt{16,8} = 4,09\,m/s$

39. Un automóvil que se mueve a una velocidad constante de 30,0 m/s pierde velocidad repentinamente en el pie de una colina. El auto experimenta una aceleración constante de $-2,00\ m/s^2$ (opuesta a su movimiento) mientras efectúa el ascenso. a) Escriba ecuaciones para la posición y la velocidad como funciones del tiempo, considerando x = 0 en la parte inferior de la colina, donde v_o = 30,0 m/s. b) Determine la distancia máxima recorrida por el auto después de que pierde velocidad.

Resolución:

$$X(t) = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$X(t) = 30t + \frac{1}{2}(-2)t^2$$

$$\therefore\ X(t) = (30t - t^2)\ m$$

Luego: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = (30 - 2t)\ m/s$

Parte (b)

$v_f(t) = 0 \Rightarrow 30 - 2t = 0 \quad \therefore\ t = 15\ s$

Luego $\quad D_{máx} = x(t)_{máx} = x(15) = 30(15) - (15)^2$

$\therefore\ x(t)_{máx} = 225\ m$

40. Un electrón tiene una velocidad inicial de $3,0 \times 10^5$ m/s. Si experimenta una aceleración de $8,0 \times 10^{14}\ m/s^2$, a) ¿cuánto tardará en alcanzar una velocidad de $5,4 \times 10^5$ m/s, y b) qué distancia recorre en este tiempo?

Resolución:

$v_o = 3 \times 10^5$ m/s $\quad t = ? \quad v_f = 5,4 \times 10^5$ m/s $\quad \vec{a} = 8,0 \times 10^{14}\ m/s^2$

Parte (a)

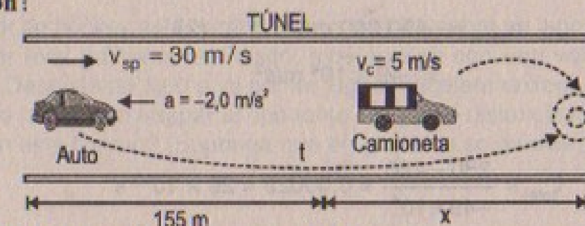
$$v_f = v_o + at \Rightarrow \quad t = \frac{5,4\times10^5 - 3,0\times10^5}{8,0\times10^{14}} = 3,0 \times 10^{-10}\ s$$

Parte (b)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{(5,4-3,0)^2\times10^{10}}{2\times8,0\times10^{14}} = 3,6 \times 10^{-6}\ m$$

41. Speedy Sue manejando a 30 m/s entra en un túnel de un solo carril. Después observa una camioneta que se mueve despacio 155 m adelante viajando a 5,0 m/s. Sue aplica sus frenos pero puede desacelerar sólo a $2,0\ m/s^2$, debido a que el camino está húmedo. ¿Chocará? Si es así, determine a qué distancia dentro del túnel y en qué tiempo ocurre el choque. Si no, determine la distancia de máximo acercamiento entre el auto de Sue y la camioneta.

Resolución:



- Supongamos que se produce la colisión:

$$\Rightarrow \quad 155 + x = \frac{V_{sp}^2}{2(a)} = \frac{30\times30}{2(2)} = 225\ m \qquad \therefore\ x = 225 - 155 = 70\ m$$

Luego: $\quad 70 = 5t \quad \Rightarrow\ t = 14\ s$ (tiempo de la colisión)

El choque ocurre a 225 m.

- Supongamos que no se produce la colisión:

En un tiempo «t» el auto recorre:

$$d_A = 30\,t - \frac{1}{2}(2)\,t^2 = (30t - t^2)\ m$$

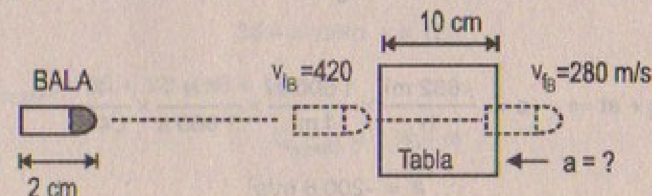
y la camioneta recorre: $\quad d_c = 5t$

La máxima distancia de acercamiento será:

$$155 - 30t + t^2 + 5t = (155 - 25t + t^2)\ m$$

42. Una bala indestructible de 2,00 cm de largo se dispara en línea recta a través de una tabla que tiene 10,0 cm de espesor. La bala entra en la tabla con una velocidad de 420 m/s y sale con una velocidad de 280 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración promedio de la bala a través de la tabla? b) ¿Cuál es el tiempo total que la bala está en contacto con la tabla? c) ¿Qué espesor de las tablas (calculado hasta 0,1 cm) se requeriría para detener la bala?

Resolución:



Parte (a)

$$a_{prom} = \frac{v_{f_B} - v_{i_B}}{\Delta t} = \frac{280 - 420}{\Delta t} \quad ... (1)$$

$$\frac{v_{f_B}^2 - v_{i_B}^2}{2d} = a_{prom} \Rightarrow a_{prom} = \frac{280 \times 280 - 420 \times 420}{2(0,1)}$$

$$\therefore \; a_{prom} = -490\,000 \text{ m/s}^2 \quad ... (2)$$

$$= -49 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

(2) en (1): $t_{total} = \dfrac{280 - 420}{-49 \times 10^4} = 0,00029 = 29 \times 10^{-5}$ s

Parte (c)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

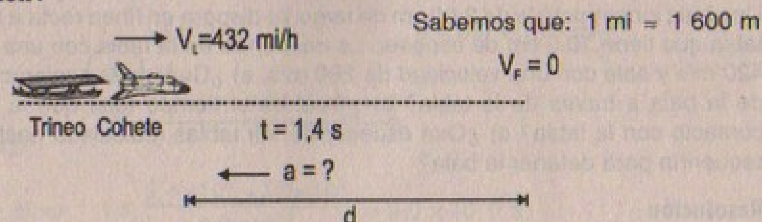
Para detener a la bala $\Rightarrow v_{f_{bala}} = 0$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{v_{i_B}^2}{2(a)} = \frac{420 \times 420}{2(49) \times 10^4}$$

$$\therefore \; d = 0,18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$

43. Hasta hace poco, el récord mundial de velocidad terrestre lo poseía el coronel de la Fuerza Aérea de Estados Unidos, John P. Stapp. El 19 de marzo de 1954, en un trineo impulsado por cohete, bajó por una pista a 632 mi/h. El vehículo se detuvo en forma segura en 1,4 s. Determine a) la aceleración negativa que experimentó y b) la distancia recorrida durante esta aceleración negativa.

Resolución :



Parte (a)

$$v_F = v_i + at \Rightarrow \quad a = \frac{-632 \text{ mi}}{\text{h}} \times \frac{1\,600 \text{ m}}{1 \text{ mi}} \times \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \times \frac{1}{1,4 \text{ s}}$$

$$\therefore \; \vec{a} = -200,6 \text{ m/s}^2$$

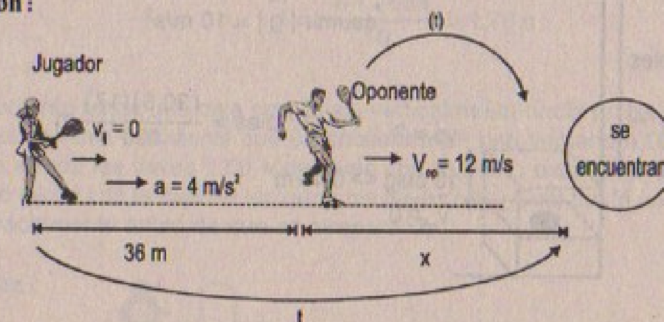
Parte (b)

$$v_f^2 = v_i^2 - 2(a)(d) \Rightarrow \quad d = \frac{v_i^2}{2a} = \frac{(280,8)(280,8)}{2(200,6)}$$

$$\therefore \; d = 196,5 \text{ m}$$

44. Un jugador de hockey está parado en sus patines sobre un lago congelado mientras un jugador rival patina con el disco, moviéndose con una velocidad uniforme de 12,0 m/s. Después de 3,00 s, el primer jugador acelera uniformemente a 4,00 m/s², a) ¿cuánto tardará en atrapar al oponente? b) ¿Qué distancia ha recorrido el primer jugador en este tiempo? (Suponga que el oponente se mueve a velocidad constante.)

Resolución :



Parte (a)

El jugador después de 3 segundos empieza su movimiento, pero el oponente ya avanzó 36 m.

Hallando «t» de encuentro:

$36 + x = \frac{1}{2}(4)t^2 \quad ... (1)$

Pero $x = 12t \quad ... (2)$

(2) en (1) = $36 + 12t = 2t^2$

Desarrollando la ecuación resulta:

$$t_{encuentro} = 3\left(1 + \sqrt{3}\right) = 8,196 \text{ s}$$

Parte (b)

El jugador ha recorrido la siguiente distancia:

$$36 + x \;\; \text{pero} \;\; x = 12t$$

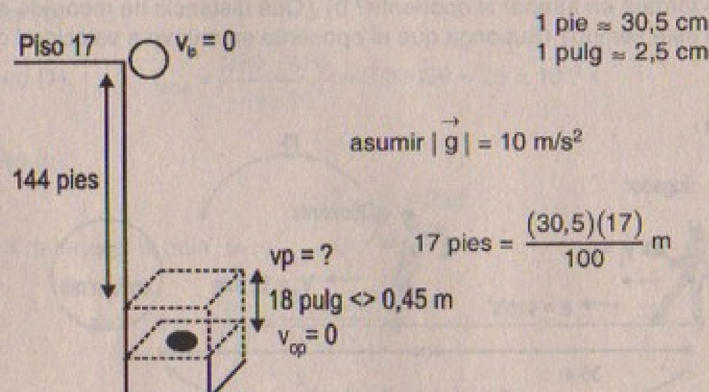
$$\Rightarrow \quad D_{jugador} = 36 + 12t = 36 + 12(8,2)$$

$$\therefore \; D_{jugador} = 134,4 \text{ m}$$

CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

45. Se informó que una mujer cayó 144 pies desde el piso 17 de un edificio, aterrizando sobre una caja de ventilador metálica, la cual sumió hasta una profundidad de 18,0 pulg. Sólo sufrió lesiones menores. Ignore la resistencia del aire y calcule a) la velocidad de la mujer exactamente antes de chocar con el ventilador, b) su aceleración promedio mientras está en contacto con la caja, y c) el tiempo que tarda en sumir la caja.

Resolución :



1 pie ≈ 30,5 cm
1 pulg ≈ 2,5 cm

asumir $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$

$$17\ pies = \frac{(30,5)(17)}{100}\ m$$

Parte (a)

$$v_{fp}^2 = v_{ip}^2 + 2gh \Rightarrow v_{fp} = \sqrt{2g(h)} = \sqrt{\frac{2(10)(30,5)(17)}{100}}$$

$$\therefore\ v_{fp} = 10,18\ m/s$$

Parte (b)

$$v_{cp}^2 = v_f^2 + 2a_{prom} \cdot d$$

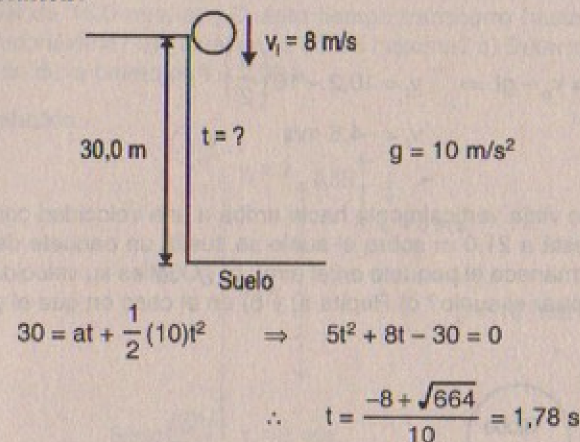
$$\Rightarrow\ 0 = v_p^2 + 2a_{prom}(0,45) \Rightarrow a_{prom} = -\frac{v_p^2}{2(0,45)} = -129,6\ m/s^2$$

Parte (c)

$$v_{fp} = v_p - at \Rightarrow t = \frac{V_p}{a} = \frac{10,18}{129,6} = 0,079\ s$$

46. Una pelota fue lanzada directamente hacia abajo con una velocidad inicial de 8,00 m/s desde una altura de 30,0 m. ¿En qué momento la pelota golpea el suelo?

Resolución :

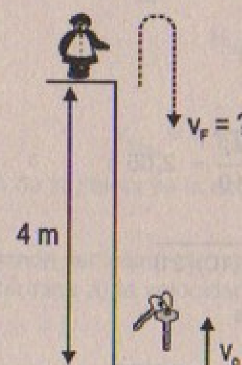


$$30 = at + \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad 5t^2 + 8t - 30 = 0$$

$$\therefore\ t = \frac{-8 + \sqrt{664}}{10} = 1,78\ s$$

47. Una estudiante lanza una caja con llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de un club femenil estudiantil que se encuentra en una ventana 4,00 m arriba. La hermana atrapa las llaves 1,50 s después con la mano extendida. a) ¿Cuál es la velocidad inicial con la cual se lanzaron las llaves? b) ¿Cuál fue la velocidad de las llaves exactamente antes de que se atraparan?

Resolución :



Considerar:

$g = 10\ m/s^2$

Posición:

$$y(t) = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

Parte (a)

$$4 = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$4 = v_o\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}(10)\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ 4 = \frac{3v_o}{2} - \frac{45}{4} \qquad \therefore\ v_o = \frac{61}{6} = 10,2\ m/s$$

Luego:

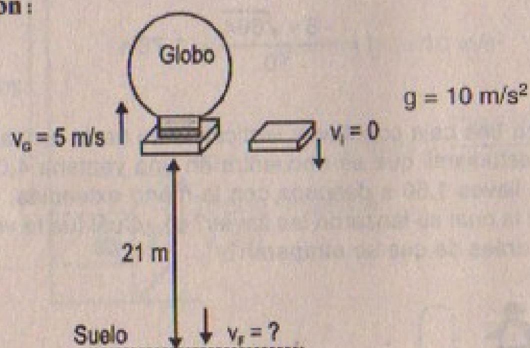
Parte (b)

$$v_f = v_o - gt \Rightarrow \quad v_f = 10{,}2 - 10\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \quad v_f = -4{,}8 \text{ m/s}$$

48. Un globo aerostático viaja verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 5,00 m/s. Cuando está a 21,0 m sobre el suelo se suelta un paquete desde él. a) ¿Cuánto tiempo permanece el paquete en el aire? b) ¿Cuál es su velocidad exactamente antes de golpear el suelo? c) Repita a) y b) en el caso en que el globo desciende a 5,00 m/s.

Resolución :



Parte (a)

$$21 = \frac{1}{2}(10)(t^2) \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{42}{10}} = 2{,}05 \text{ s}$$

Parte (b)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2(10)(21)}$$

$$\therefore \quad v_f = 20{,}5 \text{ m/s}$$

Parte (c)

$$21 = 5t + \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad 5t^2 + 5t - 21 = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{-5+21}{10} = 1{,}6 \text{ s}$$

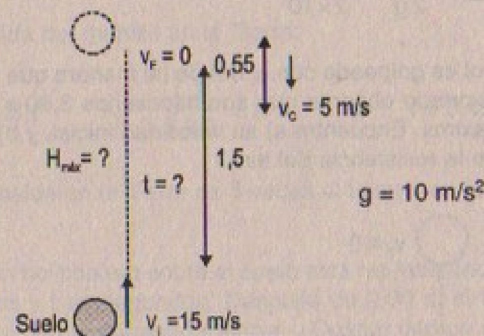
$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = 25 + 2(10)(21) =$$

$$\therefore \quad v_f = 21 \text{ m/s}$$

49. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 15,0 m/s. a) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la pelota alcanza su altitud máxima? b) ¿Cuál es su altitud máxima? c) Determine la velocidad y la aceleración de la pelota en t = 2,00 s.

Resolución :



Parte (a)

$$v_f = v_i - gt \Rightarrow \quad t = \frac{15}{10} = 1{,}5 \text{ s}$$

Parte (b)

$$v_f^2 = v_i^2 - 2g\,H_{máx} \quad \Rightarrow \quad H_{máx} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{15\times15}{2\times10}$$

$$\therefore \quad H_{máx} = 11{,}25 \text{ m}$$

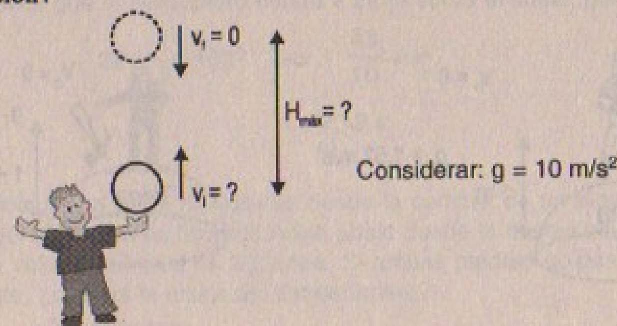
Parte (c)

$$v_{f(2s)} = v_i + gt = 0 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ m/s}$$

La aceleración de la pelota es la acción de la gravedad.

50. Una pelota lanzada verticalmente hacia arriba es capturada por el lanzador después de 20,0 s. Determine a) la velocidad inicial de la pelota, y b) la altura máxima que alcanza.

Resolución :



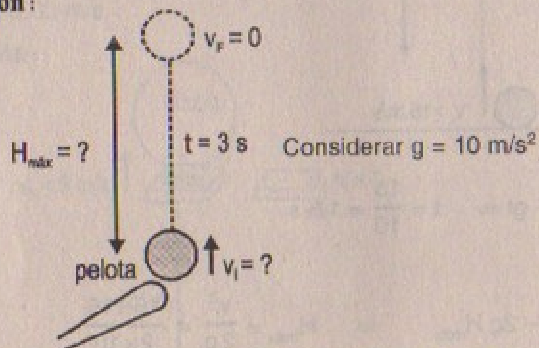
$$t_{ida} = t_{vuelta} \Rightarrow 2 \cdot t_{vuelta} = 2 \quad \therefore \quad t_{vuelta} = 1\ s$$

$$v_f = v_i - gt \Rightarrow v_i = 10\, t_{ida} = 10(1) = 10\ m/s$$

$$H_{máx} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{10 \times 10}{2 \times 10} = 5\ m$$

51. Una pelota de beisbol es golpeada con el bat de tal manera que viaja en línea recta hacia arriba. Un aficionado observa que son necesarios 3,00 s para que la pelota alcance su altura máxima. Encuentre a) su velocidad inicial, y b) su altura máxima. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

Resolución :



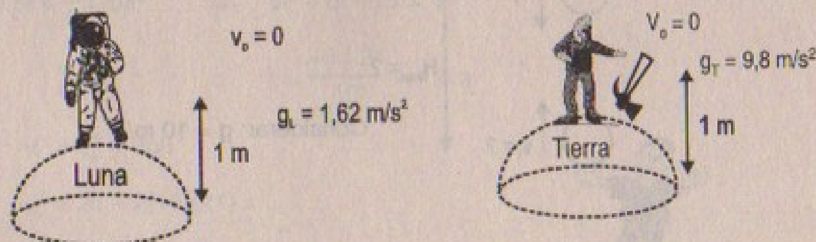
Considerar g = 10 m/s²

Parte (a): $v_f = v_i - gt \Rightarrow v_i = (10)(3) = 30\ m/s$

Parte (b): $H_{máx} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{30 \times 30}{2 \times 10} = 45\ m$

52. Un astronauta parado sobre la Luna suelta un martillo, dejando que caiga 1,00 m hacia la superficie. La gravedad lunar produce una aceleración constante de magnitud igual a 1,62 m/s². Una vez de regreso en la Tierra, el astronauta suelta de nuevo el martillo, dejándolo caer hasta el suelo desde una altura de 1,00 m con una aceleración de 9,80 m/s². Compare los tiempos de caída en las dos situaciones.

Resolución :



Tiempo de caída del martillo en la Luna:

$$1 = \frac{1}{2}(1,62)t^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{1,62}} = t \quad \therefore \quad t = 1,1\ s$$

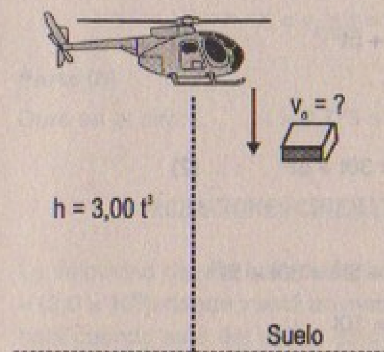
Tiempo de caída del martillo en la Tierra:

$$1 = \frac{1}{2}(9,8)t^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{9,8}} = t \quad \therefore \quad t = 0,45\ s$$

El tiempo de caída en la Tierra es 3 veces al tiempo en la Luna.

53. La altura de un helicóptero sobre el suelo está representada por $h = 3,00\ t^3$, donde h está en metros y t en segundos. Después de 2,00 s, el helicóptero deja caer una pequeña valija con la correspondencia. ¿Cuánto tiempo tarda la valija en llegar al suelo?

Resolución :



Considerar:

g = 10 m/s²

En 2 segundos $h = 3,00\ (2)^3 = 24\ m$

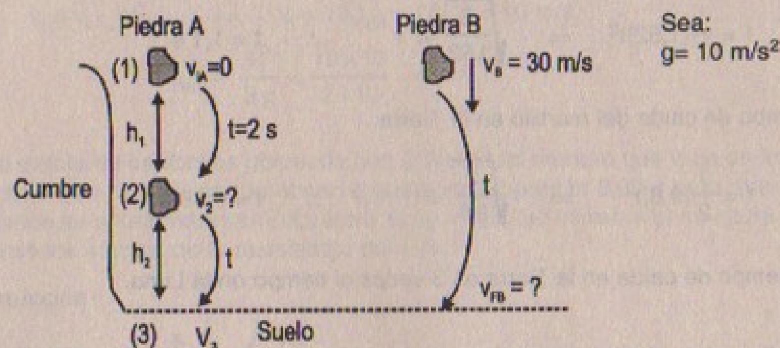
Quiere decir que el helicóptero estará a 24 m sobre el suelo, por consiguiente:

$$24 = \frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow \frac{48}{10} = t^2$$

$$\therefore \quad t = 2,19\ s$$

54. Una piedra cae a partir del reposo desde la cumbre de un elevado despeñadero. Una segunda piedra es lanzada hacia abajo desde la misma altura 2,00 s después con una velocidad inicial de 30,0 m/s. Si ambas piedras golpean el suelo simultáneamente, ¿cuál es la altura del despeñadero?

Resolución :



Sabemos que:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20 \text{ m}$$

$$v_2 = v_{iA} + 10t \quad \Rightarrow \quad v_2 = 10(2) = 20 \text{ m/s}$$

$$h_2 = 20t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 20t + 5t^2 \qquad \text{... (1)}$$

Además:

$$h_1 + h_2 = 30t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h_1 + h_2 = 30t + 5t^2 \qquad \text{... (2)}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\Rightarrow \quad h_1 + 20t + 5t^2 = 30t + 5t^2$$

$$\therefore \quad h_1 = 10t$$

Pero $h_1 = 20$ m $\quad \Rightarrow \quad 20 = 10t \qquad \therefore \quad t = 2$ s

Luego:

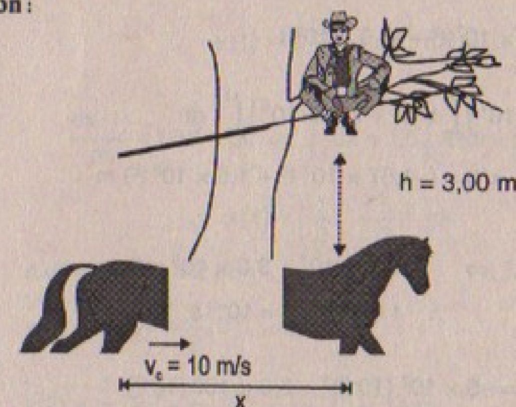
La altura total = $h_1 + h_2$

$$h_2 = 20t + 5t^2 = 20(2) + 5(2)^2 = 40 + 20 = 60 \text{ m}$$

Luego $\quad h_{total} = 60 + 20 = 80$ m

55. Una *stunt woman* que dobla en el cine a los actores principales sentada sobre la rama de un árbol desea caer verticalmente sobre un caballo que galopa debajo del árbol. La velocidad del caballo es de 10,0 m/s y la distancia de la rama a la silla de montar es de 3,00 m. a) ¿Cuál debe ser la distancia horizontal entre la silla y la rama cuando la mujer salta? b) ¿Cuánto tiempo dura en el aire?

Resolución :



Parte (a)

$$h = \frac{1}{2}(g)t^2 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{1}{2}(10)t^2 \qquad \therefore \qquad t = 0{,}775 \text{ s}$$

Luego la distancia horizontal será:

$$X = v_c \times t = 10 \times (0{,}775) = 7{,}75 \text{ m}$$

Parte (b)

Dura en el aire: $\qquad t = 0{,}775$ s

ECUACIONES CINEMÁTICAS DERIVADAS DEL CÁLCULO

56. La velocidad de una bala disparada por una pistola está dada por $v = (-5{,}0 \times 10^7)t^2 + (3{,}0 \times 10^5)t$ donde v está en metros/segundo y t en segundos. La aceleración de la bala cuando sale del cañón es cero. a) Determine la aceleración y posición de la bala como una función del tiempo cuando se encuentra en el cañón. b) Determine el tiempo que la bala se acelera mientras está en el cañón. c) Encuentre la velocidad a la cual sale del cañón. d) ¿Cuál es la longitud del cañón?

Resolución :

Velocidad de la bala: $v_B(t) = (-5{,}0 \times 10^7)t^2 + (3{,}0 \times 10^5)t$ m/s

Aceleración = 0 $\Rightarrow$ Velocidad es constante, cuando sale del cañón.

Luego:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (-10{,}0 \times 10^7 t + 3{,}0 \times 10^5) \text{ m/s}^2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = (-5{,}0 \times 10^7)t^2 + (3{,}0 \times 10^5)t$$

$$\int_0^t dx = \left(-5{,}0\times10^7\right)\int_0^t t^2\,dt + \left(3{,}0\times10^5\right)\int_0^t t\,dt$$

$$\therefore\ x(t) = (-1{,}67 \times 10^7\, t^3 + 1{,}5 \times 10^5\, t^2)\ \text{m}$$

Parte (b)

$$a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -10{,}0 \times 10^7 + 3{,}0 \times 10^5 = 0$$

$$\therefore\ t = 0{,}003\ \text{s} = 10^{-3}\ \text{s}$$

Parte (c)

$$v(0{,}003) = -5 \times 10^7\,(10^{-3})^2 + 3{,}0 \times 10^5\,(10^{-3})$$

$$\therefore\ v = 250\ \text{m/s}$$

Parte (d)

$$x\,(10^{-3}) = -1{,}67 \times 10^7\,(10^{-3})^3 + 1{,}5 \times 10^5\,(10^{-3})^2$$

$$\therefore\ x = 0{,}1333\ \text{m}$$

57. La posición de una pelota de softbol lanzada verticalmente hacia arriba se describe por la ecuación $y = 7{,}00t - 4{,}90t^2$, donde y está en metros y t en segundos. Encuentre a) la velocidad inicial v_o de la pelota en $t_o = 0$, b) su velocidad en t = 1,26 s y c) su aceleración.

Resolución :

Parte (a): $y(t) = 7.00\,t - 4.9\,t^2$

$$v(t) = \frac{dy_{(t)}}{dt} = 7{,}00 - 9{,}8\,t$$

$$\therefore\ V(0) = 7{,}00 - 9{,}8(0) = 7{,}00\ \text{m/s}$$

Parte (b): $v(1{,}26) = 7{,}00 - 9{,}8\,(1{,}26) = -5{,}35\ \text{m/s}$

Parte (c): $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = -9{,}80\ \text{m/s}^2$

58. Un trineo de cohete para la prueba de equipo sometido a grandes aceleraciones parte del reposo y acelera de acuerdo con la expresión $a = (3\ \text{m/s}^3)t + (5.00\ \text{m/s}^2)$. ¿Qué tan lejos se mueve el trineo en el intervalo t = 0 a t = 2,00 s?

Resolución :

$$a(t) = (3t + 5)\ \text{m/s}^2$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = 3t+5 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dV = 3\int_0^t t\,dt + 5\int_0^t dt$$

$$\therefore\ v(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + 5t\right)\ \text{m/s}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1{,}5t^2 + 5t \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dx = 1{,}5\int_0^t t^2 dt + 5\int_0^t t\,dt$$

$$\therefore\ x(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2\right)\text{m}$$

Luego: $\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 2\ \text{s})$

$$x(0) = \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{5}{2}(0)^2 = 0\ \text{m}$$

$$x(2) = \frac{1}{2}(2)^3 + \frac{5}{2}(2)^2 = 4 + 10 = 14\ \text{m}$$

$$\therefore\ \Delta x = 14\ \text{m}$$

Se mueve 14 m desde su posición inicial t = 0.

59. Los ingenieros automotrices denominan a la tasa de cambio de la aceleración en el tiempo como el «jalón». Si un objeto se mueve en una dimensión de manera tal que su jalón J es constante, a) determine expresiones para su aceleración a(t), velocidad v(t) y posición x(t), dado que su aceleración, velocidad y posición iniciales son a_o, v_o y x_o, respectivamente. b) Muestre que $a^2 = a_o^2 + 2J(v - v_o)$.

Resolución :

Por dato: $\dfrac{da(t)}{dt} = J = \text{constante}$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t d(a) = J\int_0^t dt$$

$$a(t) - a_o = Jt$$

$$\therefore\ a(t) = a_o + Jt\ \text{m/s}^2$$

Parte (a)

$$\frac{dv(t)}{dt} = a_o + Jt \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dv = \int_0^t a_o\,dt + J\int_0^t t\,dt$$

$$\therefore\ v(t) = (v_o + a_o t + \frac{J}{2}t^2)\ \text{m/s}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_o + a_o t + \frac{J}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dx = \int_0^t v_o dt + \int_0^t a_o t\,dt + \frac{J}{2}\int_0^t t^2 dt$$

$$\therefore\ x(t) = (X_o + v_o t + \frac{a_o}{2}t^2 + \frac{J}{6}t^3)\ \text{m}$$

Parte (b)

Por demostrar: $a^2 = a_o^2 + 2J\,(v - v_o)$

Resolución :

Sabemos que: $a(t) = a_o + Jt$ ...(1)

$v(t) = v_o + a_o t + \frac{J}{2} \cdot t^2$ ...(2)

De (1): $\frac{a - a_o}{J} = t$ ...(α)

(α) en (2):

$$v - v_o = a_o\left(\frac{a - a_o}{J}\right) + \frac{J}{2}\left(\frac{a - a_o}{J}\right)^2$$

$$v - v_o = \frac{a_o \cdot a - a_o^2}{J} + \frac{J}{2}\left(\frac{a^2 + a_o^2 - 2aa_o}{J^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v - v_o = \frac{2a\,a_o - 2a_o^2 + a^2 + a_o^2 - 2a\,a_o}{2J}$$

$$\therefore \quad a^2 = a_o^2 + 2J\,(v - v_o)$$

60. La aceleración de una canica en cierto fluido es proporcional a su velocidad al cuadrado, y está dada (entre unidades del SI) por $a = -3{,}00\ v^2$ para $v > 0$. Si la canica entra al fluido con una velocidad de 1,50 m/s, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que la velocidad de la canica se reduzca a la mitad de su valor inicial?

Resolución :

$$a = -3v^2$$

Sabemos que: $\frac{dV}{dt} = -3v^2 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{v^2}\,dv = -3\int_0^t dt$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v}\Big|_0^t = -3t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{v(t)} + \frac{1}{1{,}5} = -3t$$

$$\therefore \quad v(t) = \left(\frac{1}{3t + 0{,}67}\right) m/s$$

Tiempo para que $v = 0{,}75$ m/s

$$\Rightarrow \quad 0{,}75 = \frac{1}{3t + 0{,}67} \quad \Rightarrow \quad 3t + 0{,}67 = \frac{1}{0{,}75}$$

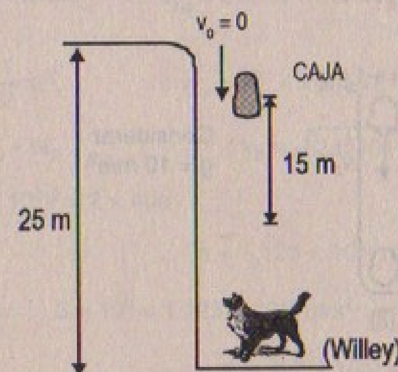
$$\therefore \quad t = \frac{\frac{1}{0{,}75} - 0{,}67}{3}$$

Luego: $t = 0{,}22$ s

PROBLEMAS ADICIONALES

61. Otro plan para atrapar al correcaminos ha fracasado y una caja fuerte cae desde el reposo desde la parte más alta de un peñasco de 25 m de alto hacia el coyote Willey, que se encuentra en el fondo. Wiley se percata de la caja después de que ésta ha caído 15 m. ¿Cuánto tiempo tendrá para quitarse?

Resolución :



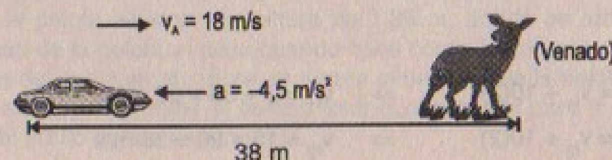
$$25 = \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad 5 = t^2 \quad \therefore \quad t = 2{,}24\ s$$

$$15 = \frac{1}{2}(10)t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 3 = t_1^2 \quad \therefore \quad t = 1{,}73\ s$$

Luego tendrá: 2,24 – 1,73 = 0,51 s para quitarse

62. Un automovilista viaja a 18,0 m/s cuando ve un venado en el camino 38,0 adelante. a) Si la máxima aceleración negativa del vehículo es –4,50 m/s², ¿cuál es el máximo tiempo de reacción t del automovilista que evite embestir al venado? b) Si su tiempo de reacción es de 0,300 s, ¿cuál será su velocidad cuando llegue al venado?

Resolución :



Parte (a)

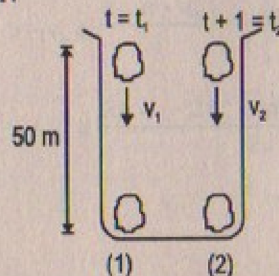
$$38 = 18t \ \frac{1}{2}\ (4.5)t^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4}t^2 - 18t + 38 = 0$$

Mal planteado el problema

63. Una curiosa estudiante de física asciende a un despeñadero a 50,0 m que sobresale por encima de un estanque de agua sin corrientes. Lanza dos piedras verticalmente hacia abajo con una diferencia de tiempo de 1,00 s y observa que producen un solo sonido al golpear el agua. La primera piedra tiene una velocidad inicial de 2,00 m/s. a) ¿Cuánto tiempo después de soltar la primera, las dos piedras golpean el agua? b) ¿Qué velocidad inicial debe tener la segunda piedra si las dos golpearan en forma simultánea? c) ¿Cuál es la velocidad de cada piedra en el instante en que golpean el agua?

Resolución :



Considerar
$g = 10\ m/s^2$

$v_1 = 2$ m/s

$$50 = 2t_1 + 5t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 5t_1^2 + 2t_1 - 50 = 0$$

$$50 = V_2t_2 + 5t_2^2$$

$$\therefore \quad t_1 = 3\ s$$

Supongamos que v_1 se lanzó primero con una velocidad $v_1 = 2$ m/s entonces v_2 empleará un tiempo $t_2 = 2$ s

En consecuencia:

$$50 = v_2\,(2) + 5(2)^2 \qquad \therefore \quad v_2 = 15\ m/s$$

Parte (a)
Después de 3 segundos ambas tocarán el agua.

Parte (b)
$v_2 = 15$ m/s

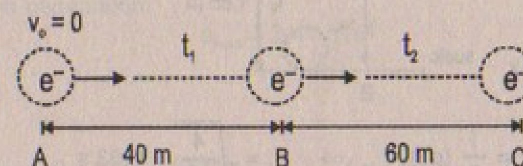
Parte (c)

$$v_{f_1} = v_{i_1} + 10(3) \quad \Rightarrow \quad v_{f_1} = 2 + 30 = 32\ m/s$$

$$v_{f_2} = v_{i_2} + 10(2) \quad \Rightarrow \quad v_{f_2} = 15 + 20 = 35\ m/s$$

64. En un acelerador lineal de 100 m un electrón se acelera hasta 1,0 por ciento de la velocidad de la luz en 40 m antes de que se desplace sin aceleración 60 m hacia un blanco. a) ¿Cuál es la aceleración del electrón durante los primeros 40 m? ¿Cuánto dura el trayecto total realizado?

Resolución :



$$V_{luz} = 3 \times 10^8\ m/s \Rightarrow \quad 1\%\ V_{luz} = 3 \times 10^6\ m/s = V_B$$

$$AB = 40 = \frac{1}{2}at_1^2, \qquad v_B^2 = v_0^2 + 2(a)(40)$$

$$v_B = v_0 + at_2 \qquad \therefore \quad v_B = \sqrt{2a(40)}$$

Pero: $(3 \times 10^6)^2 = 2 \times 40a$

$$\therefore \quad a = 1{,}125 \times 10^{11}\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 10^6 = 1{,}125 \times 10^{11}\ m/s^2$$

$$\therefore \quad t_1 = 2{,}7 \times 10^{-5}\ s$$

Parte (a)

Durante los 40 m: $a = 1{,}125 \times 10^{11}\ m/s^2$

Parte (b)

$$60 = 3 \times 10^6 \times t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 2 \times 10^{-5}\ s$$

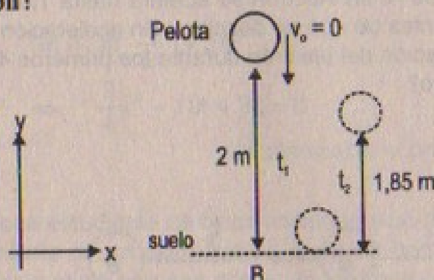
Entonces:

tiempo total transcurrido: $t_1 + t_2$

$$\Rightarrow \quad 2{,}7 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-5} = 4{,}7 \times 10^{-5}\ s$$

65. Una «superpelota» se deja caer al suelo desde una altura de 2,00 m. En el primer rebote la pelota alcanza una altura de 1,85 m, donde es atrapada. Encuentre la velocidad de la pelota a) justo cuando hace contacto con el suelo y b) justo cuando se aleja del suelo en el rebote. c) Ignore el tiempo que la pelota mantiene contacto con el suelo y determine el tiempo total que necesita para ir del punto en que se suelta al punto donde es atrapada.

Resolución :



Considerar:
$g = 10\ m/s^2$

Parte (a) $2 = \frac{1}{2}(g)t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4}{10}} = 0{,}63\ s$

$v_{fB} = v_o + 10t \Rightarrow v_{fB} = 10(0{,}6\ s) = -6{,}3\ m/s$

Parte (b) Cuando se aleja $\vec{V}_B = 6{,}3\ m/s$

Parte (c): Tiempo total $= t_1 + t_2$

$t_2 = ?$

Sabemos: $1{,}85 = 6{,}3\ t_2 - \frac{1}{2}(10)t_2^2$

$\Rightarrow 5t_2^2 - 6{,}3\ t_2 + 1{,}85 = 0$

$\therefore\ t_2 = \frac{6{,}3 \pm (1{,}64)}{10}$

Luego: $t_2 = 0{,}794\ s \quad \vee \quad t_2 = 0{,}466\ s$

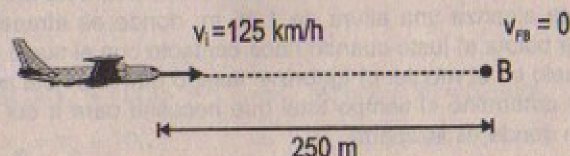
Pero: $t_1 > t_2 \quad \therefore \quad t_2 = 0{,}466\ s$

Luego: Tiempo total = 0,63 + 0,466

$\therefore$ Tiempo total = 1,096 s

66. Un avión Cessna 150 tiene una velocidad de despegue de aproximadamente 125 km/h. a) ¿Qué aceleración mínima constante necesita de acuerdo con lo anterior si el avión va a volar después de un recorrido de despegue de 250 m? b) ¿Cuál es el tiempo de despegue correspondiente? c) Si el avión continúa acelerando a esta tasa, ¿qué velocidad alcanzará 25,0 s después de empezar a rodar?

Resolución :



Parte (a)

$v_{fB}^2 = v_i^2 - 2.a_{mín} . d$

$\Rightarrow a_{min} = \frac{125 \times 125}{2(250)} = \frac{125}{4} \frac{km^2}{h^2} \times \frac{1}{m}$

Haciendo una conversión:

$a_{mín} = 2{,}41\ m/s^2$

Parte (b)

$v_f = v_i - at$

$\Rightarrow 0 = 34{,}7 - (2{,}41)t \quad \therefore \quad t = 14{,}4\ s$

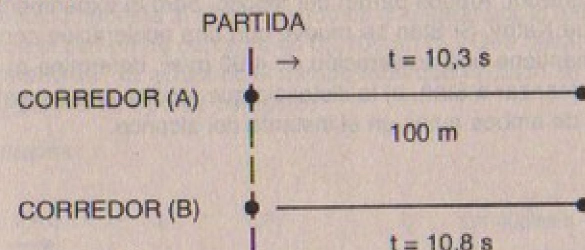
Parte (c)

$v_{f(a\ 25\ s)} = v_i + at \Rightarrow v_{f(a\ 25\ s)} = 34{,}7 + (2{,}41)(25)$

$\therefore\ v_f = 94{,}95\ m/s$

67. Un corredor cubre la carrera de 100 m en 10,3 s. Otro corredor llega en segundo lugar en un tiempo de 10,8 s. Suponiendo que los corredores se desplazaron a su velocidad promedio en toda la distancia, determine la separación entre ellos cuando el ganador cruza la meta.

Resolución :



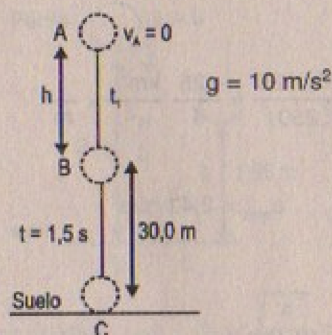
$v_A = \frac{100}{10{,}3} = 9{,}7\ m/s \quad ; \quad v_B = \frac{100}{10{,}8} = 9{,}3\ m/s$

$x_B = 9{,}3\ (10{,}3) = 95{,}79\ m$

$\therefore$ Distancia de separación = 100 – 95,79 = 4,21 m

68. Un objeto que cae tarda 1,50 s en recorrer los últimos 30,0 m antes de golpear el suelo. ¿Desde qué altura se soltó?

Resolución :



$$30 = v_B(1,5) + 5(1,5)^2$$

$$\therefore \quad v_B = 12.5 \text{ m/s}$$

$$v_B = v_A + 10t_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{12,5}{10} = t_1 \qquad \therefore \quad t_1 = 1,25 \text{ s}$$

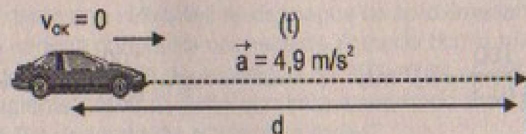
$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}(10)(1,25)^2 \quad \Rightarrow \quad h = 7,8 \text{ m}$$

Luego altura total = h + 30 = 7,8 + 30 = 37,80 m

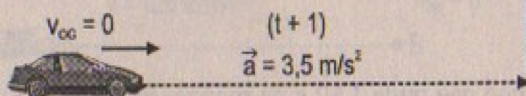
69. Una joven mujer llamada Kathy Kool compra un auto deportivo de super lujo que puede acelerar a razón de 4,90 m/s². Ella decide probar el carro en un arrancón con Stan Speedy, otro corredor. Ambos parten del reposo, pero el experimentado Stan sale 1,00 s antes que Kathy. Si Stan se mueve con una aceleración constante de 3,50 m/s² y Kathy mantiene una aceleración de 4,90 m/s², determine a) el tiempo que tarda Kathy en alcanzar a Stan, b) la distancia que recorre antes de alcanzarlo, y c) las velocidades de ambos autos en el instante del alcance.

Resolución :

Katty:



Stan Speedy:



Parte (a)

$$d = \frac{1}{2}(4,9)t^2 \qquad ...(1)$$

$$d = \frac{1}{2}(3,5)(t+1)^2 \qquad ...(2)$$

(1) = (2)

$$\Rightarrow \quad 4,9t^2 = 3,5(t^2 + 2t + 1) \quad \Rightarrow \quad 1,4t^2 = 7t + 3,5$$

$$\therefore \quad 1,4t^2 - 7t - 3,5 = 0 \quad \therefore \quad t = 5,46 \text{ s}$$

Parte (b)

$$d = \frac{1}{2}(4,9)(5,46)^2 = 73,04 \text{ m}$$

Parte (c)

$$v_{Katty} = v_o + at$$

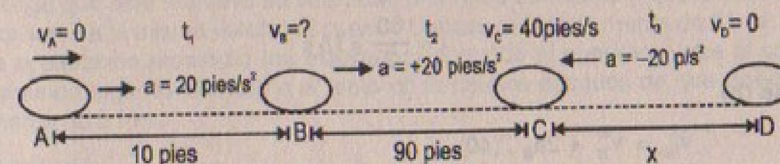
$$\Rightarrow \quad v_{Katty} = 0 + (4,9)(5,46) = 26,75 \text{ m/s}$$

$$v_{Stan} = v_o + at$$

$$\Rightarrow \quad v_{Stan} = 0 + (3,5)(6,46) = 22,61 \text{ m/s}$$

70. Un jugador de hockey golpea el disco en reposo sobre el hielo. El disco se desliza sobre el hielo durante 10,0 pies sin fricción, punto desde el cual se desplaza sobre una superficie de concreto. El disco después desacelera oponiéndose a su movimiento a una razón uniforme de –20,0 pies/s². Si la velocidad del disco es 40,0 pies/s después de recorrer 100 pies desde el punto de impacto, a) ¿cuál es la aceleración promedio impuesta al disco cuando es golpeado por el bastón del jugador? (Suponga que el tiempo de contacto es 0,0100 s.) b) ¿Qué distancia recorre el disco antes de detenerse? c) ¿Cuál es el tiempo total que el disco se mantiene en movimiento, ignorando el tiempo de contacto?

Resolución :



Parte (a)

$$a_{prom} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0}{0,0100} = 0$$

Parte (b)

$$2(20)x = 40 \times 40 \quad \Rightarrow \quad x = 40 \text{ pies}$$

Distancia total = 100 + x = 140 pies

Parte (c)

$(10)(2)(20) = v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = 20$ pies/s

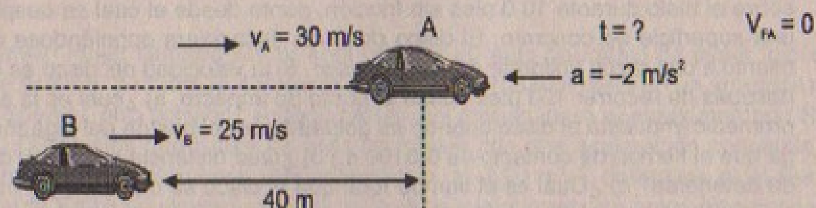
$\Rightarrow \quad t_1 = \dfrac{v_B}{a} = \dfrac{20}{20} = 1$ s

$t_2 = \dfrac{40-20}{20} = 1$ s $\qquad$ Luego: Tiempo total $= \sum_{i=1}^{3} t_i$

$t_3 = \dfrac{v_C}{a} = \dfrac{40}{20} = 2$ s $\qquad \therefore$ Tiempo total = 4 s

71. Dos autos viajan a lo largo de una línea en la misma dirección, el que va adelante a 25 m/s y el otro a 30 m/s. En el momento en que los autos están a 40 m de distancia, la conductora del auto delantero aplica los frenos de manera que el vehículo acelera a –2,0 m/s². a) ¿Cuánto tiempo tarda el carro para detenerse? b) Suponiendo que el carro trasero frena al mismo tiempo que el delantero, ¿cuál debe ser la aceleración negativa mínima del auto trasero de manera que no choque con el auto delantero? c) ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse el auto trasero?

Resolución :



Parte (a)

$v_{fA} = v_A - 2t \quad \Rightarrow \quad 0 = v_A - 2t$

$\therefore \quad t = \dfrac{30}{2} = 15$ s

Parte (b)

$v_{fB}^2 = v_B^2 + 2a_B \cdot (40)$

Pero $\quad v_{fB} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2(40)a_B = 25 \times 25$

$\therefore \quad a_{B\min} = -7{,}8$ m/s²

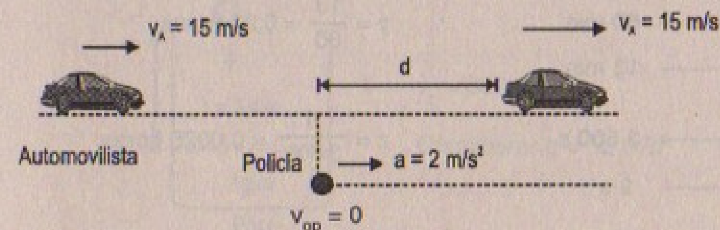
Parte (c)

$v_{fB} = v_B - a_B.t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{25}{7{,}8}$

$\therefore \quad t_{detenerse} = 3{,}2$ s

72. Una automovilista conduce por un camino recto a una velocidad constante de 15,0 m/s. Cuando pasa frente a un policía motociclista estacionado, éste empieza a acelerar a 2,00 m/s² para alcanzarla. Suponiendo que el policía mantiene esta aceleración, determine a) el tiempo que tarda el policía en alcanzar a la automovilista, encuentre b) la velocidad y c) el desplazamiento total del policía cuando alcanza a la automovilista.

Resolución :



Parte (a)

Automovilista $\quad d = 15t$

$\Rightarrow \quad t^2 = 15.t \quad \therefore \quad t = 15$ s

Policía: $\quad d = \dfrac{1}{2}(2)t^2$

Parte (b): $\quad v_{fp} = v_{ip} + at \quad \Rightarrow \quad v_{fp} = 0 + 2(15)$

$\therefore \quad v_{fp} = 30$ m/s

Parte (c): $\quad d_p = t^2 = (15)(15) = 225$ m

73. En 1987 Art Boileau ganó el maratón de Los Ángeles, de 26 millas y 385 yardas, en 2 h, 13 min y 9 s. a) Determine su velocidad promedio en metros por segundo y en millas por hora. b) En la marca de 21 mi, Boileau tenía una ventaja de 2,50 min sobre el ganador del segundo lugar, quien cruzó la meta 30,0 s después de Boileau. Suponga que éste mantuvo su velocidad promedio constante y que ambos corredores corrieron a la misma velocidad cuando Boileau rebasó la marca de 21 mi. Encuentre la aceleración promedio (en metros por segundo al cuadrado) que el corredor del segundo lugar tuvo durante el resto de la carrera después de que Boileau pasó la marca de 21 mi.

Resolución :

1 milla = 1 603 m

1 yarda = 0,91 m

Parte (a): 26 millas ≡ 26(1 609) = 41 834 m

385 yardas ≡ 385(0,91) = 350,35 m

2 horas ≡ 2 × (60) ≡ 120 min ≡ 120(60) = 7 200 s

13 min ≡ 13 × 60 = 780 s

9 s

$$V_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{41\ 834 + 350,35}{7\ 200 + 789} = 5,28 \text{ m/s}$$

En: millas/hora

1 yarda —— 0,91 m $\quad \therefore \quad x = \frac{41\ 834}{0,91} = 45\ 971$ yardas

x —— 41 834 m

1 hora —— 60 min $\quad \therefore \quad y = \frac{13}{60} = 0,22$ horas

y —— 13 min

1 hora —— 3 600 s $\quad \therefore \quad z = \frac{9}{3\ 600} = 0,0025$ horas

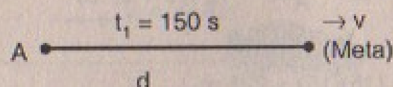
z —— 9 s

$$V_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45\ 971 + 385}{2 + 0,22 + 0,0025} = \frac{46\ 356}{2,2225}$$

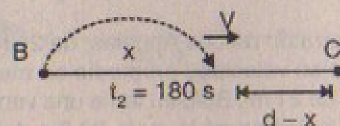
$$\therefore \quad V_{prom} = 20\ 857,6 \text{ yardas/hora}$$

Parte (b)

Boileau:



2.° lugar:



$d = 150v$

$x = v_B \cdot (150) + \frac{1}{2} a_B (150)^2$

$(d - x) = 30v \quad \Rightarrow \quad d - 30v = x$

Reemplazando:

$d = 21$ millas $= (1\ 609)(21) = 33\ 789$ m

$$\Rightarrow \quad \frac{33\ 789}{150} = v \quad \Rightarrow \quad v = 225,3 \text{ m/s}$$

Entonces:

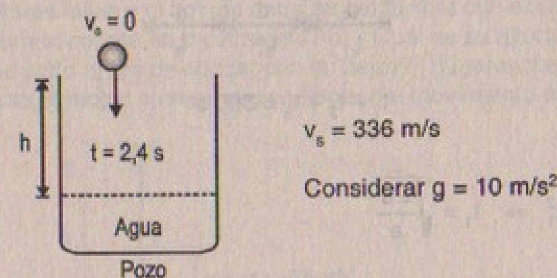
$$x = 33789 - 30(225,3) = 27\ 030 \text{ m}$$

$$a_{prom(2.^{\circ}\ lugar)} = \frac{-v}{30} = -\frac{225,3}{30}$$

$$\therefore \quad a_{prom.} = -7,51 \text{ m/s}^2$$

74. Una roca se deja caer desde el reposo dentro de un pozo. a) Si el sonido del contacto con el agua se oye 2,40 s después, ¿qué tan abajo de la parte superior del pozo está la superficie del agua? La velocidad del sonido en el aire (para la temperatura del aire de ese día) fue de 336 m/s. b) Si el tiempo de recorrido para el sonido se ignora, ¿qué porcentaje de error se introduce cuando se calcula la profundidad del pozo?

Resolución:



$v_s = 336$ m/s

Considerar $g = 10$ m/s²

Parte (a): $h = \frac{1}{2}(g)(2,4)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}(10)(2,4)^2$

$\therefore \quad h = 28,8$ m

Parte (b): $h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{v_S^2}{20} = \frac{336 \times 336}{20} = 5\ 644,8$ m

5 644,3 -------- 100%

28,8 -------- x

$$x = \frac{28,8 \times 100}{5\ 644,8} = 0,51\%$$

75. Un tren viaja por una vía recta entre las estaciones 1 y 2 que se muestran en la figura P2.75. El maquinista tiene la instrucción de iniciar desde el reposo en la estación 1, acelerar uniformemente entre A y B, desplazarse con velocidad uniforme entre B y C, y luego desacelerar uniformemente entre C y D (a la misma razón que entre A y B) hasta que el tren se detenga en la estación 2. Si todas las distancias AB, BC y CD son iguales, y si se requieren 5 min para viajar entre las dos estaciones, determine cuánto de este período de 5,00 min tarda el tren entre los puntos i) A y B, ii) B y C, y iii) C y D.

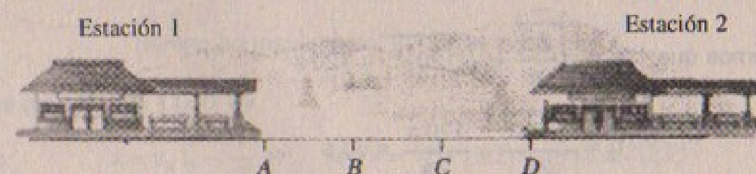
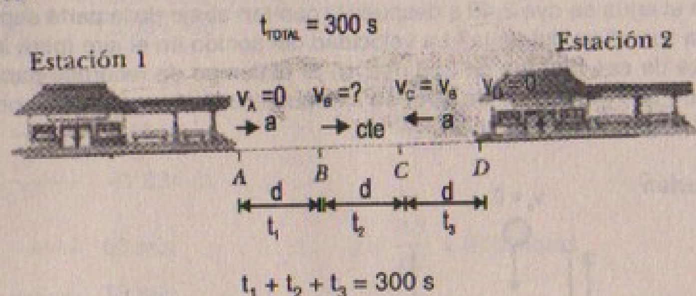


Figura P2.75

Resolución :



$$t_1 + t_2 + t_3 = 300 \text{ s}$$

Parte (a)

$$d = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

$$v_B = at_1$$

$$\therefore \; v_B = \sqrt{2da}$$

$$\overline{BC} = d = \sqrt{2ad}\,.\,t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{\sqrt{2ad}} = \frac{\sqrt{2ad}}{2a}$$

$$\overline{CD} = d = \frac{v_B{}^2}{2a} = \frac{a^2t_3^2}{2a} \quad \therefore \; t_3 = \sqrt{\frac{2d}{a}} =$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2d}{a}} + \sqrt{\frac{2d}{a}} + \frac{d}{\sqrt{2ad}} = 300$$

$$\frac{2\sqrt{2da}}{a} + \frac{\sqrt{2da}}{2a} = 300$$

$$\frac{5\sqrt{2da}}{2a} = 300 \Rightarrow \sqrt{2da} = 120a$$

$$\therefore \; 2da = (120)^2\, a^2$$

En consecuencia: $\dfrac{2d}{a} = (120)^2$

Sabemos que: $t_1 = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} = \sqrt{(120)^2} = 120\,\text{s}$

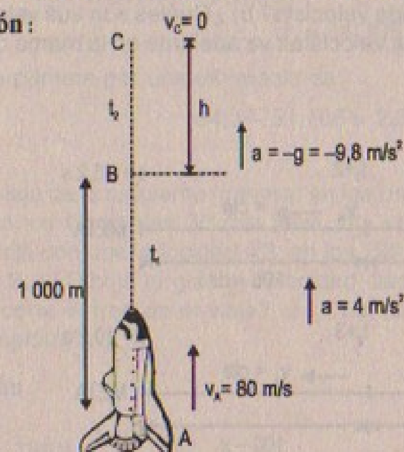
$$t_2 = \frac{\sqrt{2ad}}{2a} = \frac{120\,a}{2a} = 60 \text{ s}$$

$$t_3 = 300 - (t_1 + t_2) = 300 - 180 = 120 \text{ s}$$

Luego: Tiempo entre $\overline{AB}$ es t_1 = 120 s
Tiempo entre $\overline{BC}$ es t_2 = 60 s
Tiempo entre $\overline{CD}$ es t_3 = 120 s

76. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80,0 m/s. Se acelera hacia arriba a 4,00 m/s² hasta que alcanza una altura de 1000 m. En ese punto sus motores fallan y el cohete entra en caída libre con aceleración –9,80 m/s². a) ¿Cuánto dura el cohete en movimiento? b) ¿Cuál es su altura máxima? c) ¿Cuál es la velocidad justo antes de chocar con la Tierra? (Sugerencia: considere el movimiento mientras el motor opera independiente del movimiento en caída libre)

Resolución :



Parte (a)

Tiempo en movimiento = $2(t_1 + t_2)$

$$1\,000 = 80t_1 + 2t_1{}^2$$

$$\Rightarrow \quad t_1^2 + 40\,t_1 - 500 = 0$$

$$\therefore \; t_1 = 10 \text{ s}$$

Luego: $v_B = v_A + 4t_1 \Rightarrow v_B = 80 + 10(4)$

$$\therefore \; v_B = 120 \text{ m/s}$$

Por otro lado: $v_C = v_B - gt_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{120}{9{,}8} \approx 12{,}2$ s

Tiempo en movimiento: 2(12,2 + 10) = 44,4 s

Parte (b) $H_{máx} = 1\,000 + x$

Pero: $x = v_B\,t_2 - \dfrac{1}{2}\,gt^2{}_2 \Rightarrow x = 120(12{,}2) - \dfrac{1}{2}(9{,}8)(12{,}2)^2$

$$\therefore \; x = 734{,}7 \text{ m}$$

Luego: $H_{max} = 1\,000 + 734{,}7 = 1\,734{,}7$ m

Parte (c)

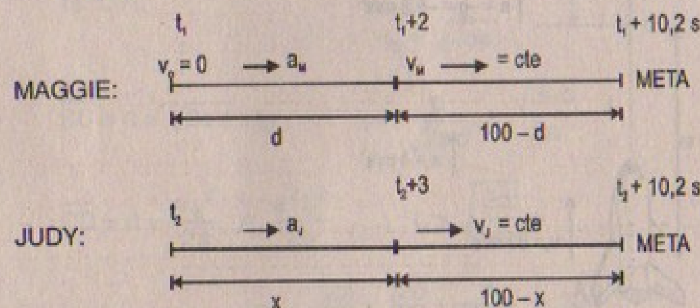
$$v_{fA}^2 = v_o^2 + 2gH_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad v_{fA}^2 = 0 + 2(9,8)(1\,734,7)$$

$$\therefore \quad V_{tierra} = 184,4 \text{ m/s}$$

77. En una carrera eliminatoria de 100 m, Maggie y Judy cruzan la meta con el mismo tiempo: 10,2 s. Acelerando uniformemente, Maggie tarda 2,00 s y Judie 3,00 s para alcanzar la velocidad máxima, la cual mantiene durante el resto de la competencia. a) ¿Cuál es la aceleración de cada velocista? b) ¿Cuáles son sus velocidades máximas respectivas? c) ¿Cuál de las velocistas va adelante en la marca de 6,00 s, y por qué distancia?

Resolución:



Parte (a)

Hallando la aceleración de Maggi:

$$v_M = 0 + 2a_M$$

$$(+)\begin{cases} d = 0 + \frac{1}{2}a_M(2)^2 = 2a_M \\ 100 - d = V_M(8,2) = 2a_M(8,2) = 16,4a_M \end{cases}$$

$$100 = 18,4a_M$$

$$\therefore \quad a_M = 5,43 \text{ m/s}^2$$

Hallando la aceleración de Judy:

$$v_J = 0 + 3a_J$$

$$(+)\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}a_J(3)^2 = 4,5a_J \\ 100 - x = v_J(7,2) = 3a_J(7,2) = 21,6a_J \end{cases}$$

$$100 = 26,1\,a_J$$

$$\therefore \quad a_J = 3,83 \text{ m/s}^2$$

Parte (b): $v_{MAGGI} = 2a_M = 2(5,43) = 10,86$ m/s

$v_{JUDY} = 3a_J = 3(3,83) = 11,49$ m/s

Parte (c) $t = 6$ s

$$d_M = d_M(t \to t + 2) + d_M(t + 2 + t + 6)$$

$$\Rightarrow \quad 2(5,43) + 10,86(4) = 54,3 \text{ m}$$

$$\therefore \quad d_M = 54,3 \text{ m}$$

$$d_J = d_J(t_1 \to t_1 + 3) + d_J(t_1 + 3 + t_1 + 6)$$

$$\Rightarrow \quad d_J = 4,5(3,83) + 3(11,49)$$

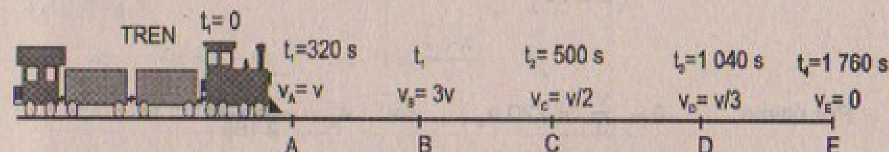
$$\therefore \quad d_J = 51,705 \text{ m}$$

Maggi va primera por una diferencia de:

$$54,3 - 51,705 = 2,595 \text{ m}$$

78. Un tren viaja de la siguiente manera: en los primeros 60 min se desplaza con velocidad v; en los siguientes 30 min lleva una velocidad de 3v; en los 90 min que le siguen viaja con una velocidad v/2; en los 120 min finales, se mueve con una velocidad de v/3. a) Dibuje la gráfica velocidad–tiempo para este recorrido. b) ¿Qué distancia recorre el tren en el viaje? c) ¿Cuál es la velocidad promedio del tren en el viaje completo?

Resolución:

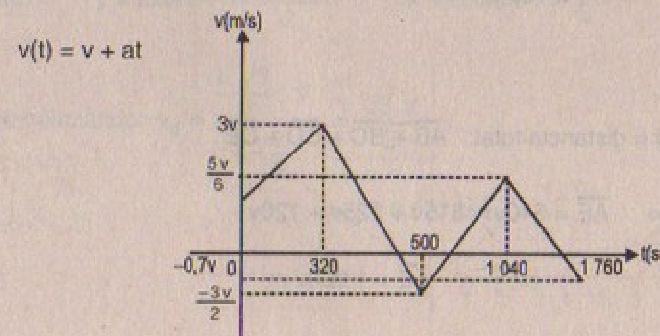


Parte (a)

$t_1 = 60$ min <> 320 s ; $t_2 = 30$ min <> 180 s

$t_3 = 90$ min <> 540 s ; $t_4 = 120$ min <> 720 s

$$v(t) = v + at$$



Sabemos: $(3v)^2 - v^2 = 2a_1\,(AB)$

Pero: $\dfrac{3v - v}{320} = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{v}{160}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{8v^2}{2a_1} = \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \dfrac{8v^2}{\dfrac{2v}{160}} \quad \therefore \; \overline{AB} = 640v$

Por otro lado: $\dfrac{v}{2} - 3v = 180\,a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\dfrac{v}{72}$

Luego: $\dfrac{(3v)^2 - \left(\dfrac{v}{2}\right)^2}{2\,\dfrac{v}{72}} = \overline{BC} \quad \therefore \; \overline{BC} = 315v$

Además: $\dfrac{v}{3} - \dfrac{v}{2} = 540\,a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\dfrac{v}{3\,240}$

Luego: $\dfrac{\left(\dfrac{v}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{v}{3}\right)^2}{2\left(\dfrac{v}{3\,240}\right)} = \overline{CD} \quad \therefore \; \overline{CD} = 225v$

Por último: $0 - \dfrac{v}{3} = 720\,a_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = -\dfrac{v}{2\,160}$

Entonces: $\dfrac{\left(\dfrac{v}{3}\right)^2}{2\left(\dfrac{v}{2\,160}\right)} = \overline{DE} \quad \therefore \; \overline{DE} = 120v$

Parte (b)

Espacio total = distancia total: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$

$\Rightarrow \quad \overline{AE} = 640v + 315v + 225v + 120v$

$\therefore \; \overline{AE} = 1\,300v$ m

Parte (c): $v_{promedio} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\overline{AE}}{t_{total}} = \dfrac{1\,300v}{1\,760}$

$\therefore \; v_{promedio} = \dfrac{65v}{88}$ m/s

79. Dos objetos A y B se conectan mediante una barra rígida de longitud L. Los objetos deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares, como se muestra en la figura P2.81. Si A se desliza hacia la izquierda con velocidad constante v, encuentre la velocidad de B cuando $\alpha = 60°$.

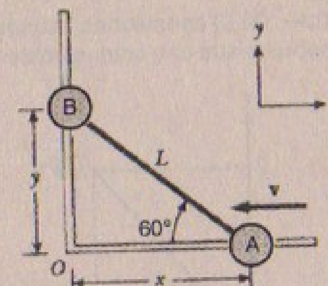


FIGURA P2.81

Resolución :

$-x_A(t) = L - vt$

$y_B(t) = v_B \cdot t$

$\Rightarrow \quad -x = L - vt \quad \therefore \; t = \dfrac{L + x}{v}$

$y = v_B \cdot t$

$\Rightarrow \quad v_B = \dfrac{y}{t} = \dfrac{y}{\dfrac{L+x}{v}} \quad \therefore \; v_B = \dfrac{y \cdot v}{L + x}$

Pero: $y = L\operatorname{sen}60° = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \qquad x = L\cos 60° = \dfrac{L}{2}$

Reemplazando: $v_B = \dfrac{\dfrac{L\sqrt{3}}{2} \cdot v}{L + \dfrac{L}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\,v}{3}$

$\therefore \; v_B = 0{,}577$ m/s

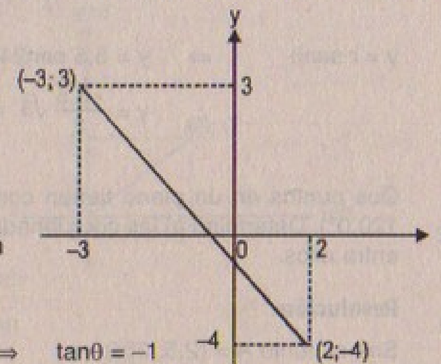
Capítulo 3

VECTORES

SISTEMAS DE COORDENADAS Y MARCOS DE REFERENCIA

1. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas (2,00; –4,00) m y (–3,00; 3,00) m. Determine a) la distancia entre estos puntos y b) sus coordenadas polares.

Resolución :



Parte (a)

$$D = \sqrt{(-3-2)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{74} = 8{,}6 \text{ m}$$

Parte (b)

Sea $A = (-3;3) \;\Rightarrow\; -3 = r\cos\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = -1$

$3 = r\,\text{sen}\theta \quad \therefore \quad \theta = 135°$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Luego: $A = (3\sqrt{2}\,;\,135°)$

Sea: $B = (2;-4) \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 4{,}5 \text{ m}$

$+2 = 4{,}5\cos\alpha$

$-4 = 4{,}5\,\text{sen}\alpha \;\Rightarrow\; \tan\alpha = -2 \quad \therefore \quad \alpha = \tan^{-1}(-2) = ?$

Luego: $B = (4{,}5\ \tan^{-1}(-2))$

2. Si las coordenadas rectangulares y polares de un punto son (2; y) y (r; 30°), respectivamente, determine "y" y r.

Resolución :

Dato (2, y) y (r, 30°) $\;2 = r\cos 30° \;\Rightarrow\; r = 4\sqrt{3}/3$

$$y = r\,\text{sen}30° \;\Rightarrow\; y = \frac{4\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego: $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. Las coordenadas polares de un punto son r = 5,50 m y θ = 240,0°. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

Resolución:

Dato: r = 5,5 m; θ = 240°

$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 5{,}5\cos 240° = -5{,}5\cos 60°$

$\therefore\; x = -5{,}5\left(\frac{1}{2}\right) = -2{,}75$

$y = r\,\text{sen}\theta \Rightarrow y = 5{,}5\,\text{sen}240° = -5{,}5\,\text{sen}60°$

$\therefore\; y = \frac{-5{,}5}{2}\sqrt{3} = -2{,}75\sqrt{3}$

4. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2,50 m; 30,0°) y (3,80 m, 120,0°). Determine a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y b) la distancia entre ellos.

Resolución:

Sea el punto A = (2,5; 30°)
Sea el punto B = (3,8; 120°)

Parte (a)
Hallando «A»:

$x = 2{,}5\cos 30° \Rightarrow x = 2{,}5\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}25\sqrt{3}$

$y = 2{,}5\,\text{sen}30° \Rightarrow y = 2{,}5\,\frac{1}{2} = 1{,}25$

$\therefore\; A = (x, y) = (1{,}25\sqrt{3}\,;\,1{,}25)$

Hallando «B»:

$x = 3{,}8\cos 120° \Rightarrow x = 8{,}8\,\text{sen}30°$

$\therefore\; x = -3{,}8 \times \frac{1}{2} = -1{,}9$

$y = 3{,}8\,\text{sen}120° \Rightarrow y = +3{,}8\cos 30° = 3{,}8\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\; y = 1{,}9\sqrt{3}$

Luego $B = (x; y) = (3{,}8\sqrt{3}/2\,;\,1{,}9\sqrt{3})$

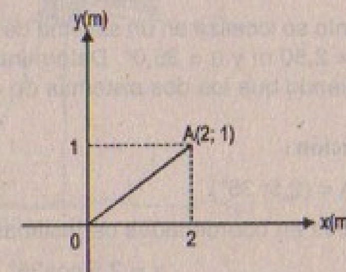
Parte (b)

$D_{(A;B)} = \sqrt{(1{,}25\sqrt{3} - 3{,}8\sqrt{3}/2)^2 + (1{,}25 - 1{,}9\sqrt{3})^2}$

$\therefore\; D_{(A;B)} = 2{,}33$

5. Cierta esquina de un cuarto se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Una mosca se mueve lentamente en una pared adyacente a uno de los ejes. Si la mosca se ubica en un punto que tiene coordenadas (2,00; 1,00) m, a) ¿a qué distancia se encuentra de la esquina del cuarto? b) ¿cuál es la posición en coordenadas polares?

Resolución:



Parte (a)

$D_{(OA)} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ m

Parte (b)

$x = r\cos\theta \Rightarrow 2 = \sqrt{5}\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\theta \Rightarrow 1 = \sqrt{5}\,\text{sen}\theta$

$\therefore\; \tan\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \frac{53°}{2}$

Luego las coordenadas polares de la mosca será: $(\sqrt{5}\;;\;53°/2)$

6. Si las coordenadas polares del punto (x;y) son (r; θ), determine las coordenadas polares para los puntos: a) (–x; y), b) (–2x; –2y) y c) (3x; –3y).

Resolución:

Por dato: (x; y) → (r; θ)
Asumiendo r = 2 y θ = 30°

Parte (a) $x = 2\cos 30° \Rightarrow -x = -2\cos 30° = -\sqrt{3}$

$y = 2\,\text{sen}30° \Rightarrow y = 1$

$\therefore\; (x; -y) = (-\sqrt{3}\,;\,1)$

Parte (b) $x = 2\cos 30° \Rightarrow -2x = -4\cos 30° = -2\sqrt{3}$

$y = 2\,\text{sen}30° \Rightarrow -2y = -4\,\text{sen}30° = -2$

$\therefore\; (-2x; -2y) = (-2\sqrt{3}\,;\,-2)$

Parte (c) $x = 2\cos30°$ $\Rightarrow$ $3x = 6\cos30° = 3\sqrt{3}$

$y = 2\text{sen}30°$ $\Rightarrow$ $-3y = -6\text{ sen}30° = -3$

$\therefore\ (3x; -3y) = \left(3\sqrt{3}; -3\right)$

Reemplazando:

Las coordenadas en (a) serán: $(r; \pi/2 + \theta)$

Las coordenadas en (b) serán: $(2r; \theta)$

Las coordenadas en (c) serán: $(3r; \pi/2 + \theta)$

7. Un punto se localiza en un sistema de coordenadas polares mediante las coordenadas $r = 2{,}50$ m y $\theta = 35{,}0°$. Determine las coordenadas cartesianas de este punto, suponiendo que los dos sistemas de coordenadas tienen el mismo origen.

Resolución:

Sea: $A = (2{,}5; 35°)$

Entonces en coordenadas cartesianas será:

$x = 2{,}5\cos35°$ $\qquad$ $y = 2{,}5\text{ sen}35°$

Pero: $\text{sen}35° \approx 0{,}585$

$\cos35° \approx 0{,}811$

Luego: $x = 2{,}5\,(0{,}811) = 2{,}03$

$y = 2{,}5\,(0{,}585) = 1{,}46$

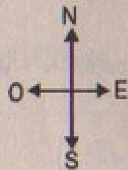
CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES

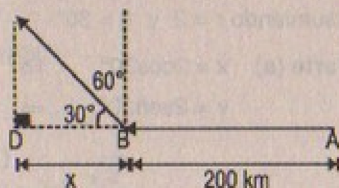
8. Un avión vuela 200 km rumbo al oeste desde la ciudad A hasta la ciudad B y después 300 km en la dirección de 30° al noroeste de la ciudad B hasta la ciudad C. a) En línea recta, ¿qué tan lejos está la ciudad C de la ciudad A? b) Respecto de la ciudad A, ¿en qué dirección está la ciudad C?

Resolución:

$|\vec{AB}| = 200$ km

$|\vec{BC}| = 300$ km





$$x = DB = |\vec{BC}|\cos30° = 300\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \approx 259{,}8 \text{ km}$$

Parte (a)

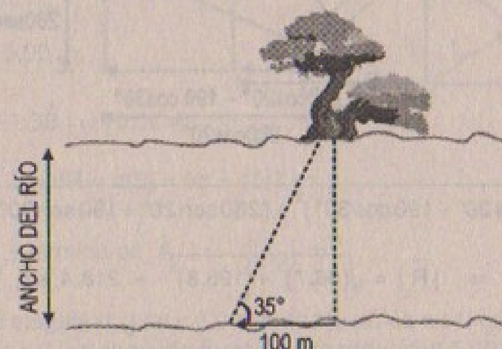
Nos piden: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = 259{,}8 \text{ km} + 200 \text{ km} = 459{,}8 \text{ km}$

Parte (b)

Está en la dirección 30° oeste del norte.

9. Una topógrafa calcula el ancho de un río mediante el siguiente método: se para directamente frente a un árbol en el lado opuesto y camina 100 m a lo largo de la rivera del río, después mira el árbol. El ángulo que forma la línea que parte de ella y termina en el árbol es de 35,0°. ¿Cuál es el ancho del río?

Resolución:



Tenemos que: $\tan35° = \dfrac{\text{ANCHO DEL RÍO}}{100}$

$\Rightarrow$ ANCHO DEL RÍO $= \tan(35°) \times 100 = (0{,}700) \times 100$

$\therefore$ ANCHO DEL RÍO = 70 m

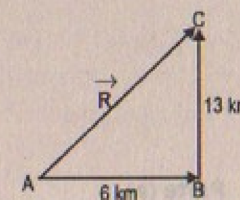
10. Un peatón camina 6,00 km al este y después 13,0 km al norte. Con el método gráfico determine la magnitud y la dirección del vector desplazamiento resultante.

Resolución:

$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$|\vec{R}| = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205} \approx 14{,}32$ km

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{13}{6} = 2{,}2$ $\qquad\therefore\ \theta = \text{arc tan}(2{,}2)$

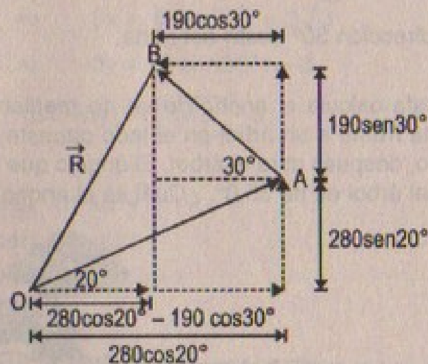


11. Un avión vuela desde su campamento base hasta el lago A, a una distancia de 280 km en dirección de 20,0° al noreste. Después de dejar caer provisiones, vuela hacia el lagc B, ubicado a 190 km y 30,0° al noroeste del lago A. Determine gráficamente la dis.ancia y la dirección del lago B al campamento base.

Resolución :

$|\vec{AB}| = 190$ km

$|\vec{OA}| = 280$ km



$$|\vec{R}| = \sqrt{(280\cos 20° - 190\cos 30°)^2 + (280\,\text{sen}\,20° + 190\,\text{sen}30°)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = \sqrt{(96{,}7)^2 + (195{,}8)^2} \approx 218{,}4 \text{ km}$$

Dirección:

$$\tan\theta = -\frac{(190\,\text{sen}30° + 280\,\text{sen}\,20°)}{280\cos 20° - 190\cos 30°} = \frac{-195{,}8}{96{,}696} = -2{,}025$$

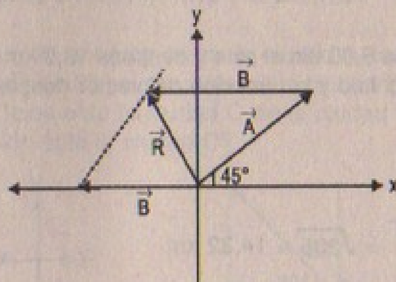
$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(-2{,}025)$$

12. El vector A tiene una magnitud de 8,00 unidades y con el eje x positivo forma un ángulo de 45,0°. El vector B también tiene una magnitud de 8,00 unidades y está dirigido a lo largo del eje x negativo. Con los métodos gráficos encuentre a) el vector suma A + B, y b) el vector diferencia A – B.

Resolución :

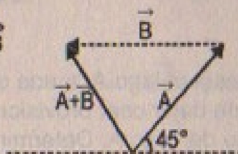
$|\vec{A}| = 8$

$|\vec{B}| = 8$

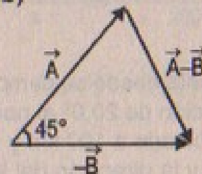


Parte (a)

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



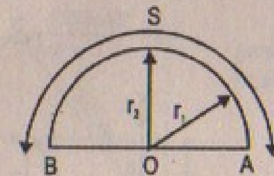
Parte (b)



13. Una persona camina por una trayectoria circular de radio 5,00 m, alrededor de la mitad de un círculo. a) Encuentre la magnitud del vector desplazamiento. b) ¿Qué distancia camina la persona? c) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento si la persona camina todo el recorrido alrededor de un círculo?

Resolución :

Parte (a)



$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 5{,}00$ m

$|\Delta\vec{r}| = |\vec{OA}| + |\vec{OB}| = 10{,}00$ m

Parte (b) $S = \theta R = \pi(5) = 5\pi = 15{,}7$ m

Parte (c)

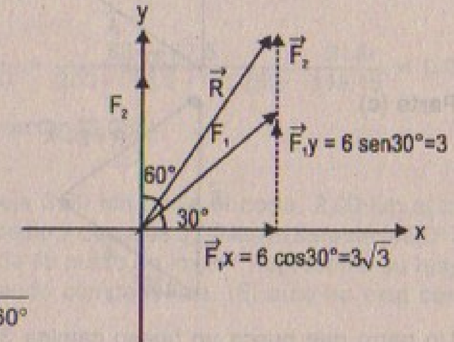
Si empieza en A y termina en A $\Rightarrow$ $|\Delta r| = 0$

14. Una fuerza F_1 de magnitud igual a 6,00 unidades actúa en el origen en una dirección 30,0° sobre el eje x. Una segunda fuerza F_2 de magnitud 5,00 unidades actúa en el origen en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y dirección de la fuerza resultante $F_1 + F_2$.

Resolución :

$|\vec{F}_1| = 6$ u

$|\vec{F}_2| = 5$ u



$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 . F_2 \cos 60°}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = \sqrt{36 + 25 + 2(6)(5)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{91}$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = 9{,}54 \text{ m}$$

Dirección: $$\tan\theta = \frac{|\vec{F}_2| + |\vec{F}_{1y}|}{|\vec{F}_{1x}|} = \frac{5+3}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1{,}54$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(1{,}54)$$

15. Cada uno de los vectores de desplazamiento A y B mostrados en la figura P3.15 tiene una magnitud de 3,00 m. Determine gráficamente a) A + B, b) A – B, c) B – A y d) A – 2B.

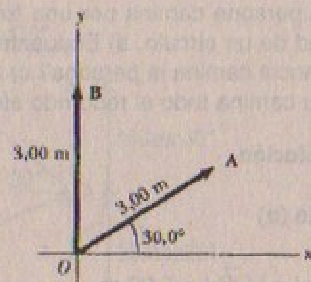
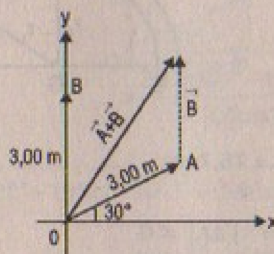


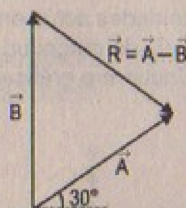
FIGURA P3.15

Resolución:

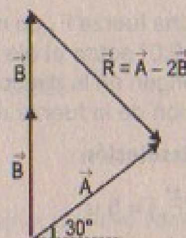
Parte (a)



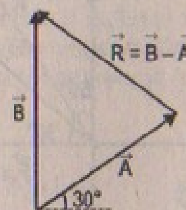
Parte (b)



Parte (d)

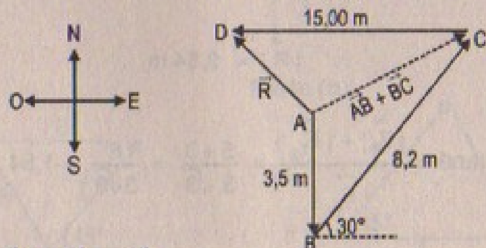


Parte (c)



16. Un perro que busca un hueso camina 3,5 m hacia el sur, después 8,2 m en un ángulo de 30° al noreste y finalmente 15 m al oeste. Encuentre el vector de desplazamiento resultante del perro utilizando técnicas gráficas.

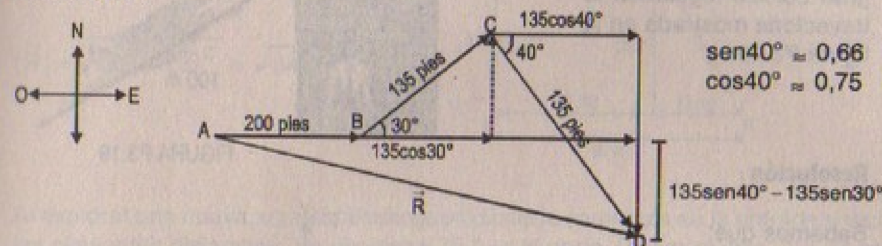
Resolución:



$$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

17. Una montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y después viaja 135 pies en un ángulo de 30,0° sobre la horizontal. Luego recorre 135 pies en un ángulo de 40,0° abajo de la horizontal. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida? Utilice técnicas gráficas.

Resolución:



$$\therefore \quad \vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(200 + 135\cos 30° + 135\cos 40)^2 + (135\,\text{sen}\,40° - 135\,\text{sen}\,30°)^2}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = \sqrt{(200 + 116{,}9 + 101{,}25)^2 + (89{,}1 - 67{,}5)^2}$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = 418{,}7 \text{ pies}$$

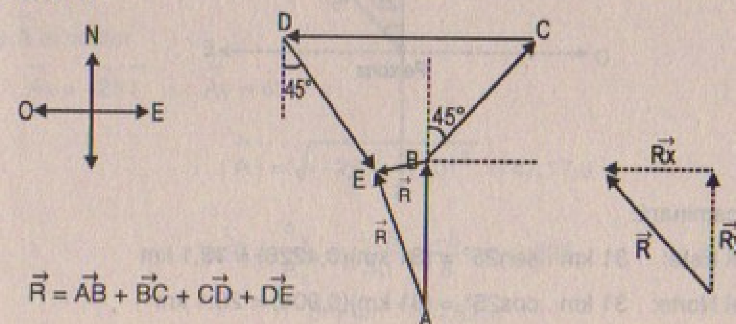
Dirección:

$$\tan\theta = \frac{135\,\text{sen}(40°) - 135\,\text{sen}\,30°}{200 + 135\cos 30 + 135\cos 40} = \frac{89{,}1 - 67{,}5}{200 + 116{,}9 + 101{,}25} = \frac{21{,}6}{418{,}15} = 0{,}052$$

$$\therefore \quad \theta = \arctan(0{,}052)$$

18. El conductor de un automóvil maneja 3,00 km hacia el norte, 2,00 km al noreste (45,0° al este del norte), 4,00 km al oeste y después 3,00 km al sureste (45,0° al este del sur). ¿Dónde termina respecto de su punto de inicio? Represente su respuesta en forma gráfica. Compruébela usando componentes. (El auto no está cerca del Polo Norte o del Polo Sur.)

Resolución:



$$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$$

19. Encuentre las componentes horizontal y vertical del desplazamiento de 100 m de un superhéroe que vuela desde la azotea de un gran edificio siguiendo la trayectoria mostrada en la figura P3.19.

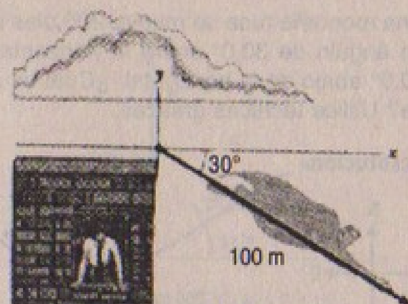
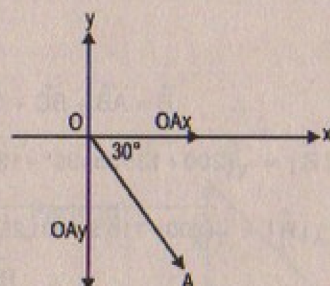


FIGURA P3.19

Resolución:

Sabemos que:

$|\vec{OA}| = 100$ m

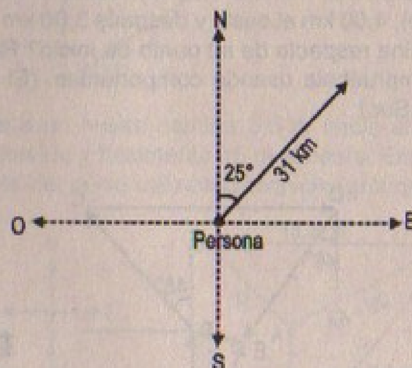


$$\Rightarrow \quad |\vec{OA_x}| = |\vec{OA}|\cos 30° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

$$|\vec{OA_y}| = |\vec{OA}|\operatorname{sen} 30° = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ m}$$

20. Una persona camina 25,0° al norte del este, recorriendo 3,10 km. ¿Cuánto tendría que caminar hacia el norte y hacia el este para llegar al mismo sitio?

Resolución:



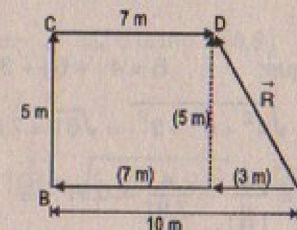
Luego caminará:

Hacia el Este: 31 km . sen25° = (31 km)(0,4226) = 13,1 km

Hacia el Norte: 31 km . cos25° = (31 km)(0,906) = 28,1 km

21. Indiana Jones está atrapado en un laberinto. Para encontrar la salida camina 10 m, da un giro de 90° a la derecha y camina 5,0 m, efectúa otro giro de 90° a la derecha camina 7,0 m. ¿Cuál es el desplazamiento desde su posición inicial?

Resolución:



$$|\vec{R}| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34} = 5{,}83 \text{ m}$$

22. Al explorar una cueva, una espeleóloga aficionada comienza en la entrada y recorre las siguientes distancias. Se desplaza 75,0 m al norte, 250 m al este, 125 m en un ángulo de 30,0° al norte del este y 150 m al sur. Encuentre el desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

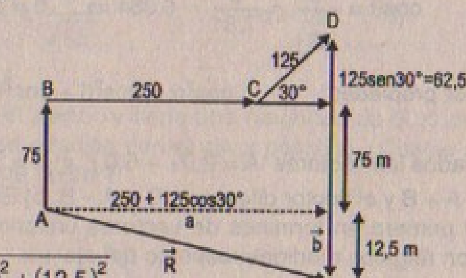
Resolución:

$|\vec{AB}| = 75$ m

$|\vec{BC}| = 250$ m

$|\vec{CD}| = 125$ m

$|\vec{DE}| = 150$ m



$$|\vec{R}| = \sqrt{(250 + 125\cos 30°)^2 + (12{,}5)^2}$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = 358{,}52 \text{ m}$$

COMPONENTES DE UN VECTOR Y VECTORES UNITARIOS

23. Un vector tiene una componente x de –25,0 unidades y una componente y de 40,0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

Resolución:

Sea $\vec{A}$ el vector

$$\Rightarrow \quad \vec{A}x = -25\,\vec{i} \quad \wedge \quad \vec{A}y = 40\,\hat{j}$$

$$\therefore \quad |\vec{A}| = \sqrt{(-25)^2 + (40)^2} = 47{,}17 \text{ u}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-25}{40} = \frac{-5}{8} = -0{,}625$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(-0{,}625)$$

24. Las componentes x, y, z del vector B son de 4,00, 6,00 y 3,00 unidades, respectivamente. Calcule la magnitud de B y los ángulos que forma B con los ejes de coordenadas.

Resolución :

Sabemos que: $\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$\Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81\ u$

$\cos\alpha = \dfrac{4}{|\vec{B}|} = \dfrac{4}{7{,}81} = 0{,}51 \Rightarrow \quad \alpha = \text{arc cos}\ (0{,}51)$

$\cos\beta = \dfrac{6}{|\vec{B}|} = \dfrac{6}{7{,}81} = 0{,}768 \Rightarrow \quad \beta = \text{arc cos}\ (0{,}768)$

$\cos\theta = \dfrac{3}{|\vec{B}|} = \dfrac{3}{7{,}81} = 0{,}384 \Rightarrow \quad \theta = \text{arc cos}\ (0{,}384)$

Por propiedad: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$

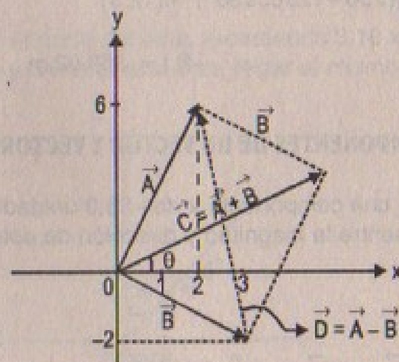
25. Dados los vectores $A = 2{,}0\hat{i} + 6{,}0\hat{j}$ y $B = 3{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j}$, a) dibuje el vector suma C = A + B y el vector diferencia D = A – B. b) Encuentre soluciones analíticas para C y D primero en términos de vectores unitarios y después en coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje + x.

Resolución :

Parte (a)

$\vec{A} = 2\hat{i} + 6\hat{j}$;

$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$



Parte (b)

$\vec{A} = \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$; $|\vec{C}| = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2}$

$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y$ $\therefore$ $|\vec{C}| = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$

$\vec{C}_x = 5\hat{i} \ \wedge\ \vec{C}_y = 4\hat{j}$

$\vec{C}_x = |\vec{C}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}} \quad \therefore \tan\theta = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$\vec{C}_y = |\vec{C}|\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{4}{\sqrt{41}} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0{,}8)$

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{D} = -1\hat{i} + 8\hat{j} \longrightarrow |\vec{D}| = \sqrt{(-1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65}$

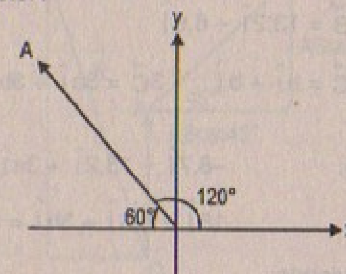
$\Rightarrow \quad \vec{D}_x = -1\hat{i} \ \wedge\ \vec{D}_y = 8\hat{j}$

$\vec{D}_x = |\vec{D}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{65}} \quad \therefore \quad \tan\alpha = -8$

$\vec{D}_y = |\vec{D}|\text{sen}\alpha \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{65}} \quad \therefore \quad \alpha = \tan^{-1}(-8)$

26. Un vector de desplazamiento en el plano xy tiene una magnitud de 50,0 m y está dirigido en un ángulo de 120,0° en relación con el eje x positivo. ¿Cuáles son las componentes rectangulares de este vector?

Resolución :



$|\vec{A}| = 50{,}0\ m$

$\vec{A}_y = |A|\text{sen}60° = 50 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\ m$

$\vec{A}_x = |A|\cos60° = 50 \cdot \dfrac{1}{2} = 25\ m$

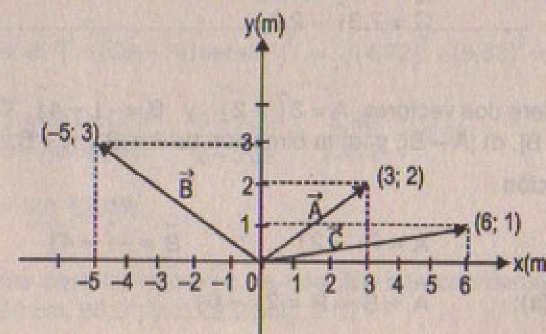
27. Determine la magnitud y dirección de la resultante de tres desplazamientos que tienen componentes rectangulares (3,00; 2,00) m, (–5,00; 3,00) m y (6,00; 1,00) m.

Resolución :

$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$;

$\vec{B} = -5\hat{i} + 3\hat{j}$;

$\vec{C} = 6\hat{i} + \hat{j}$



$\Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3\hat{i} + 2\hat{j}) + (-5\hat{i} + 3\hat{j}) + (6\hat{i} + \hat{j})$

$\Rightarrow \quad \vec{R} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$

$\therefore \quad |\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ m

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(1{,}5)$

28. El vector A tiene componentes xy de –8,7 cm y 15 cm, respectivamente; el vector B tiene componentes xy de 13,2 cm y –6,6 cm, respectivamente. Si A – B + 3C = 0, ¿cuáles son las componentes de C?

Resolución:

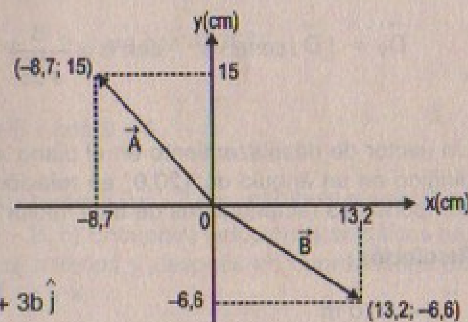
Por dato:

$A - B + 3C = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{A} = -8{,}7\hat{i} + 15\hat{j}$

$\vec{B} = 13{,}2\hat{i} - 6{,}6\hat{j}$

$\vec{C} = a\hat{i} + b\hat{j} \qquad 3\vec{C} = 3a\hat{i} + 3b\hat{j}$



Luego: $-8{,}7\hat{i} - 13{,}2\hat{i} + 3a\hat{i} = 0\hat{i}$ ... (1)

$15\hat{j} - 6{,}6\hat{j} + 3b\hat{j} = 0\hat{j}$ ... (2)

Resolviendo:

(1) : $3a = 21{,}9 \Rightarrow a = 7{,}3$

2) : $3b = -8{,}4 \Rightarrow b = -2{,}8$

Luego: $\vec{C} = 7{,}3\hat{i} - 2{,}8\hat{j}$

29. Considere dos vectores $A = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ y $B = -\hat{i} - 4\hat{j}$. Calcule a) A + B, b) A – B, c) |A + B|, d) |A – B|, y e) la dirección de A + B y A – B.

Resolución:

Sea: $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} \quad ; \quad \vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j}$

Parte (a): $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = 2\hat{i} - 6\hat{j}$

Parte (b): $\vec{A} - \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - (-\hat{i} - 4\hat{j}) = 4\hat{i} + 2\hat{j}$

Parte (c): $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 6{,}32$

Parte (d): $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$

Parte (e):

$\tan\theta : \dfrac{-6}{2} = -3 \Rightarrow \theta =$ la dirección de $\vec{A} + \vec{B} = \tan^{-1}(-3)$

$\tan\alpha : \dfrac{2}{4} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha =$ la dirección de $\vec{A} - \vec{B} = \tan^{-1}(0{,}5)$

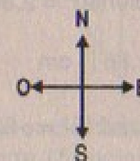
30. Un muchacho corre 3,0 cuadras al norte, 4,0 cuadras al noreste y 5,0 cuadras al oeste. Determine la longitud y dirección del vector desplazamiento que va del punto de partida hasta su posición final.

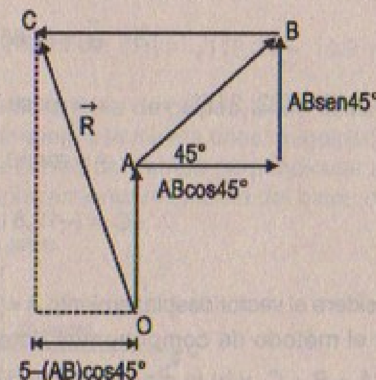
Resolución:

$|\vec{OA}| = 3$ cuadras ;

$|\vec{AB}| = 4$ cuadras ;

$|\vec{BC}| = 5$ cuadras





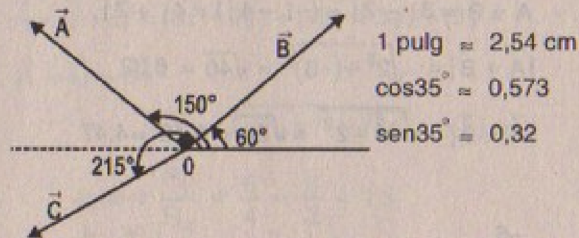
$|\vec{R}| = \sqrt{(5 - AB\cos 45°)^2 + (OA + AB\,\text{sen}\,45°)^2} = \sqrt{(4{,}72)^2 + (5{,}83)^2} \approx 7{,}5$ cuadras

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{3 + AB\,\text{sen}\,45°}{5 - AB\cos 45°} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}} = \dfrac{5{,}83}{2{,}172} \approx 2{,}68$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(2{,}68)$

31. Obtenga expresiones para los vectores de posición con coordenadas polares a) 12,8 m, 150°; b) 3,30 cm, 60,0°, y c) 22,0 pulg, 215°.

Resolución :



1 pulg ≈ 2,54 cm

$\cos 35^\circ \approx 0{,}573$

$\text{sen}35^\circ \approx 0{,}32$

$|\vec{A}| = 12{,}8$ m ; $|\vec{B}| = 3{,}30$ cm ; $|\vec{C}| = 22$ pulg

$|\vec{A}| = (r, \theta)$ Pero $x = r\cos\theta = 12{,}8\cos(150^\circ) = 12{,}8 \times \left(-\sqrt{3}/2\right) = -11{,}09$

$= (12{,}8\ ;\ 150^\circ)$; $y = r\text{sen}\theta = 12{,}8\text{sen}(150^\circ) = 12{,}8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) = 6{,}4$

$\therefore\ \vec{A} = -11{,}09\,\hat{i} + 6{,}4\,\hat{j}\ \text{m}$

$\vec{B} = (r;\theta) = (3{,}3;\ 60^\circ) \Rightarrow\ x = r\cos\theta = 3{,}3\cos 60^\circ = 1{,}65$

$y = r\text{sen}\theta = 3{,}3\text{sen}60^\circ = 2{,}86$

$\therefore\ \vec{B} = (1{,}65\,\hat{i} + 2{,}86\,\hat{j})\ \text{cm}$

$\vec{C} = (r;\theta) = (22;\ 215^\circ) \Rightarrow\ x = r\cos\theta = 22\cos 215^\circ = -22\cos(35^\circ) \approx -12{,}6$

$y = r\text{sen}\theta = 22\text{sen}215^\circ = -22\text{sen}35^\circ \approx -18{,}04$

$\therefore\ \vec{C} = (-12{,}6\,\hat{i} - 18{,}04\,\hat{j})\ \text{pulg.}$

32. Considere el vector desplazamiento $A = (3\hat{i} + 3\hat{j})$ m; $B = (\hat{i} - 4\hat{j})$ m y $C = (-2\hat{i} + 5\hat{j})$ m. Con el método de componentes determine a) la magnitud y dirección del vector $D = A + B + C$, y b) la magnitud y la dirección de $E = -\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$.

Resolución :

$\vec{A} = (3\hat{i} + 3\hat{j})\ \text{m}$; $\vec{B} = (\hat{i} - 4\hat{j})\text{m}$; $\vec{C} = (-2\hat{i} + 5\hat{j})\text{m}$

Parte (a)

$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow\ \vec{D} = (3\hat{i} + \hat{i} - 2\hat{i}) + (3\hat{j} - 4\hat{j} + 5\hat{j})$

$\therefore\ \vec{D} = 2\hat{i} + 4\hat{j} \Rightarrow |\vec{D}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ \text{m}$

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2)$

Parte(b)

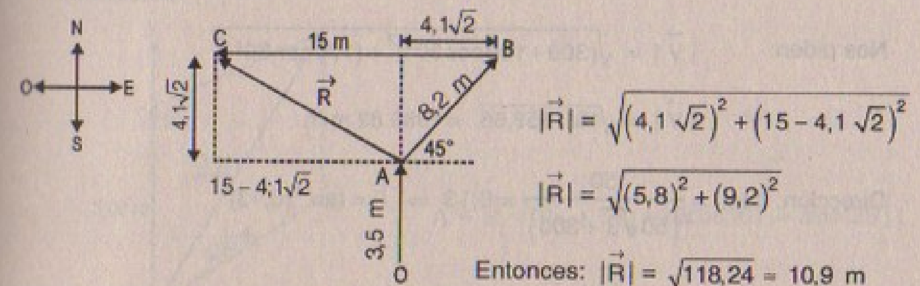
$\vec{E} = -\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = (-3\hat{i} - 3\hat{j}) + (-\hat{i} + 4\hat{j}) + (-2\hat{i} + 5\hat{j})$

$\Rightarrow\ \vec{E} = -6\hat{i} + 6\hat{j}$ $\therefore\ |\vec{E}| = 6\sqrt{2}\ \text{m}$

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{6}{-6} = -1$ $\therefore\ \theta = \tan^{-1}(-1) = 135^\circ$

33. Una partícula efectúa los siguientes desplazamientos consecutivos: 3,50 m al sur, 8.20 m al noreste y 15,0 m al oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

Resolución :



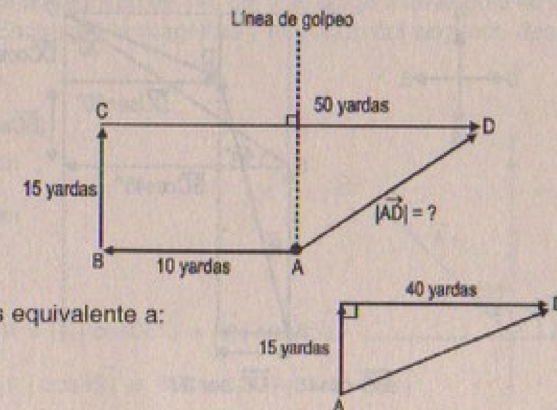
$|\vec{R}| = \sqrt{\left(4{,}1\sqrt{2}\right)^2 + \left(15 - 4{,}1\sqrt{2}\right)^2}$

$|\vec{R}| = \sqrt{(5{,}8)^2 + (9{,}2)^2}$

Entonces: $|\vec{R}| = \sqrt{118{,}24} = 10{,}9\ \text{m}$

34. Un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo, corre hacia atrás 10 yardas y después recorre 15 yardas en paralelo a la misma línea de golpeo. En este punto, lanza un pase recto de 50 yardas dentro del campo perpendicular a la línea de golpeo. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón de fútbol?

Resolución :



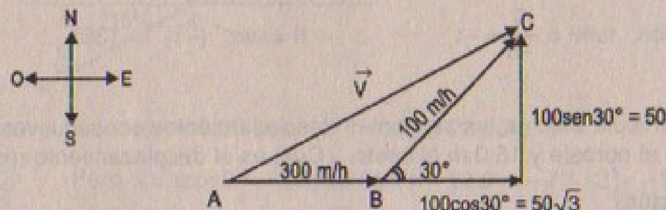
El sistema es equivalente a:

Entonces: $|\overline{AD}| = \sqrt{(15\,\text{yardas})^2 + (40\,\text{yardas})^2}$

$\therefore\ |\overline{AD}| = 42{,}72$ yardas

35. Un avión jet comercial que se mueve inicialmente a 300 mph hacia el este se mueve dentro de una región donde el viento sopla a 100 mph en una dirección de 30,0° al norte del este. ¿Cuáles son las nuevas velocidad y dirección de la aeronave?

Resolución :



Nos piden: $|\vec{V}| = \sqrt{(300+100\cos 30°)^2+(100\,\text{sen}\,30°)^2}$

$\Rightarrow \quad |\vec{V}| = \sqrt{151\ 959{,}56} \approx 389{,}82\ \text{m/h}$

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{50}{\left(50\sqrt{3}+300\right)} = 0{,}13 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0{,}13)$

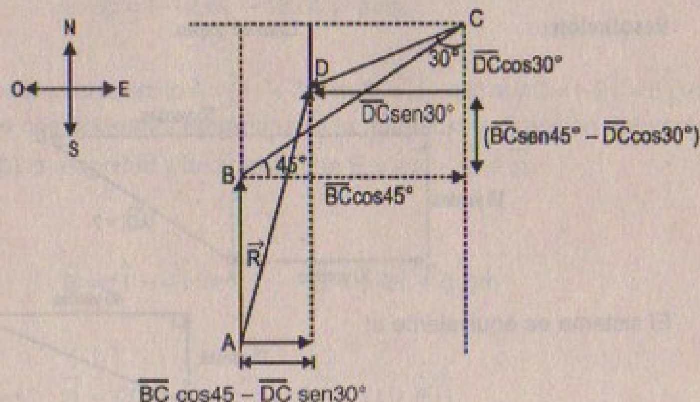
36. Un golfista novato necesita tres golpes para hacer un hoyo. Los desplazamientos sucesivos son 4,00 m hacia el norte, 2,00 m al noreste y 1,00 m 30.0° al oeste del sur. Si empezará en el mismo punto inicial, ¿cuál sería el desplazamiento más sencillo que un golfista experto necesitaría para hacer el hoyo?

Resolución :

$|\vec{AB}| = 4$ m

$|\vec{BC}| = 2$ m

$|\vec{CD}| = 1$ m



Según el gráfico:

$$|\vec{R}| = \sqrt{\left(|\vec{BC}|\cos 45° - |\vec{DC}|\,\text{sen}30°\right)^2 + \left(|\vec{AB}| + |\vec{BC}|\,\text{sen}\,45° - |\vec{DC}|\cos 30°\right)^2}$$

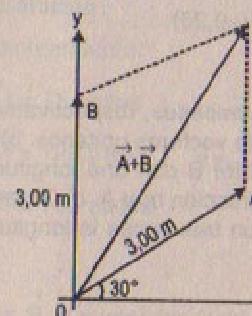
Pero: $|\vec{BC}|\cos45° - |\vec{DC}|\text{sen}30° = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = 0{,}91$

$|\vec{AB}| + |\vec{BC}|\ \text{sen}\ 45° - |\vec{DC}|\cos30° = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 4{,}55$

$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = \sqrt{(0{,}91)^2+(4{,}55)^2} = \sqrt{21{,}5306} \approx 4{,}64\ \text{m}$

37. Encuentre las componentes x e y de los vectores A y B mostrados en la figura P3.15. Deduzca una expresión para el vector resultante A + B en notación de vectores unitarios.

Resolución :



$\vec{A} + \vec{B} = (0\hat{i} + 3\hat{j}) + (3\cos30\,\hat{i} + 3\text{sen}30\,\hat{j})$

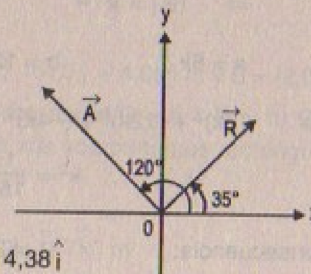
$\vec{A} + \vec{B} = 1{,}5\sqrt{3}\ \hat{i} + (1{,}5+3)\hat{j} = 2{,}6\hat{i} + 4{,}5\hat{j}$

38. Una partícula lleva a cabo dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120,0° con el eje x positivo.El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35,0° respecto del eje x positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

Resolución :

$|\vec{R}| = 140$ cm ;

$|\vec{A}| = 150$ cm



$\vec{R} = |\vec{R}|\cos35°\,\hat{i} + |\vec{R}|\ \text{sen}35\,\hat{j}$

Pero: $|\vec{R}|\cos35\,\hat{i} = 140\times0{,}817\,\hat{i} = 114{,}38\,\hat{i}$

$|\vec{R}|\ \text{sen}35\,\hat{j} = 140\times0{,}576\,\hat{j} = 80{,}64\,\hat{j}$

Sea: $B = a\hat{i} + b\hat{j}$ Sabemos que: $\vec{A} = -150\cos60\,\hat{i} + 150\text{sen}60\,\hat{j}$

Luego: $\vec{R}_x = \vec{A}_x + Bx$ $\quad\therefore\quad \vec{A} = -75\hat{i} + 129{,}9\hat{j}$

$\vec{R}_y = \vec{A}_y + By$

$\Rightarrow \quad 114{,}38\hat{i} = (a - 75)\hat{i} \quad \Rightarrow \quad a = 114{,}38 + 75 \quad \therefore \quad a = 189{,}4$

$\wedge \quad 80{,}64\hat{j} = (129{,}9 + b)\hat{j} \Rightarrow \quad b = 80{,}64 - 129{,}9 \quad \therefore \quad b = -49{,}26$

En consecuencia: $\vec{B} = 189{,}4\hat{i} - 49{,}26\hat{j}$

Luego: $|\vec{B}| = \sqrt{(189{,}4)^2 + (-49{,}26)^2} = \sqrt{38\,298{,}9907} = 195{,}7$ cm

Dirección: $\tan\theta = -\dfrac{49{,}26}{189{,}4} = 0{,}26 \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(-0{,}26)$

39. El vector A tiene componentes x; y; z de 8,12 y –4 unidades, respectivamente. a) Escriba una expresión vectorial para A en notación de vectores unitarios. b) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector B con una longitud de un cuarto de la longitud de A, apuntando en la misma dirección que A. c) Obtenga una expresión de vectores unitarios para un vector C con tres veces la longitud de A, apuntando en la dirección opuesta a la de A.

Resolución:

Por dato. $\vec{A} = (3; 12; -4)$ u

Parte (a) $\vec{A} = 8\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}$

Parte (b) $|\vec{A}| = \sqrt{8^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

$\Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{14} \quad \therefore \quad \vec{B} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

Pero: $a = 8k$; $b = 12k$; $c = -4k$

Luego $(8k)^2 + (12k)^2 + (-4k)^2 = 14 \Rightarrow 224\,k^2 = 14$

$\therefore \quad k^2 = \dfrac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{4}$

En consecuencia: $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 1\hat{k}$

Parte (c) $|\vec{C}| = 3|\vec{A}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{C}| = 12\sqrt{14}$

Luego: $\vec{C} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

Sabemos: que: $\vec{A}$ y $\vec{C}$ no son paralelos

$\Rightarrow \quad a = -8k \quad \wedge \quad b = -12k \quad \wedge \quad C = 4k$

$\Rightarrow \quad (-8k)^2 + (-12k)^2 + (4k)^2 = 144 \times 14$

$\therefore \quad 224k^2 = 144 \times 14 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 9 \quad \therefore \quad k = 3$

Luego: $\vec{C} = -24\hat{i} - 36\hat{j} + 12\hat{k}$

40. Las instrucciones para descubrir un tesoro enterrado son las siguientes: ir 75 pasos a 240°, girar hasta 135° y caminar 125 pasos, después caminar 100 pasos a 160°. Determine el desplazamiento resultante desde el punto de partida.

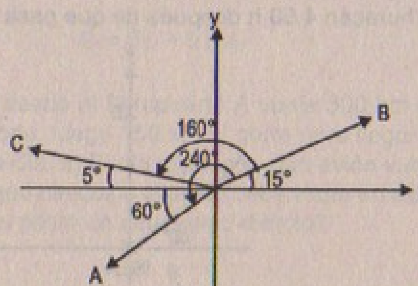
Resolución:

Planteamiento:

$|\vec{A}| = 75$ pasos ;

$|\vec{B}| = 125$ pasos ;

$|\vec{C}| = 100$ pasos



$\text{sen}15° \approx 0{,}26$

$\cos15° \approx 0{,}97$

$\text{sen}15° \approx 0{,}117$

$\cos5° \approx 0{,}99$

Sea $\vec{R}$ el vector resultante:

$|\vec{R}_x| = |\vec{B}|\cos15° - |\vec{A}|\cos60° - |\vec{C}|\cos5° = 125 \times (0{,}97) - (75)(0{,}5) - 100(0{,}99)$

$|\vec{R}_y| = |\vec{B}|\,\text{sen}15° + |\vec{C}|\,\text{sen}5° - |\vec{A}|\,\text{sen}60° = 125 \times (0{,}26) + 100(0{,}117) - 75(0{,}87)$

$\therefore \quad \vec{R}_x = -15{,}25\hat{i} \quad \wedge \quad \vec{R}_y = -21{,}05\hat{j}$

$\therefore \quad |\vec{R}| = \sqrt{(-15{,}25)^2 + (-21{,}05)^2} = 25{,}99 = 26$ pasos

41. Dados los vectores desplazamiento $A = (3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 4{,}0\hat{k})$ m y $B = (2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} - 7{,}0\hat{k})$ m, encuentre las magnitudes de los vectores a) C = A + B, y b) D = 2A – B, expresando también cada uno en función de sus componentes rectangulares.

Resolución:

Sea: $\vec{A} = (a\hat{i} - 4\hat{j} + 4k)$ m ; $\vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k})$ m

Parte (a) $\vec{C} - \vec{A} = \vec{B}$

$\Rightarrow \quad \vec{C} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}) + (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k})$ m

$\therefore \quad |C| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$ m $= 5{,}92$ m

Parte (b)

$\vec{A} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}) \Rightarrow 2\vec{A} = (6\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k})$ m

Luego: $\vec{D} = 2\vec{A} - \vec{B} = (6\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k})$

$\therefore \vec{D} = (4\hat{i} - 11\hat{j} + 15\hat{k})$ m

Luego: $|\vec{D}| = \sqrt{(4)^2 + (-11)^2 + (15)^2} = \sqrt{362} = 19{,}026$ m

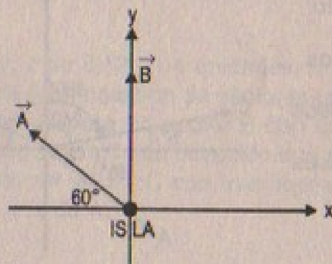
42. Al pasar sobre la isla Gran Bahama el ojo de un hurarán se mueve en una dirección 60,0°al norte del oeste con una velocidad de 41,0 km/h. Tres horas después se desvía hacia el norte y su velocidad se reduce a 25,0 km/h. ¿A qué distancia se encuentra el ojo del huracán 4,50 h después de que pasa por la isla?

Resolución:

$|\vec{A}| = 41$ km/h

$|\vec{B}| = 25$ km/h

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



$\vec{R}_x = -|\vec{A}|\cos 60°\,\hat{i} \Rightarrow \vec{R}_x = -20{,}5\,\hat{i}$

$\vec{R}_y = |\vec{B}|\hat{j} + |\vec{A}|\,\text{sen}60°\,\hat{j} \Rightarrow \vec{R}_y = 60{,}5\,\hat{j}$

Luego

Velocidad: $|\vec{R}| = \sqrt{(-20{,}5)^2 + (60{,}5)^2} = \sqrt{4\,080{,}5} \approx 63{,}88$ km/h
prom

$\Rightarrow$ Distancia luego de 4,5 horas = (63,88 km/h) $\approx$ 287,46 km

43. El vector A tiene una componente x negativa de 3,00 unidades de longitud y una componente y positiva de 2,00 unidades de longitud. a) Determine una expresión para A en notación de vectores unitarios. b) Determine la magnitud y la dirección de A. c) ¿Qué vector B, cuando se suma a A, produce un vector resultante sin componente x y una componente y negativa de 4,00 unidades de largo?

Resolución:

Dato: $\vec{A} = (-3\hat{i} + 2\hat{j})$ u

Parte (a): $\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$

Parte (b): $|\vec{A}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$

Dirección: $\tan\theta = \dfrac{2}{-3}$ -0,66 $\therefore \theta = \tan^{-1}(-0{,}66)$

Parte (c): Sea: $\vec{B} = a\hat{i} + b\hat{j}$

Por dato: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = (0\hat{i} - 4\hat{j})$ u

$\Rightarrow (-3\hat{i} + 2\hat{j}) + (a\hat{i} + b\hat{j}) = 0\hat{i} - 4\hat{j}$

$\Rightarrow -3\hat{i} + a\hat{i} = 0\hat{i} \Rightarrow a = 3$ u

$2\hat{j} + b\hat{j} = -4\hat{j} \Rightarrow b = -6$ u

$\therefore \vec{B} = 3\hat{i} - 6\hat{j}$ u

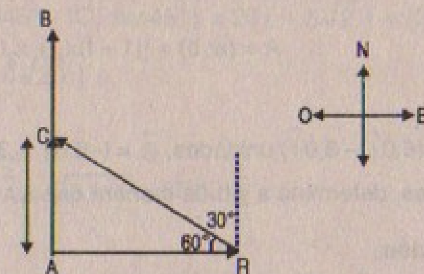
44. Un avión que parte desde el aeropuerto A vuela 300 km al este, después 350 km 30,0° al oeste del norte, luego 150 km al norte para llegar finalmente al aeropuerto B. No hay viento ese día. a) El día siguiente, otro avión vuela directamente de A a B en línea recta. ¿En qué dirección el piloto debe viajar en este vuelo directo? b) ¿Qué distancia recorrerá el piloto en este vuelo directo?

Resolución:

$|\vec{AR}| = 300$ km ;

$|\vec{RC}| = 350$ km ;

$|\vec{CB}| = 150$ km



Parte (a)

Dirección al norte

Parte (b)

Distancia = $|\vec{AC}| + |\vec{CB}|$ = RC sen60° + 150 ≈ 453,11 km

45. El punto A en la figura P3.45 es un punto arbitrario a lo largo de la línea que conecta los dos puntos (x_2, y_2). Muestre que las coordenadas de A son $(1-f)x_1 + fx_2, (1-f)y_1 + fy_2$.

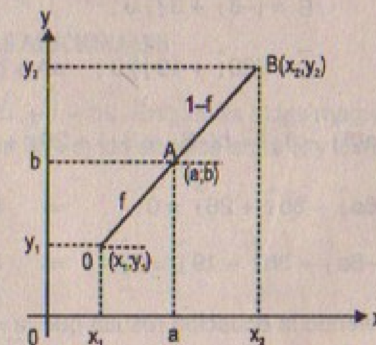


Figura P3.45

Resolución :

Sea: $\vec{OA}$ un vector y $\vec{AB}$ otro vector

$\Rightarrow |\vec{OA}| = f \qquad \Rightarrow |\vec{AB}| = 1 - f$

Sabemos que por componentes; y vectores unitarios:

$$\vec{OA} = (a - x_1)\hat{i} + (b - y_1)\hat{j} \qquad \vec{AB} = (x_2 - a)\hat{i} + (y_2 - b)\hat{j}$$

Además: $a - x_1 = f\cos\theta$ ... (1) $\qquad x_2 - a = (1 - f)\cos\theta$ ... (3)

$b - y_1 = f\,\text{sen}\theta$ ... (2) $\qquad y_2 - b = (1 - f)\,\text{sen}\theta$ ... (4)

Dividiendo (1) ÷ (3)

$$\frac{a - x_1}{x_2 - a} = \frac{f}{1 - f} \Rightarrow a - fa - x_1 - x_1 f = x_2 f - af$$

$$\therefore \quad a = (1 - f)x_1 + x_2 f$$

Ahora dividiendo (2) ÷ (4):

$$\frac{b - y_1}{y_2 - b} = \frac{f}{1 - f} \Rightarrow b - bf - y_1 + fy_1 = fy_2 - bf$$

$$\therefore \quad b = (1 - f)\,y_1 + y_2 f$$

$$\therefore \quad A = (a; b) = [(1 - f)x_1 + x_2 f\,;\,(1 - f)y_1 + y_2 f]$$

46. Si $\vec{A} = (6{,}0\hat{i} - 8{,}0\hat{j})$ unidades, $\vec{B} = (-8{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ unidades, y $\vec{C} = (26{,}0\hat{i} + 19{,}0\hat{j})$ unidades, determine a y b de manera que $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$.

Resolución :

Por dato: $\vec{A} = (6\hat{i} - 8\hat{j})$ u ;

$\vec{B} = (-8\hat{i} + 3\hat{j})$ u ;

$\vec{C} = (20\hat{i} + 19\hat{j})$ u ; $\quad aA + bB + C = 0$

$\Rightarrow a(6\hat{i} - 8\hat{j}) + b(-8\hat{i} + 3\hat{j}) + 26\hat{i} + 19\hat{j} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$\Rightarrow 6a\hat{i} - 8b\hat{i} + 26\hat{i} = 0\hat{i} \qquad \Rightarrow 8b - 6a = 26$ ... (1)

$-8a\hat{j} + 3b\hat{j} + 19\hat{j} = 0\hat{j} \qquad \Rightarrow 8a - 3b = 11$ ... (2)

Resolviendo la ecuación resulta que $a = 5$ u $\wedge$ $b = 7$ u

47. Tres vectores se orientan como se muestra en la figura P3.47, donde $|\vec{A}| = 20{,}0$ unidades, $|\vec{B}| = 40{,}0$ unidades y $|\vec{C}| = 30{,}0$ unidades. Encuentre a) las componentes x e y del vector resultante, y b) la magnitud y dirección del vector resultante.

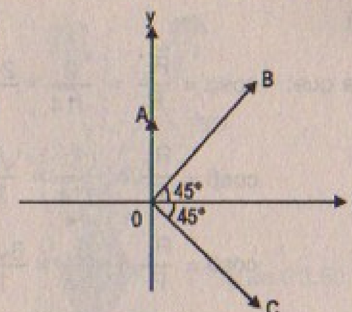


Figura P3.47

Resolución :

$|\vec{A}| = 20$ u ; $\quad |\vec{B}| = 40$ u ; $\quad |\vec{C}| = 30$ u

Parte (a) $\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x + \vec{C}_x$

$\Rightarrow \vec{R}_x = 0i + |\vec{B}|\cos45° + |\vec{C}|\cos45°\,j = 0 + 20\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 35\sqrt{2}\,i$

$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y + \vec{C}_y$

$\Rightarrow \vec{R}_y = 20\hat{j} + |\vec{B}|\,\text{sen}45° - |\vec{C}|\,\text{sen}45°\hat{j} = 20\hat{j} + 5\sqrt{2}\,\hat{j} = (20 + 5\sqrt{2})\hat{j}$

Luego: $\vec{R} = 35\sqrt{2}\,i + (20 + 5\sqrt{2})\,\hat{j}$ u

Parte (b)

$$|\vec{R}| = \sqrt{(35\sqrt{2})^2 + (20 + 5\sqrt{2})^2} = \sqrt{3183} \approx 56{,}42 \text{ u}$$

$$\text{Dirección: } \tan\theta = \frac{20 + 5\sqrt{2}}{35\sqrt{2}} = 0{,}547 \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}547)$$

PROBLEMAS ADICIONALES

48. Un vector está determinado por $R = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. Encuentre a) las magnitudes de las componentes x; y; z, b) la magnitud de R, y c) los ángulos entre R y los ejes x; y; z.

Resolución :

$\vec{R} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

Parte (a): $R_x = 2$; $R_y = 1$; $R_z = 3$

Parte (b): $|\vec{R}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Parte (c)

Sabemos que: $\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} \quad \therefore \quad \alpha = \cos^{-1}(\sqrt{14}/7)$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}(\sqrt{14}/14)$$

$$\cos\theta = \frac{R_z}{R} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(3\sqrt{14}/14)$$

49. Una persona pasea por la trayectoria mostrada en la figura P3.49. El recorrido total se compone de cuatro trayectos rectos. Al final del paseo, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona medido desde el punto de partida?

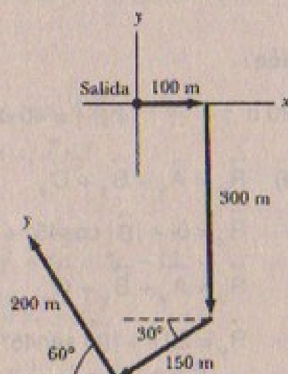
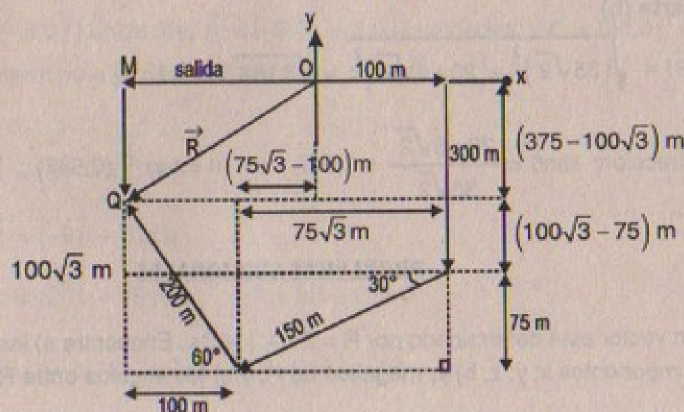


Figura P3.49

Resolución:



Luego:

$$\overline{OQ} = |\vec{R}| = \sqrt{|\vec{MO}|^2 + |\vec{MQ}|^2} = \sqrt{(75\sqrt{3})^2 + [375 - 100\sqrt{3}]^2}$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = 240 \text{ m}$$

50. La pista del helicóptero en la figura P3.50 muestra a dos personas que jalan una obstinada mula. Encuentre a) la única fuerza que es equivalente a las dos fuerzas indicadas, y b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer la fuerza resultante igual a cero.

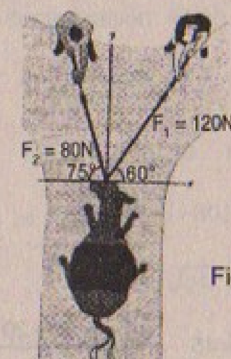


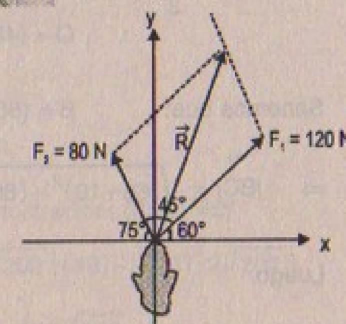
Figura P3.50

Resolución :50

Parte (a)

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 . F_2 \cos 45°}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = \sqrt{(120)^2 + (80)^2 + 2 \times 120 \times 80 . \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



$$= 10\sqrt{96\sqrt{2} + 208}$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| \approx 185{,}4 \text{ N}$$

Parte (b)

La fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sería igual en magnitud a la resultante es decir: $\approx -185{,}4$ N

51. Una pirata ha enterrado su tesoro en una isla sobre la cual crecen cinco árboles localizados en los siguientes puntos: A(30 m; –20 m); B(60 m; 80 m); C(–10 m; 10 m), D(40 m; –30 m), y E(–70 m; 60 m), cuyas medidas se han establecido respecto de cierto origen, como muestra la figura P3.51. Su mapa le indica empezar en A y moverse rumbo a B, pero sólo la mitad de la distancia entre los dos puntos. Después debe caminar hacia C, cubriendo sólo un tercio de la distancia entre B y C. Luego debe dirigirse a D, recorriendo un cuarto de la distancia entre C y D. Por último debe moverse hacia E, cubriendo un quinto de la distancia entre D y E, detenerse y cavar. a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde su tesoro está enterrado? b) Reacomode el orden de los árboles (por ejemplo, B(30 m, –20 m), A(60 m, 80 m), E(–10 m, 10 m), C(40 m, –30 m) y D(–70 m, 60 m) y repita el cálculo para demostrar que la respuesta no depende de dicho orden. (Sugerencia: Véase el problema 45.)

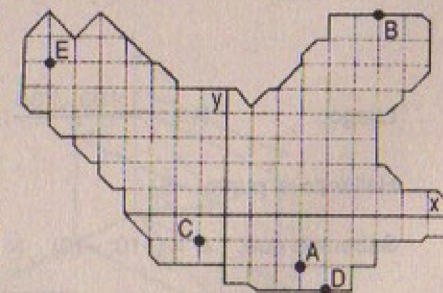


FIGURA P3.51

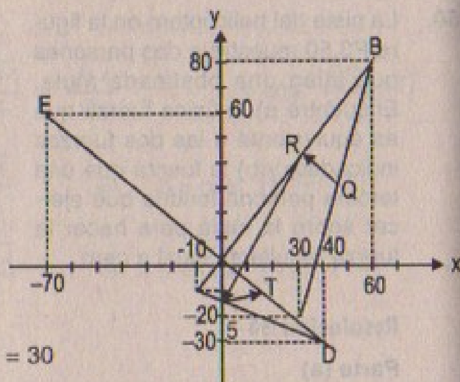
Resolución :

Sabemos que:

A = (30; –20) y

B = (60; 80)

$\Rightarrow \quad Q = (a, b)$



$$\Rightarrow \quad a = \frac{60+30}{2} = 45 \quad \wedge \quad b = \frac{80-20}{2} = 30$$

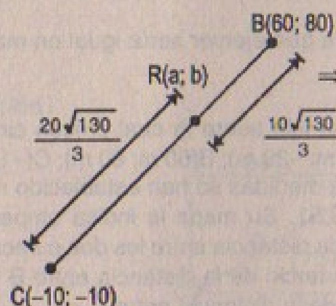
$\therefore \quad Q = (45; 30)$

Sabemos que: B = (60; 80) y C = (–10; –10)

$$\Rightarrow \quad |\vec{BC}| = \sqrt{(60+10)^2 + (80+10)^2} = 10\sqrt{130}\ \text{m}$$

Luego:

Por demostración: (Prob. 45)



$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{10\sqrt{130}}{3}\right)(-10) + 60\left(\frac{20\sqrt{130}}{3}\right)$$

$\therefore \quad a = 1\,100\sqrt{130}/3$ m

$$b = \left(\frac{10\sqrt{130}}{3}\right)(-10) + 80\left(\frac{20\sqrt{130}}{3}\right)$$

$\therefore \quad b = 500\sqrt{130}$ m

Luego: $R = \left(\frac{1\,100\sqrt{130}}{3};\ 500\sqrt{130}\right)$ m

Hallando el punto: «S»

Sabemos que: C = (–10; –10) $\wedge$ D = (40; –30)

$$\Rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{(40+10)^2 + (-30+10)^2} = 10\sqrt{29}\ \text{m}$$

Por demostración: (Prob. 45)

$$\Rightarrow \quad C = \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)(40) + (-10)\left(\frac{15}{2}\sqrt{29}\right)$$

$\therefore \quad C = 25\sqrt{29}$ m

$$d = \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)(-30) + (-10)\left(\frac{15}{2}\sqrt{29}\right)$$

$\therefore \quad d = -150\sqrt{29}$ m

Luego: $S = \left(25\sqrt{29};\ -150\sqrt{29}\right)$ m

Hallando el punto: «T»

Sabemos que: D = (40; –30) y E = (–70; 60)

$$\Rightarrow |\vec{DE}| = \sqrt{(-70-40)^2 + (60+30)^2} = 10\sqrt{202}\ \text{m}$$

Por demostración: (Prob. 45)

$$e = \left(8\sqrt{202}\right)(40) + (-70)\left(2\sqrt{202}\right)$$

$\therefore \quad e = 180\sqrt{202}$

$$f = \left(8\sqrt{202}\right)(-30) + 60\left(2\sqrt{202}\right)$$

$\therefore \quad f = -120\sqrt{202}$

Luego: $T = \left(180\sqrt{202};\ -120\sqrt{202}\right)$ m

Parte (a)

Como el punto «T» es la última coordenada entonces su tesoro está enterrado en dicho punto, luego:

$$T = \left(180\sqrt{202};\ -120\sqrt{202}\right)\ \text{m}$$

52. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b y c, como muestra la figura P3.52. a) Obtenga una expresión vectorial para el vector de la cara diagonal R_1. ¿Cuál es la magnitud de este vector? b) Obtenga una expresión vectorial para el vector de la diagonal del cuerpo R_2. ¿Cuál es la magnitud de este vector?

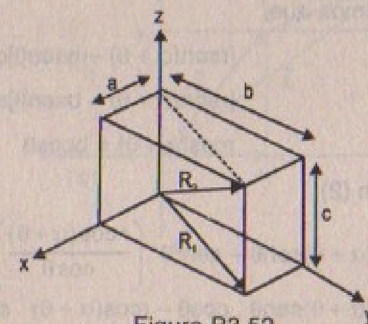


Figura P3.52

Resolución :

Parte (a) $\vec{R}_1 = \vec{R}_{1y} + \vec{R}_{1x} = b\hat{j} + a\hat{i}$

$\Rightarrow \quad |\vec{R}_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Parte (b) $\vec{R}_2 = \vec{R}_{2y} + \vec{R}_{2x} + \vec{R}_{2z} = b\hat{j} + a\hat{i} + c\hat{k}$

$\Rightarrow \quad |\vec{R}_2| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

53. Un punto P está descrito por las coordenadas (x; y) en relación con el sistema de coordenadas cartesiano ordinario mostrado en la figura P3.53. Muestre que (x'; y'), las coordenadas de este punto en el sistema de coordenadas rotado, se relacionan con (x; y) y el ángulo de rotación θ por medio de las expresiones.

$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\theta$
$y' = -x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta$

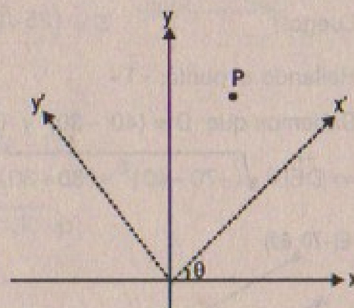


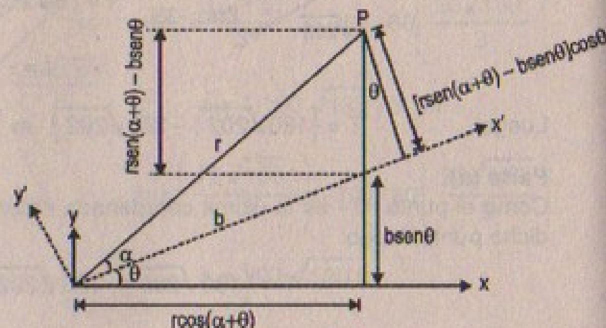
Figura P3.53

Resolución :

Por demostrar:

$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\theta$

$y' = -x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta$



Sabemos que:

$[r\,\text{sen}(\alpha + \theta) - b\,\text{sen}\theta]\cos\theta = r\,\text{sen}\alpha$ ... (1)

$[r\,\text{sen}(\alpha + \theta) - b\,\text{sen}\theta]\text{sen}\theta + b = r\cos\alpha$ ... (2)

$r\cos(\alpha + \theta) = b\cos\theta$ ... (3)

(3) en (2):

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}\theta - \text{sen}^2\theta\left(\dfrac{r\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}\right) + \dfrac{r\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta} = r\cos\alpha$

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}\theta \,.\, \cos\theta - r\cos(\alpha + \theta) \,.\, \text{sen}^2\theta + r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha \,.\, \cos\theta$

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta) \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \cos\theta + r\cos(\alpha + \theta)\,[1 - \text{sen}^2\theta] = r\cos\alpha \,.\, \cos\theta$

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta) \,.\, \text{sen}\theta \,.\, \cos\theta + r\cos(\alpha + \theta)\cos^2\theta = r\cos\alpha \,.\, \cos\theta$

Simplificando:

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta)\text{sen}\theta + r\cos(\alpha + \theta)\cos\theta = r\cos\alpha$

Pero: $r\cos(\alpha + \theta) = x$; $r\,\text{sen}(\alpha + \theta) = y$; $r\cos\alpha = x'$

Reemplazando: $y\,\text{sen}\theta + \alpha\cos\theta = x'$

Así también:
(3) en (1):

$r\,\text{sen}(\alpha + \theta)\cos\theta - b\,\text{sen}\theta\cos\theta = r\,\text{sen}\alpha$

$\Rightarrow \quad r\,\text{sen}(\alpha + \theta)\cos\theta - \dfrac{r\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}\,\text{sen}\theta\cos\theta = r\,\text{sen}\alpha = y'$

Luego: $y\cos\theta - x\,\text{sen}\theta = y'$

Por lo tanto: $x' = y\,\text{sen}\theta + x\cos\theta$
$y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\theta$ l.q.q.d

54. Un punto que se encuentra en el plano xy cuyas coordenadas son (x; y) puede describirse mediante el vector de posición $r = x\hat{i} + y\hat{j}$. a) Muestre que el vector de desplazamiento para una partícula que se mueve de $(x_1; y_1)$ a $(x_2; y_2)$ está dado por $d = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$. b) Dibuje los vectores de posición r_1 y r_2 y el vector desplazamiento d y verifique mediante el método gráfico que $d = r_2 - r_1$.

Resolución :

$r_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ ... (1)

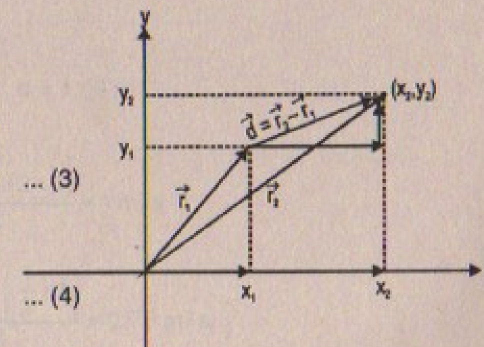
$r_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ ... (2)

Pero:

$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$ ... (3)

(2) – (1):

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$ ... (4)



Por lo tanto:
(4) = (3) ⇒ 4 = 3 L.q.q.d

Capítulo 4

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES
LOS VECTORES DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

1. Suponga que la trayectoria de una partícula está dada por $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ con $x(t) = at^2 + bt$ y $y(t) = ct + d$, donde a, b, c y d son constantes que tienen dimensiones apropiadas. ¿Qué desplazamiento experimenta la partícula entre t = 1 s y t = 3 s?

Resolución :

$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ $\qquad x(t) = at^2 + bt \qquad y(t) = ct + d$

$\qquad x(1) = a + b \quad \wedge \quad x(3) = 9a + 3b$

$\Rightarrow \quad \Delta\vec{x} = (9a + 3b) - (a + b) = 8a + 2b$

$y(1) = c + d \quad \wedge \quad y(3) = 3c + d \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{y} = (3c + d) - (c + d) = 2c$

$\therefore \quad \Delta\vec{r} = (8a + 2b)\,\hat{i} + 2c\,\hat{j}$

En $t_1 \to t_2$

2. Suponga que el vector de posición para una partícula está dado como $r(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ con $x(t) = at + b$ e $y(t) = ct^2 + d$, donde a = 1,00 m/s; b = 1,00 m/s; b = 1,00 m; c = 0,125 m/s^2 y d = 1,00 m. a) Calcule la velocidad promedio durante el intervalo de tiempo de t = 2,00 s a t = 4,00 s. b) Determine la velocidad y la rapidez en t = 2,00 s.

Resolución :

$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$

$x(t) = at + b \; ; \; y(t) = ct^2 + d$

$a = 1$ m/s ; $b = 1$ m ; $c = 0{,}125$ m/s^2 ; $d = 1{,}00$ m

Parte (a)

$$\underset{(t=2s\to t=4s)}{\vec{V}_{xprom}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{x_{(4)} - x_{(2)}}{4-2} = \frac{(4+1)-(2+1)}{2} = 1\text{ m/s }\hat{i}$$

$$\underset{(t=2s\to t=4s)}{\vec{V}_{yprom}} = \frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t} = \frac{y_{(4)} - y_{(2)}}{4-2} = \frac{(2+1)-\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2} = 0{,}75\text{ m/s }\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{prom} = 1{,}0\text{ m/s }\hat{i} + 0{,}75\text{ m/s }\hat{j}$$

Parte (b)

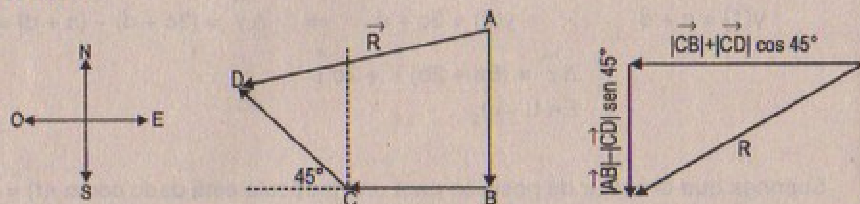
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (a\hat{i} + 2ct\hat{j})\ m/s \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{(t)} = \hat{i} + 0{,}25t\,\hat{j}$$

Entonces: $\vec{V}_{(t)} = \hat{i} + 0{,}5\hat{j}$ m/s
$t = 2$ s

Luego la rapidez: $|\vec{V}| = \sqrt{1^2 + (0{,}5)^2} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12\ m/s$

3. Un motociclista conduce hacia el sur a 20,0 m/s durante 3,00 min, luego vira al oeste y viaja a 25,0 m/s por 2,00 min y, por último, viaja hacia el noroeste a 30,0 m/s durante 1,00 min. Para este viaje de 6,00 min, encuentre:
a) El vector resultante del desplazamiento, b) La rapidez promedio y c) La velocidad promedio.

Resolución:



Desplazamientos:

$|\vec{AB}| = 20 \times 180 = 3\ 600$ m en 3 minutos = 180 s
$|\vec{BC}| = 25 \times 120 = 3\ 000$ m en 2 minutos = 120 s
$|\vec{CD}| = 30 \times 60 = 1\ 800$ m en 1 minuto = 60 s

$$|\vec{R}|_{Desplaz.} = \sqrt{\left(3\ 000 + 1\ 800\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(3\ 600 - 1\ 800\sqrt{2}/2\right)^2}$$

Entonces el desplazamiento = $|\vec{R}| = 4\ 865{,}5$ m

Parte (b)

Hallando la velocidad resultante:

$$|\vec{R}|_{Veloc.} = \sqrt{\left(25 + \frac{30\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(20 - \frac{30\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{22{,}8} \approx 4{,}77\ m/s$$

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{|\vec{R}|}{t_{total}} = \frac{8\ 400\ m}{6 \times 60\ s} = 23{,}3\ m/s$$

Parte (c)

$$v_{prom} = \frac{\Delta x_{total}}{\Delta t} = \frac{4\ 865{,}5\ m}{360\ s} = 13{,}52\ m/s$$

4. Una pelota de golf es golpeada en el borde de un montículo. Las coordenadas x e y de la pelota de golf contra el tiempo están dadas por las expresiones x = (18,0 m/s) t y y = (4,00 m/s)t – (4,90 m/s²)t². a) Escriba una expresión vectorial para la posición r como una función del tiempo t utilizando los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Tomando derivadas, repita para b) el vector velocidad v(t) y c) el vector aceleración a(t). d) Determine las coordenadas x e y de la pelota en t = 3,00 s. Con los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$, escriba expresiones para e) la velocidad v y f) la aceleración a en el instante t = 3,00 s.

Resolución:

$$x(t) = (18\ m/s)t \ \wedge\ y(t) = (4\ m/s)t - (4{,}90\ m/s^2)t^2$$

Parte (a) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = 18t\hat{i} + (4t - 4{,}90t^2)\hat{j}$ m

Parte (b) $\vec{V}_{(t)} = \dfrac{d\vec{r}_{(x)}}{dt} \Rightarrow \vec{V}_{(t)} = 18\hat{i} + (4 - 9{,}8\,t)\hat{j}$ m/s

Parte (c) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = a\hat{i} - 9{,}8\hat{j}$ m/s²

Parte (d)

Para t = 3 s

$\Rightarrow$ x(3) = 54 m y y(3) = 4(3) – (4,90)(9) = –32,1 m

Parte (e)

Para t = 3 s

$\Rightarrow$ $\vec{V}(3) = 18\hat{i} + [4 - 9{,}8(3)]\hat{j} = 18\hat{i} - 25{,}4\hat{j}$ m/s

Para (f)

Para t = 3 s

$\vec{a}(3) = 0\hat{i} - 9{,}8\hat{j}$ m/s²

Constante en el tiempo

MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL CON ACELERACIÓN CONSTANTE

5. En t = 0 una partícula moviéndose en el plano xy con aceleración constante tiene una velocidad de $v_o = (3\hat{i} - 2\hat{j})$ m/s en el origen. En t = 3 s, su velocidad está dada por $v = (9\hat{i} + 7\hat{j})$ m/s. Encuentre a) la aceleración de la partícula y b) sus coordenadas en cualquier tiempo t.

Resolución :

En t = 0 s → $\vec{V}_0 = (3\hat{i} - 2\hat{j})$ m/s

En t = 3 s → $\vec{V}_{(3)} = (9\hat{i} + 7\hat{j})$ m/s

Parte (a) y parte (b)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \text{Pero} \quad \vec{a} = \frac{\vec{V}_{(3)} - \vec{V}_{(0)}}{3} = \frac{(9\hat{i}+7\hat{j}) - (3\hat{i}-2\hat{j})}{3}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m/s}^2 \text{ (coordenadas)}$$

Entonces: $$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \text{ m/s}^2$$

6. Una partícula parte del reposo en t = 0 en el origen y se mueve en el plano xy con una aceleración constante de $\vec{a} = (2\hat{i} + 4\hat{j})$ m/s². Después de que ha transcurrido un tiempo t, determine a) las componentes x e y de la velocidad, b) las coordenadas de la partícula, y c) la rapidez de la partícula.

Resolución :

$\vec{a} = (2\hat{i} + 4\hat{j})$ m/s² ; $V_0 = 0,0$

Parte (a)

Sabemos que: $\frac{d\vec{V}_{(x)}}{dt} = 2 \Rightarrow \int_0^t dV = \int_0^t 2dt$

$\Rightarrow \vec{V}_x(t) = 2t\hat{i}$ m/s

Sabemos que: $\frac{d\vec{V}_{(y)}}{dt} = 4 \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t 4dt$

$\Rightarrow \vec{V}_y(t) = 4t\hat{j}$ m/s

Luego: $\vec{V}(t) = (2t\hat{i} + 4t\hat{j})$ m/s

Parte (b)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}_x = 2t \Rightarrow \int_0^t dx = \int_0^t 2t\,dt \quad \therefore \quad x(t) = t^2 \text{ m}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{V}_y = 4t \Rightarrow \int_0^t dy = \int_0^t 4t\,dt \quad \therefore \quad y(t) = 2t^2 \text{ m}$$

Luego: $\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} = (t^2\hat{i} + 2t^2\hat{j})$ m

7. Un pez que nada en un plano horizontal tiene velocidad $v_o = 4,0\hat{i} + 1,0\hat{j}$) m/s en un punto en el océano cuyo vector de posición es $r_o = (10,0\hat{i} - 4,0\hat{j})$ m relativo a una roca estacionaria en la playa. Después de que el pez nada con aceleración constante durante 20,0 s, su velocidad es $v = (20,0\hat{i} - 5,0\hat{j})$ m/s. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración? b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración respecto del eje x fijo? c) ¿Dónde se encuentra el pez en t = 25 s y en qué dirección se mueve?

Resolución :

$\vec{V}_o = (4\hat{i} + 1\hat{j})$ m/s ; en t = 20 s ; $\vec{V}_f = (20\hat{i} - 5\hat{j})$ m/s

$\vec{r}_o = (10\hat{i} - 4\hat{j})$ m ; $\vec{a}$ = cte

Parte (a)

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_o}{20} = \frac{(20\hat{i} - 5\hat{j}) - (4\hat{i} - \hat{j})}{20} = \left(\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{1}{5}\hat{j}\right) \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

$$\text{Dirección de } \vec{a} = \tan\theta = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = -1/4 = -0,25 \quad \therefore \theta = \tan^{-1}(-0,25)$$

Parte (c)

$$\vec{r}_{(25)} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{(25)} = (10\hat{i} - 4\hat{j}) + (4\hat{i} + \hat{j})(25) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{1}{5}\hat{j}\right)(625)$$

Luego: $\vec{r}_{(25)} = (360\hat{i} - 41,5\hat{j})$ m

$$\text{Dirección en que se mueve} = \tan\theta = -\frac{41,5}{360} = -0,115 \quad \therefore \theta = \tan^{-1}(-0,115)$$

8. La posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{r} = (3{,}00\hat{i} - 6{,}00\,t^2\hat{j})$ m. a) Encuentre expresiones para la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo. b) Determine la posición y la velocidad de la partícula en t = 1,00 s.

Resolución :

$$\vec{r}\,(t) = (3\hat{i} - 6t^2\hat{j})\ \text{m}$$

Parte (a)

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0\hat{i} - 12t\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}(t) = (0\hat{i} - 12t\hat{j})\ \text{m/s}$$

$$\vec{a}\,(t) = \frac{dV}{dt}\,(0\hat{i} - 12\hat{j}) \quad \therefore \quad \vec{a}\,(t) = (0\hat{i} - 12\hat{j})\ \text{m/s}^2$$

Parte (b)

$$\vec{r}\,(1\ \text{s}) = 3{,}00\hat{i} - 6{,}00\,(1)^2\hat{j} = (3{,}00\hat{i} - 6{,}00\hat{j})\ \text{m}$$

$$\vec{V}(1\ \text{s}) = 3{,}00\hat{i} - 12{,}00\,(1)^2\hat{j} = (3{,}00\hat{i} - 12{,}00\hat{j})\ \text{m/s}$$

9. Las coordenadas de un objeto en movimiento en el plano xy varían con el tiempo de acuerdo con las expresiones x = –(5,0 m)sen(t) e y = (4,0 m) – (5,0 m) cos(t), donde t está en segundos. a) Determine los componentes de la velocidad y las de la aceleracion en t = 0 s. b) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector de velocidad y el vector de aceleración en cualquier tiempo t > 0. c) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy.

Resolución :

$$\vec{x}\,(t) = -5\text{sen}(t)\,\hat{i}\ \text{m}\ ; \quad \vec{y}\,(t) = 4 - 5\cos(t)\,\hat{j}\ \text{m}$$

Parte (a)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}_x(t) = -5\cos(t)\,\hat{i}\ \text{m/s}\ ; \quad \vec{V}_y(t) = 5\text{sen}(t)\,\hat{j}\ \text{m/s}$$

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{V}_x}{dt} = 5\text{sen}(t)\,\hat{i}\ \text{m/s}^2\ ; \quad \vec{a}_y = \frac{d\vec{V}_y}{dt} = 5\cos(t)\,\hat{j}\ \text{m/s}^2$$

Luego:

$$\vec{V}_{(0)} = (-5\hat{i} + 0\hat{j})\ \text{m/s}$$

$$\vec{a}_{(0)} = (0\hat{i} + 5\hat{j})\ \text{m/s}^2$$

Parte (b):

$$\vec{r}\,(t) = [-5\text{sen}(t)\,\hat{i} + 4 - 5\cos(t)\,\hat{j}]\ \text{m}$$

$$\vec{V}(t) = [-5\cos(t)\,\hat{i} + 5\text{sen}(t)\,\hat{j}]\ \text{m/s}$$

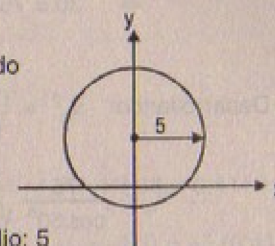
$$\vec{a}\,(t) = [5\text{sen}(t)\,\hat{i} + 5\cos(t)\,\hat{j}]\ \text{m/s}^2$$

Parte (c)

$$x = -5\text{sen}(t) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(t) = -\frac{x}{5}$$

$$y = 4 - 5\cos(t) \quad \Rightarrow \quad \cos(t) = \frac{4-y}{5}$$

Desarrollando



Luego: $x^2 + (y-4)^2 = 5^2$

La trayectoria: circunferencia con vértice (0; 4) y radio: 5

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

10. Jimmy está en la parte inferior de una colina, mientras que Billy se encuentra 30 m arriba de la misma. Jimmy está en el origen de un sistema de coordenadas xy, y la línea que sigue la pendiente de la colina está dada por la ecuación y = 0,4x, como se muestra en la figura P4.10. Si Jimmy lanza una manzana a Billy con un ángulo de 50° respecto de la horizontal, ¿con qué velocidad debe lanzar la manzana para que pueda llegar a Billy?

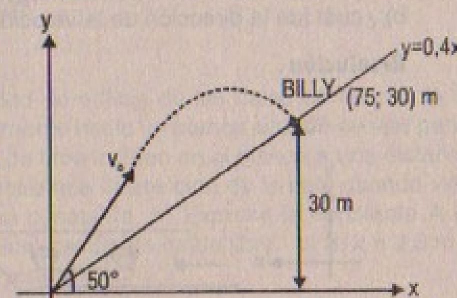


Figura P4.10

Resolución :

sen50° ≈ 0,775
cos50° ≈ 0,632

Considerar: $g = 10\ \text{m/s}^2$

Sabemos que: $30 = (0{,}4)(x) \quad \therefore \quad x = 75\ \text{m}$

Por fórmula: $x = v_o \cdot \cos 50°\,(t) \quad \Rightarrow \quad 75 = v_o \cdot \cos 50° \cdot t$

$$t = \frac{75°}{v_o \cdot \cos 50°} \qquad \ldots(1)$$

$$30 = v_o \cdot \text{sen}50°t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots(2)$$

(2) en (1):

$$30 = v_o \cdot \text{sen}50°\left(\frac{75°}{v_o \cdot \cos 50°}\right) - 5\left(\frac{75°}{v_o \cos 50°}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 30 = 75\tan 50° - \frac{75\times 75\times 5}{v_o^2\cos^2 50°}$$

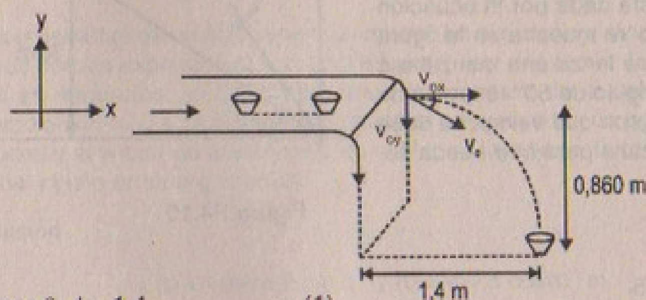
Desarrollando: $v_o^2 = \sqrt{\left(\frac{75^2\times 5}{75\tan 50° - 30}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 50°}\right)}$

$$\therefore \; v_o = \frac{75}{\cos 50°}\sqrt{\frac{5}{75\tan 50° - 30}} \approx 33{,}71 \text{ m/s}$$

11. En un bar local, un cliente hace deslizar un tarro vacío de cerveza sobre la barra para que vuelvan a llenarlo. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, el cual cae de la barra y golpea el piso a 1,40 m de la base de la misma. Si la altura de la barra es 0,860 m, a) ¿con qué velocidad abandonó el tarro la barra, y b) ¿cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?

Resolución:

Considerar g = 10 m/s²



$v_o x \cos\theta \cdot t = 1{,}4$ ... (1)

$v_o y \,\text{sen}\theta \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 = 0{,}86$ ... (2)

(1) en (2):

$$\Rightarrow \quad v_o \cdot \text{sen}\theta\left(\frac{1{,}4}{v_o \cdot \cos\theta}\right) + 5\left(\frac{1{,}4}{v_o \cdot \cos\theta}\right)^2 = 0{,}86$$

Pero: $v_x \cdot t = v_o \cdot \cos\theta \cdot t$

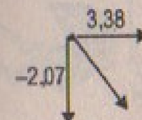
Pero $v_o \text{sen}\theta = v_{oy} = 0 \quad \Rightarrow \text{sen}\theta = 0 \quad \therefore \; \theta = 0$

$$\Rightarrow \quad 1{,}4\tan\theta + 5\left(\frac{1{,}4}{v_o\cos\theta}\right)^2 = 0{,}86$$

$$\Rightarrow \quad v_o^2 = \frac{5\times(1{,}4)^2}{0{,}86}\times\frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{5\times(1{,}4)^2}{0{,}86}$$

$\therefore \; v_o \approx 3{,}38$ m/s con $\theta = 0°$

Parte (b)



Como: $v_x \cdot t = 1{,}4 \quad \Rightarrow \; t = 1{,}4/3{,}38 = 0{,}4142$ s

Luego $v_y(t) = -5t^2 \quad \Rightarrow \; v_y = -5(t) = -5\,(0{,}4142)$

$\therefore \quad v_y = -2{,}07$

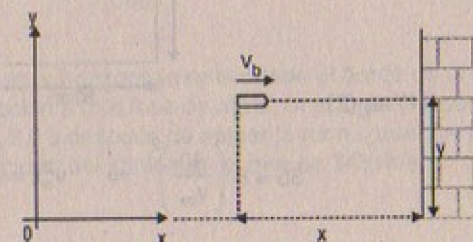
Luego la dirección:

$$\tan\theta = -\frac{2{,}07}{3{,}38} = 0{,}613 \therefore \; \theta = \tan^{-1}(-0{,}613)$$

12. Una estudiante decide medir la velocidad de orificio de las balas de su pistola de perdigones. Apunta la pistola horizontalmente hacia un blanco situado en una pared vertical a una distancia x de la pistola. Los tiros inciden en el blanco a una distancia vertical y abajo de la pistola. a) Demuestre que la posición de la bala cuando viaja por el aire es $y = Ax^2$, donde A es una constante. b) Exprese la constante A en función de la velocidad inicial y de la aceleración de caída libre. c) Si x = 3,0 m y y = 0,21 m, ¿cuál es la velocidad de la pistola?

Resolución:

Parte (a)



Por demostrar: $y = A\,x^2$

Donde A es una constante sabemos que por movimiento de proyectiles v_{ox} = cte.

$\Rightarrow \quad v_{ob} \times t = x$ ... (1)

$v_{oy} \times t = \frac{1}{2} g t^2 = y$ ... (2)

Pero $v_{oy} = 0 \Rightarrow$ (1) en (2)

Tenemos: $\frac{1}{2} g\left(\frac{x}{v_{ob}}\right)^2 = y \quad \therefore \quad y = \left[\frac{g}{2v_o^2}\right] \cdot x^2$

Pero como: $\frac{g}{2v_o^2}$ = cte $\Rightarrow \; y = Ax^2$ l.q.q.d.

Parte (b)

Luego como a es constante $\Rightarrow$ $a = \dfrac{g}{2\,v_o^2}$

Parte (c)

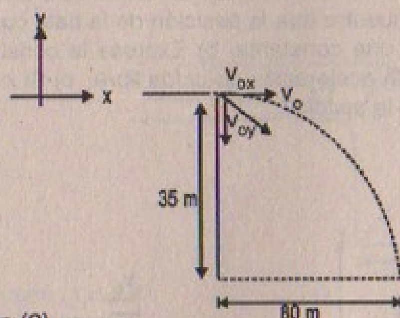
x = 3,0 m ; y = 0,21

$$\Rightarrow \quad 0{,}21 = \frac{9{,}8}{2v_o^2}(3{,}0)^2 \quad \Rightarrow \quad v_o^2 = \frac{(3{,}0)^2(9{,}8)}{2(0{,}21)}$$

$$\therefore \quad v_{ob} = \sqrt{\frac{(3{,}0)^2(9{,}8)}{2\,(0{,}21)}} \approx 14{,}5 \text{ m/s}$$

13. Una pelota se lanza horizontalmente desde la azotea de un edificio de 35 m de altura. La pelota golpea el suelo en un punto a 80 m de la base del edificio. Encuentre: a) el tiempo que la pelota permanece en vuelo, b) su velocidad inicial, y c) las componentes x e y de la velocidad justo antes de que la pelota pegue en el suelo.

Resolución:



Considerar: g = 10 m/s²

$v_{oy} = 0$

$80 = v_{ox}t$ ... (1)

$35 = v_{oy}t + \dfrac{1}{2}\,gt^2$ ... (2)

(1) en (2)

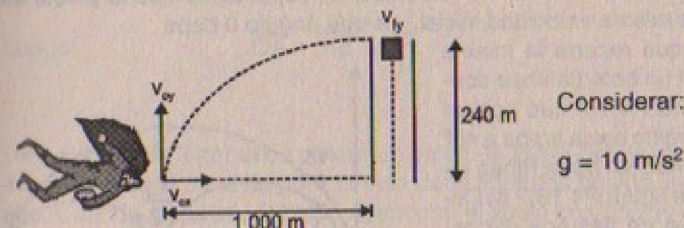
$$35 = 5\left(\frac{80}{v_{ox}}\right)^2 \Rightarrow v_o^2x = \frac{5\,(80)^2}{35} \Rightarrow v_{ox} = \sqrt{\frac{5\times 80^2}{35}}$$

$$\therefore \quad v_o = 30{,}24 \text{ m/s}$$

14. Supermán vuela al nivel de los árboles cuando ve que el elevador de la Torre Eiffel empieza a desplomarse (el cable se rompe). Su visión de rayos X le indica que Luisa Lane está en el interior. Si Supermán se encuentra a 1,00 km de distancia de la torre, y el elevador cae desde una altura de 240 m, ¿cuánto tarda Supermán en salvar a Luisa y cuál debe ser su velocidad promedio?

14A. Supermán vuela al nivel de los árboles cuando ve que el elevador de la Torre Eiffel empieza a desplomarse (el cable se rompe). Su visión de rayos X le indica que Luisa Lane está en el interior. Si Supermán se encuentra a una distancia d de la torre, y el elevador cae desde una altura h, ¿cuánto tarda Supermán en salvar a Luisa y cuál debe ser su velocidad promedio?

Resolución:



Considerar:

g = 10 m/s²

$$v_{ox}\,t = 1000 \text{ m} \Rightarrow v_{ox} = \frac{1\,000}{7{,}088} = 141{,}08 \text{ m/s}$$

$$v_{oy}\,t - \frac{1}{2}gt^2 = 240 \text{ m}$$

$$v_{fy}^{\,2} = v_{oy}^{\,2} - 2g\,H_{máx} \Rightarrow v_{oy} = \sqrt{2g(240)} = \sqrt{20\times 240}$$

$$\therefore \quad v_{oy} = 69{,}3 \text{ m/s}$$

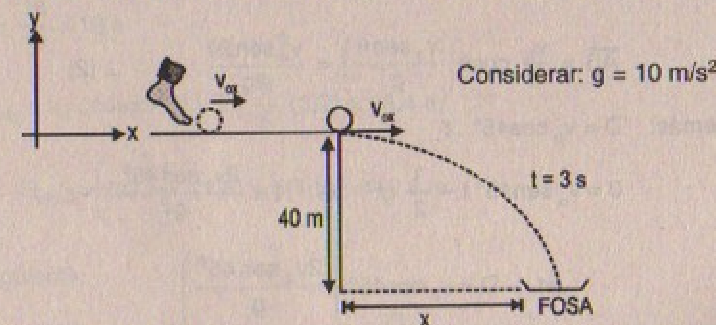
Luego: $69{,}3\,t - 5t^2 = 240 \Rightarrow 5t^2 - 69{,}3t + 240 = 0$

$\therefore$ t ≈ (+) 6,772 ó t ≈ 7,088 (tiempo que tarda)

Velocidad promedio:

$$v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(1\,000)^2 + (240)^2}}{7{,}088} = \frac{\sqrt{1\,057\,600}}{7{,}088} \approx 145{,}09 \text{ m/s}$$

15. Un jugador de *futbol soccer* patea una roca horizontalmente desde el borde de una plataforma de 40,0 m de altura en dirección a una fosa de agua. Si el jugador escucha el sonido del contacto con el agua. 3,0 s después de patear la roca, ¿cuál fue la velocidad inicial? Suponga que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.



Considerar: g = 10 m/s²

Demostración para el estudiante.

16. Un jugador de beisbol que lanza la pelota desde el jardín suele dejar que la pelota dé un bote, con base en la teoría de que la misma llegará más rápido de esta manera. Suponga que la pelota golpea el suelo a un ángulo θ y después rebota al mismo ángulo pero pierde la mitad de su velocidad. a) Suponiendo que la pelota siempre se lanza con la misma velocidad inicial, ¿a qué ángulo θ debe lanzarse para que recorra la misma distancia D con un bote (la línea continua en la figura P4.16) que con un lanzamiento dirigido hacia arriba a 45° que llega al blanco sin botar (línea interrumpida en la figura P4.16)? b) Determine la razón de tiempos correspondientes a lanzamientos de un bote y sin bote.

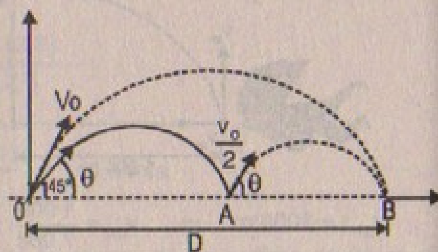


Figura P4.16

Resolución :

g: gravedad

Parte (a): $\overline{OA} + \overline{AB} = D$

Por mov. de proyectiles:

$\overline{OA} = v_o \cdot \cos\theta \cdot t_1$ Pero: $v_o \operatorname{sen}\theta \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$ $\therefore\ t_1 = \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$

$\overline{AB} = \frac{v_o}{2}\cos\theta \cdot t_2$ Pero: $\frac{v_o}{2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$ $\therefore\ t_2 = \frac{v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$

Luego: $\overline{OA} = v_o \cos\theta\left(\frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$ ... (1)

$\overline{AB} = \frac{v_o}{2}\cos\theta\left(\frac{v_o \operatorname{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}$ ... (2)

Además: $D = v_o \cos 45° \cdot t$

$0 = v_o \operatorname{sen} 45° \, t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{2v_o \operatorname{sen} 45°}{g}$

$\Rightarrow D = v_o \cos 45° \left(\frac{2v_o \operatorname{sen} 45°}{g}\right)$

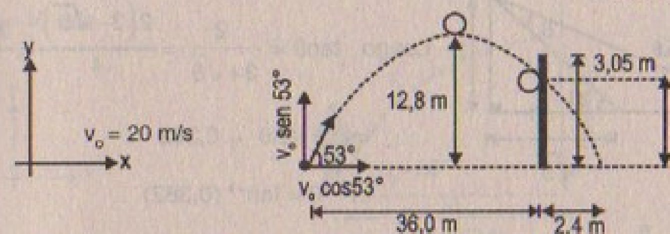
$\therefore\ D = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 90°}{g} = \frac{v_o^2}{g}$ ... (3)

Luego: $\overline{OA} + \overline{AB} = \frac{v_o^2}{g}$

17. Un pateador de lugar debe patear un balón de fútbol desde un punto a 36,0 m (casi 40 yardas) de la zona de gol y la bola debe librar los postes, que están a 3,05 m de alto. Cuando se patea, el balón abandona el suelo con una velocidad de 20,0 m/s y un ángulo de 53.0° respecto de la horizontal. a) ¿Por cuánta distancia el balón libra o no los postes? b) ¿El balón se aproxima a los postes mientras continúa ascendiendo o cuando va descendiendo?

Resolución :

Considerar: g = 10 m/s²



Parte (a)

$H_{máx} = v_o \cdot \operatorname{sen}53° \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Si $H_{máx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(10) \cdot t^2 = 20 \cdot \frac{4}{5} \cdot t \ \therefore\ t_{vuelo} = \frac{16}{5} \approx 3{,}2$ s

$\Rightarrow t_{ida} = \frac{16}{10} \approx 16$ s

$D_{x\,máx} = v_o \cdot \cos 53°(t) = 20\ \frac{3}{5}\ (3{,}2) = 38{,}4$ m

Luego: $H_{máx} = \left(20 \cdot \frac{4}{5}\right)(1{,}6) - 5(1{,}6)^2 = 12{,}8$ m

Por consiguiente:

Tenemos que: $36 = v_o \cos 53° \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{36}{12} = 3$ s

Entonces: $h = v_o \cdot \text{sen}53° \,(t_1) - \frac{1}{2}\,g\,t_1^2$

$$\Rightarrow \quad h = 16(3) - \frac{1}{2}(10)(3)^2 = 3 \text{ m}$$

$\therefore$ El balón chocará a una altura de 3 m por encima del suelo con el poste.

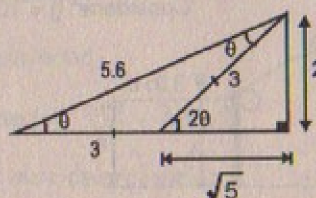
Parte (b)

El balón se aproxima a los postes cuando va descendiendo.

Luego: (1) + (2):

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \frac{v_o^2 \,\text{sen}\, 2\theta}{g} + \frac{v_o^2\,\text{sen}\,2\theta}{2g} = \frac{3\,v_o^2\,\text{sen}\,2\theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_o^2}{g} = \frac{3 v_o^2 \,\text{sen}\,2\theta}{2g} \qquad \therefore \quad \text{sen}2\theta = \frac{2}{3}$$



Luego $\tan\theta = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta \approx 0{,}382$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}382)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{2}{5{,}6} \approx \frac{5}{14}$$

Parte (b)

$$\frac{t}{t_1+t_2} = \frac{\dfrac{2v_o\,\text{sen}45°}{g}}{\dfrac{2v_o\,\text{sen}\theta}{g} + \dfrac{v_o\,\text{sen}\theta}{g}} = \frac{\dfrac{2v_o\,\text{sen}45°}{g}}{\dfrac{3v_o\,\text{sen}\theta}{g}}$$

$$\therefore \quad \frac{t}{t_1+t_2} = \frac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{3 \cdot \dfrac{5}{14}} = \frac{\sqrt{2}}{15} \times 14$$

$$\therefore \quad \text{Razón de } \frac{t}{t_1+t_2} \approx 1{,}32$$

18. Un bombero a 50,0 m de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura

P4.18. Si la velocidad inicial de la corriente es 40,0 m/s, ¿a qué altura el agua incide en el edificio?

18A. Un bombero, a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo θ_o sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.18. Si la velocidad inicial de la corriente es v_o, ¿a qué altura h el agua incide en el edificio?

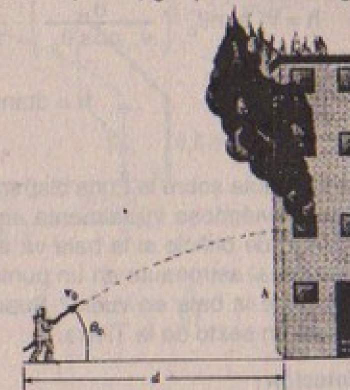
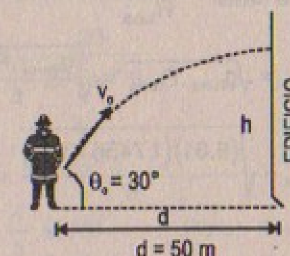


Figura P4.18

Resolución : (18)

$v_o = 40$ m/s





Considerar: $g = 10$ m/s²

Parte (a)

$$v_o \cos30° \cdot t = 50 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{50}{40 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} = 1{,}44 \text{ s}$$

Luego: $h = v_o \cdot \text{sen}30° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow \quad h = 40 \times \frac{1}{2}(1{,}44) - \frac{1}{2}(10)(1{,}44)^2$$

$$\therefore \quad h \approx 18{,}432 \text{ m}$$

Resolución : (18A)

Sabemos que:

$$d = v_o \cos\theta_o \cdot t \qquad \ldots (1) \qquad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_o \cos\theta_o}$$

$$h = v_o \,\text{sen}\theta_o \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots (2)$$

$$\Rightarrow \quad h = v_o\,sen\theta_o\left(\frac{d}{v_o\cos\theta_o}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_o\cos\theta_o}\right)^2$$

$$\therefore \quad h = d\tan\theta_o - \frac{gd^2}{2v_o^2\cos^2\theta_o}\ m$$

19. Un astronauta sobre la Luna dispara una pistola de manera que la bala abandona el cañón moviéndose inicialmente en una dirección horizontal. a) ¿Cuál debe ser la velocidad de orificio si la bala va a recorrer por completo el derredor de la Luna y alcanzará al astronauta en un punto 10,0 cm abajo de su altura inicial? b) ¿Cuánto permanece la bala en vuelo? Suponga que la aceleración en caída libre sobre la Luna es un sexto de la Tierra.

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $m_{bala}\cdot g_{luna} = \dfrac{m v_{bala}^2}{R_{luna}}$

$$\Rightarrow \quad v_{bala} = \sqrt{g_{luna}\cdot R_{luna}} = \sqrt{\frac{g_{tierra}\cdot R_{luna}}{6}}$$

$$\therefore \quad v_{bala} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(1{,}7456\times10^6)}{6}} = 1{,}69\times10^3\ \frac{m}{s} = 1{,}69\ km/s$$

Parte (b)

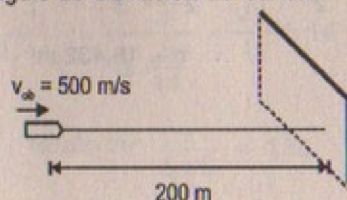
Sabemos que: $T_{vuelo\ bala} = \text{Período} = \dfrac{2\pi.R_{luna}}{v_{bala}}$

$$\Rightarrow \quad T_{vuelo\ de\ la\ bala} = \frac{2.\pi\times(1{,}7456\times10^6)}{1{,}69\times10^3} = 6\,490\ s$$

20. Un rifle se dirige horizontalmente al centro de un gran blanco a 200 m de distancia. La velocidad inicial de la bala es 500 m/s. a) ¿Dónde incide la bala en el blanco? b) Para golpear en el centro del blanco, el cañón debe estar a un ángulo sobre la línea de visión. Determine el ángulo de elevación del cañón.

Resolución:

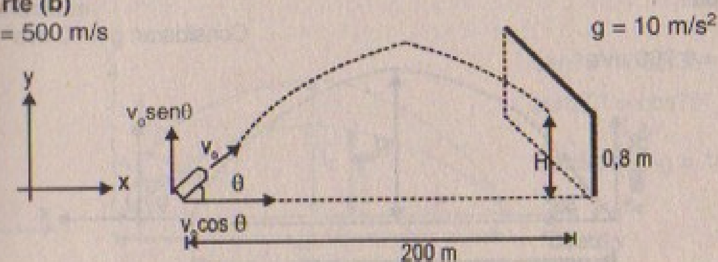
Parte (a)



$$200\ m = v_{ob}\times t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{200}{500} = 0{,}4\ s$$

Parte (b)

v_o = 500 m/s



$$v_o\cos\theta\,.\,t = 200 \Rightarrow \quad 500\cos\theta(t) = 200 \therefore \quad \cos\theta = \frac{2}{5t}$$

$$0{,}8 = v_o\,sen\theta\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}8 = v_o\,sen\theta\left(\frac{2}{5\cos\theta}\right) - 5\left(\frac{2}{5\cos\theta}\right)^2$$

Luego: $\quad 0{,}8 = \dfrac{500\times2}{5}\tan\theta - \dfrac{20}{25\cos^2\theta}$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{10} = 200.\frac{sen\theta}{\cos\theta} - \frac{4}{5\cos^2\theta}$$

Luego: $\quad \dfrac{4}{5} = 200\tan\theta - \dfrac{4}{5}\sec^2\theta \qquad$ Pero: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{5} = 200\tan\theta - \frac{4}{5}(1 + \tan^2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{5}\tan^2\theta + 200\tan\theta - \frac{8}{5} = 0$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta + 225\tan\theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{-225\pm\sqrt{50\,633}}{2} \approx \frac{225{,}02-225}{2} = 0{,}1$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}1)$$

21. Durante la Primera Guerra Mundial los alemanes tenían un cañón llamado Big Bertha que se usó para bombardear París. Los proyectiles tenían una velocidad inicial de 1,70 km/s a una inclinación de 55,0° con la horizontal. Para dar en el blanco, se hacían ajustes en relación con la resistencia del aire y otros efectos. Si ignoramos esos efectos, a) ¿cuál era el alcance de los proyectiles? b) ¿cuánto permanecían en el aire?

Resolución:

Considerar: $g = 10\ m/s^2$

$v_o = 1\,700$ m/s

Parte (a)

$Dx = v_o\ cos55° \cdot t_{(ida\ y\ vuelta)}$; $t_{ida} = t_{vuelta}$

$$H_{máx} = v_o\ sen55° \cdot (t_{ida}) - \frac{1}{2}g\,(t_{ida})^2$$

$$Si\ H_{máx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}g \cdot (t_{vuelo})^2 = v_o\ sen55°\ (t_{vuelo})$$

$$\therefore\ t_{vuelo} = \frac{2v_o\ sen55°}{g}$$

Luego: $Dx = v_o\cos 55°\,t_{vuelo}$

$$\Rightarrow\ Dx = \frac{v_o\cos 55° \times 2v_o\ sen\ 55°}{g}$$

Sabemos que: $sen55° \approx 0{,}832 \Rightarrow cos55° \approx 0{,}554$

En consecuencia: $Dx = \dfrac{2.\,(1\,700)^2\,(0{,}892)(0{,}554)}{10} = 266{,}42$ km

Parte (b)

$$t_{vuelo} = \frac{2v_o\ sen\ 55°}{g} = \frac{2}{10}(1\,700)(0{,}832)$$

$$\therefore\ t_{vuelo} = 282{,}88\ s$$

22. Una estrategia en las guerras con bolas de nieve es lanzarlas a un gran ángulo sobre el nivel del suelo. Mientras su oponente está viendo esta primera bola de nieve, usted lanza una segunda a un ángulo menor lanzada en el momento necesario para que llegue a su oponente ya sea antes o al mismo tiempo que la primera. Suponga que ambas bolas de nieve se lanzan con una velocidad de 25 m/s. La primera se lanza a un ángulo de 70° respecto de la horizontal. a) ¿A qué ángulo debe lanzarse la segunda bola de nieve para llegar al mismo punto que la primera? b) ¿Cuántos segundos después debe lanzarse la segunda bola después de la primera para que llegue al blanco al mismo tiempo?

Resolución:

$sen70° \approx 0{,}935$

$sen20° = cos70° \approx 0{,}35$

Considerar $g = 10\ m/s^2$

Parte (a)

$v_o cos\theta \cdot t_2 = D_x = v_o cos70° \cdot t_1$

$$h_1 = 0 = v_o sen70° t_1 - \frac{1}{2}g\,t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2v_o\ sen\ 70°}{g}$$

$$h_2 = 0 = v_o sen\theta \cdot t_2 - \frac{1}{2}g t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2v_o\ sen\ \theta}{g}$$

Luego: $v_o cos\theta \cdot t_2 = v_o cos70° t_1$

$$\Rightarrow\ v_o cos\theta\left(\frac{2v_o\ sen\,\theta}{g}\right) = v_o\cos 70°\left(\frac{2v_o\ sen70°}{g}\right)$$

$$\Rightarrow\ sen(2\theta) = 2(0{,}935)(0{,}353)$$

$$\therefore\ sen2\theta = 0{,}66 = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$$

Luego:

$$tan\theta = \frac{33}{50+37{,}6} = \frac{33}{87{,}6} \approx 0{,}38$$

$$\therefore\ \theta = tan^{-1}\,(0{,}38)$$

Parte (b)

Nos piden: $t_1 - t_2$

Pero: $t_1 = \dfrac{2v_o\ sen\ 70°}{g} = \dfrac{2}{10} \times 25(0{,}995) = 4{,}675$ s

$$t_2 = \frac{2v_o\ sen\ \theta}{g} = \frac{2}{10} \times \frac{25(33)}{93{,}6} \approx 1{,}763\ s$$

$$\therefore\ t_1 - t_2 = 4{,}675 - 1{,}763 = 2{,}912\ s$$

23. Un proyectil se dispara de tal manera que su alcance horizontal es igual a tres veces su máxima altura. ¿Cuál es el ángulo de disparo?

Resolución:

$$3H = v_o\cos\theta \cdot t_{vuelo} \quad \text{...(1)}$$

$$H = v_o\text{sen}\theta \cdot \left(\frac{t_{vuelo}}{2}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{t_{vuelo}}{2}\right)^2 \quad \text{...(2)}$$

$$t_{vuelo} = \frac{2v_o\text{sen}\theta}{g} \quad \text{...(3)}$$

(3) en (1)

$$3H = v_o\cos\theta\left(\frac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) \Rightarrow H = \frac{2}{3}\,\frac{v_o^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{g}$$

De (2)

$$H = v_o\text{sen}\theta\left(\frac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\,\frac{v_o^2\,\text{sen}\,\theta.\cos\theta}{g} = \frac{v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g^2}\right)$$

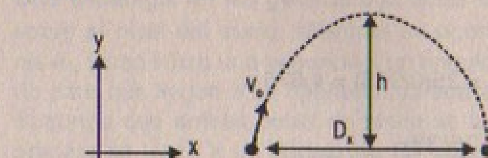
$$\frac{2}{3}\,\text{sen}\,\theta.\cos\theta = \text{sen}^2\theta - \frac{\text{sen}^2\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{2\cos\theta}{3} = \frac{\text{sen}\,\theta}{2} \qquad \therefore \tan\theta = \frac{4}{3}$$

En consecuencia: $\theta = \tan^{-1}(4/3) = 53°$

24. Una pulga puede brincar una altura vertical h. a) ¿Cuál es la máxima distancia horizontal que puede saltar? b) ¿Cuál es el tiempo en el aire en ambos casos?

Resolución:



Considerar g = 10 m/s²

Parte (a)

$v_o\cos\theta \cdot t = D_x \qquad h = v_o\text{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$$0 = v_o\text{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_{VUELO} = \frac{2v_o\,\text{sen}\theta}{g}$$

$$\therefore \quad D_x = v_o\cos\theta\left(\frac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) = \frac{v_o^2\,\text{sen}\,2\theta}{g} \quad \text{... (1)}$$

Parte (b)

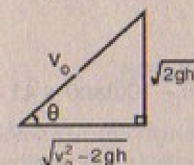
Tiempo en el aire, es el tiempo de vuelo:

Entonces: $\qquad t_{vuelo} = \dfrac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g} \qquad$ ....(2)

Hallando θ en función de «h»

$$h = (v_o\text{sen}\theta)\left(\frac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\cdot\frac{v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{2g}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{2\,gh}{v_o^2} = \text{sen}^2\theta$$

$$\therefore \quad \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2\,gh}}{v_o}$$

En consecuencia:

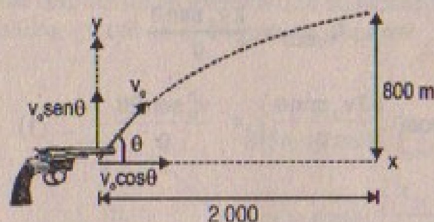
$$D_x = \frac{v_o^2\,\text{sen}\,2\theta}{g} = \frac{2v_o^2}{g}(\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta) = \frac{2}{g}v_o^2 \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{v_o} \cdot \frac{\sqrt{v_o^2 - 2gh}}{v_o}$$

$$\therefore \quad D_x = \frac{2}{g}\sqrt{2gh}\left(\sqrt{v_o^2 - 2gh}\right)$$

$$t_{vuelo} = \frac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g} = \frac{2v_o}{g}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{v_o}\right) = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}$$

25. Un cañón que tiene una velocidad de orificio de 1 000 m/s se usa para destruir un blanco en la cima de una montaña. El blanco se encuentra a 2 000 m del cañón horizontalmente y a 800 m sobre el suelo. ¿A qué ángulo, relativo al suelo, debe dispararse el cañón? Ignore la fricción del aire.

Resolución :



Considerar: $g = 10\ m/s^2$

$v_o = 1000\ m/s$

$$v_o\cos\theta\ .\ t = 2\,000 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\,000}{1\,000\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$800 = v_o\operatorname{sen}\theta\ .\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad 800 = (v_o\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{2}{\cos\theta}\right) - 5\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 8\times10^2 = 2\times10^3\ .\ \tan\theta - \frac{20}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 80 = 2\times10^2\tan\theta - 2(\sec^2\theta)$$

Sabemos que: $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

Luego: $\quad 40 = 100\tan\theta - 1 - \tan^2\theta \quad \Rightarrow \quad \tan^2\theta - 100\tan\theta + 41 = 0$

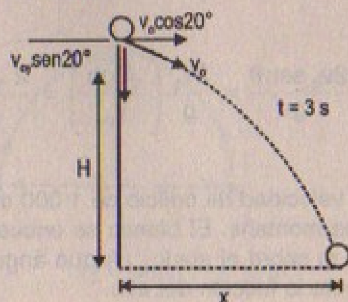
$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{100 \pm 99{,}2}{2}$$

Luego: $\quad \tan\theta = \dfrac{100 - 99{,}2}{2} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}4)$

26. Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8,00 m/s a un ángulo de 20,0° debajo de la horizontal. La pelota golpea el suelo 3,00 s después. a) ¿A qué distancia horizontal a partir de la base del edificio la pelota golpea el suelo? b) Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota. c) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota para alcanzar un punto 10,0 m abajo del nivel de lanzamiento?

Resolución :

$v_o = 8\ m/s$



sen20° ≈ 0,353

cos20° ≈ 0,935

Parte (a)

$$x = v_o\cos20°t$$

$$\Rightarrow \quad x = 8\cos20°(3) = 8\times(0{,}395)(3) = 22{,}44$$

$$\therefore \quad x = 22{,}44\ m$$

Parte (b)

$$h = v_o\operatorname{sen}20°(3) + \frac{1}{2}(10)(3)^2$$

$$\Rightarrow \quad h = (8)(3)(0{,}353) + 45 \approx 53{,}472$$

$$\therefore \quad h = 53{,}5\ m$$

Parte (c)

$$10 = v_o\operatorname{sen}20°(t) + 5t^2 \Rightarrow \quad 10 = 8\,(0{,}353)t + 5t^2$$

$$\therefore \quad 5t^2 + 2{,}8t - 10 = 0$$

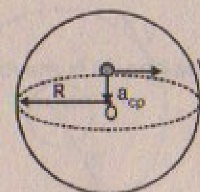
$$\Rightarrow \quad t = \frac{-2{,}8 \pm \sqrt{(2{,}8)^2 - 4(5)(-10)}}{10}$$

$$\therefore \quad t = \frac{-2{,}8 + 14{,}42}{10} = 1{,}162\ s$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

27. Si la rotación de la Tierra aumenta hasta el punto que la aceleración centrípeta fuera igual a la aceleración gravitacional en el ecuador, a) ¿cuál sería la velocidad tangencial de una persona sobre el ecuador, y b) cuánto duraría el día?

Resolución :



$R_{Tierra} = 6{,}4\times10^6\ m$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

Parte (a)

Por dato: $a_{cp} = g$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{R_T} = g \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{6{,}4\times10^6} = 9{,}8$$

$$\therefore \quad v^2 = 6{,}4\times10^6\times(9{,}8) = \sqrt{(6{,}4)(9{,}8)\times10^6}$$

Luego: $\quad v = 7{,}92\times10^3\ m/s$

Parte (b)

Sabemos que $v = \omega . R_T \Rightarrow V = \frac{2\pi}{T} . R_T$

$\therefore$ El período $= T = \frac{2\pi . R_T}{v} = \frac{2\,(3{,}14159)\left(6{,}4\times10^6\right)}{7{,}92\times10^3}$

$\therefore \quad T = 5{,}07 \times 10^3$ segundos $= 5\,000$ s

28. El joven David, quién venció a Goliat, practicaba con ondas antes de derribar al gigante. Descubrió que con una onda de 0,60 m de longitud, podía girarla a razón de 8,0 rev/s. Si hubiera incrementado la longitud a 0,90 m, podría haber hecho girar la onda sólo 6,0 veces por segundo. a) ¿Qué tasa de rotación da la velocidad lineal más alta? b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta a 8,0 rev/s c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta a 6,0 rev/s?

Resolución :



0,6 = Longitud

$f = 8$ rev/s $\Rightarrow \quad \omega = 2\pi . f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{s}\right)$

$\Rightarrow \quad (0{,}6)(8) = 4{,}8$ m/s $= v_L \qquad \therefore \quad f = \frac{4}{\pi}\,(2\pi) = 8\ s^{-1}$

$\omega_1 = 16\pi$ rad/s



0,9 = longitud ; $\quad f_2 = 6\ s^{-1}$; $\quad \omega.R = v$

$\Rightarrow \quad v_L = (0{,}9)(6) = 5{,}4$ m/s

$\omega_2 = 12\pi$ rad/s

Parte (a)

La que tiene mayor λ = longitud de onda es la que dá la mayor velocidad lineal, es decir la que tiene menor velocidad angular.

Parte (b)

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega.R)^2}{R} = \omega^2.R = \omega^2 . \frac{v}{\omega} = \omega.v = (16\pi)(4{,}8)$$

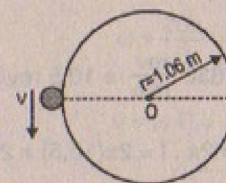
$\therefore \quad a_{cp} = 76{,}8\pi$ m/s^2

Parte (c)

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega.R)^2}{R} = \omega^2.R = \omega^2 . \frac{v}{\omega} = \omega.v = 12\pi \times (5{,}4) = 64{,}8\pi \text{ rad m/s}^2$$

29. Un atleta hace girar un disco de 1,00 kg a lo largo de una trayectoria circular de 1,06 m de radio. La velocidad máxima del disco es 20,0 m/s. Determine la magnitud de su aceleración radial máxima.

Resolución :



$v = 20$ m/s

$|\vec{a}_R| = \frac{v^2}{R} = \frac{(20)^2}{1{,}06}$

$\therefore \quad |\vec{a}_R| = 377{,}4$ m/s^2

30. A partir de la información en las guardas de este libro, calcule la aceleración radial de un punto sobre la superficie de la Tierra en el ecuador.

Resolución :

$a_R = \frac{v^2}{R_T}$

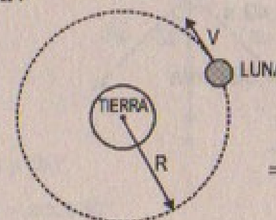
Pero: $\quad v = \omega . R = \frac{2\pi}{T} . R_T = \frac{2(3{,}14159)}{24(36)\times10^2}\,(6{,}4 \times 10^6)$

$\therefore \quad v = 70$ m/s

$\Rightarrow \quad a_R = \frac{70\times70}{6{,}4\times10^6} = 77 \times 10^{-5}$ m/s^2

31. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es aproximadamente circular, con un radio medio de $3{,}84 \times 10^8$ m. Se requieren 27,3 días para que la Luna complete una revolución alrededor de la Tierra. Encuentre a) la velocidad orbital media de la Luna y b) su aceleración centrípeta.

Resolución :



$R_M = 3{,}84 \times 10^8$ m

T = 27,3 días < > 655,2 horas

$\Rightarrow \quad T <> 2{,}36 \times 10^6$ s

Parte (a)

$$v_{ML} = \omega.R = \frac{2\pi}{T} . R = \frac{2(3{,}1416)}{2{,}36\times10^6} \times \left(3{,}84\times10^8\right)$$

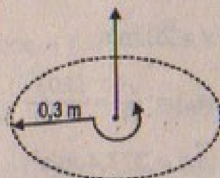
$\therefore \quad v_{ML} = 10{,}2 \times 10^2$ m/s $\simeq 1\,000$ m/s

Parte (b)

$$a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R} = \frac{10^6}{3{,}84\times10^8} = 0{,}26 \times 10^{-2} = 26 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

32. En el ciclo de centrifugado de una máquina lavadora, el tubo de 0,300 m de radio gira a una tasa constante de 630 rev/min. ¿Cuál es la máxima velocidad lineal con la cual el agua sale de la máquina?

Resolución :



$$f = 630\ \frac{rev}{min} = 10{,}5\ rev/s$$

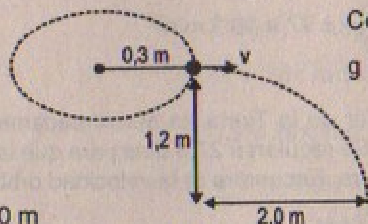
$$\omega = 2\pi\ .\ f = 2\pi(10{,}5) = 21\pi\ .\ rad/s$$

Luego: $v = \omega.R = 21\pi\ \frac{rad}{s} \times (0{,}300\ m)$

$\therefore\ v = 19{,}78\ m/s$

33. Una pelota en el extremo de una cuerda se hace girar alrededor de un círculo horizontal de 0,30 m de radio. El plano del círculo se encuentra 1,2 m sobre el suelo. La cuerda se rompe y la pelota golpea el suelo a 2,0 m del punto sobre la superficie directamente debajo de la posición de la pelota cuando la cuerda se rompió. Encuentre la aceleración centrípeta de la pelota durante su movimiento circular.

Resolución :



Considerar

$g = 10\ m/s^2$

$v(t) = 2{,}0\ m$

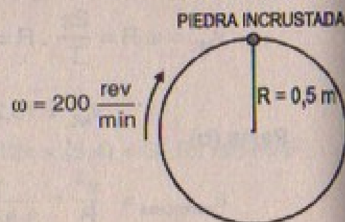
$$1{,}2 = \frac{1}{2}\ (10)t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2{,}4}{10} \quad \therefore\ t = 0{,}49\ s$$

Luego: $v(0{,}49) = 2 \quad \therefore\ v = 4{,}082\ m/s$

En consecuencia: $a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(4{,}082)^2}{0{,}3}$

$\therefore\ a_{cp} = 55{,}5\ m/s^2$

34. Una llanta de 0,500 m de radio gira a una tasa constante de 200 rev/min. Encuentre la velocidad y la aceleración de una pequeña piedra incrustada en una de las cuerdas sobre el borde exterior de la llanta.



$\omega = 200\ \frac{rev}{min}$

Resolución :

Nos piden: $v = ?$

$a = ?$

Sabemos que: $\omega = 200 \frac{rev}{min} \times \left(\frac{2\pi\ rad}{1\ rev}\right) \times \left(\frac{1\ min}{60\ s}\right)$

$$\therefore \quad \omega = \frac{20\pi}{3}\ rad/s$$

Luego: $v = \omega.R = \omega = \frac{20\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 10{,}472\ m/s$

Así también: $a = \sqrt{a_C^2 + a_N^2}\ = a_{cp}$

donde: $a_N = \frac{d}{dt}|v| = 0$

Entonces: $a_{cp} = a = \omega^2.R = \left(\frac{20}{3}\pi\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 219{,}3\ m/s^2$

ACELERACIÓN TANGENCIAL Y RADIAL

35. La figura P4.35 representa, en un instante dado, la aceleración total de una partícula que se mueve en la dirección de las manecillas del reloj en un círculo de 2,50 m de radio. En este instante de tiempo, encuentre a) la aceleración centrípeta, b) la velocidad de la partícula y c) su aceleración tangencial.

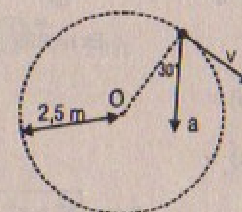
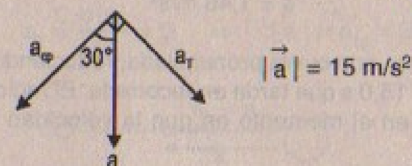


Figura P4.35

Resolución :



$|\vec{a}| = 15\ m/s^2$

Parte (a) y (b)

$a_{cp} = a\cos 30°$

$a_T = a\,sen 30°$

$$\Rightarrow \quad a_{cp} = 15\ .\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 13\ m/s^2$$

$$a_T = 15\ .\ \frac{1}{2} = 7{,}5\ m/s^2$$

Parte (c) $v = \sqrt{a_{cp}\ .\ R} \Rightarrow v = \sqrt{13(2{,}5)}$

$\therefore\ v \approx 5{,}7\ m/s$

36. Un punto sobre una tornamesa en rotación a 20,0 cm del centro acelera desde el reposo hasta 0,700 m/s en 1,75 s. En t = 1,25 s, encuentre la magnitud y dirección de: a) la aceleración centrípeta, b) la aceleración tangencial, y c) la aceleración total del punto.

Resolución:

Parte (a)

Sabemos: $a_{cp} = \dfrac{V^2}{R}$; $R = 0{,}2$ m

Además: (por dato)

$$v_f = v_o + a_T\ t \quad \Rightarrow \quad 0{,}7 = v_o + 1{,}75\ at$$

$$\therefore \quad a_T = \frac{0{,}7}{1{,}75} = 0{,}423\ m/s^2$$

Luego: $\underset{\text{En } t = 1,25}{v_f} = 0 + (0{,}423)(1{,}25) = 0{,}53$ m/s

Por consiguiente : $\underset{\text{En } t = 1,25}{a_{cp}} = \dfrac{(0{,}53)^2}{0{,}2} = 1{,}4\ m/s^2$

Parte (b)

$$a_T = 0{,}423\ m/s^2$$

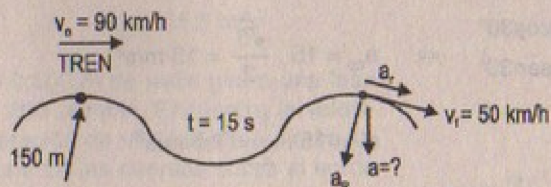
Parte (c)

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{(0{,}42)^2 + (1{,}4)^2}$$

$$\therefore \quad a = 1{,}46\ m/s^2$$

37. Un tren frena cuando libra una curva pronunciada, reduciendo su velocidad de 90,0 km/h a 50,0 km/h en los 15,0 s que tarda en recorrerla. El radio de la curva es 150 m. Calcule la aceleración en el momento en que la velocidad del tren alcanza 50,0 km/h.

Resolución:



Sabemos: $90\ \dfrac{km}{h} = 25$ m/s

$v_f = v_o - a_t \cdot t$ $\qquad 50\dfrac{km}{h} = 13{,}9$ m/s

$$\Rightarrow \quad -a_T = \frac{v_f - v_o}{t} \;\Rightarrow\; a_T = \frac{v_o - v_f}{t} = \frac{25 - 14}{15}$$

$$\therefore \quad a_T = 0{,}73\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad a_{cp} = \frac{(13{,}9)^2}{150} = 1{,}3\ m/s^2$$

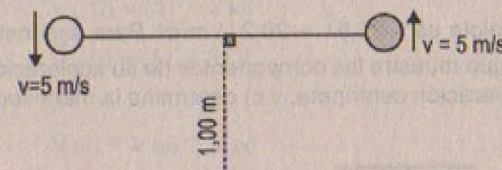
En consecuencia la aceleración en ese instante será:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{(0{,}73)^2 + (1{,}3)^2}$$

$$\therefore \quad a \approx 1{,}5\ m/s^2$$

38. Un péndulo de 1,00 m de largo se balancea en un plano vertical (figura P4.16). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales θ = 90° y θ = 270°, su velocidad es 5,00 m/s. a) Encuentre la magnitud de la aceleración centrípeta y de la tangencial en estas posiciones. b) Dibuje diagramas vectoriales para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. c) Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración total.

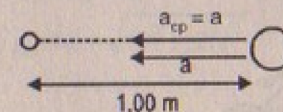
Resolución:



Parte (a) $\quad a_{cp} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{5^2}{1} = 25\ m/s^2$

$$a_T = \frac{d|v|}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = a_{cp} = 25\ m/s^2$$

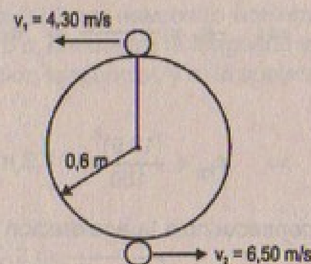
Parte (b)



Parte (c) $\quad \tan\theta = \dfrac{a_T}{a_{cp}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \tan^{-1}(0) = 0°$

39. Un estudiante une una pelota al extremo de una cuerda de 0,600 m de largo y luego la balancea en un círculo vertical. La velocidad de la pelota es 4,30 m/s en su punto más alto y 6,50 m/s en su punto más bajo. Determine su aceleración en: a) su punto más alto, y b) su punto más bajo.

Resolución:



Parte (a) Aceleración en el punto más alto:

$a_T = 0$

$$\Rightarrow \quad a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(4{,}30)^2}{0{,}600} = 30{,}82 \text{ m/s}^2$$

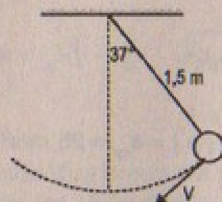
Parte (b) Aceleración en el punto más bajo:

$a_T = 0$

$$\Rightarrow \quad a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(6{,}5)^2}{0{,}600} = 70{,}42 \text{ m/s}^2$$

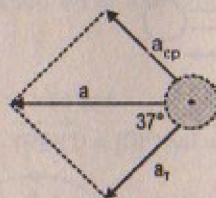
40. Una pelota oscila en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de 1,50 m de largo. Cuando se encuentra 36,9° más allá del punto más bajo en su trayectoria, la aceleración de la pelota es $(-22{,}5\hat{i} + 20{,}2\hat{j})$ m/s². Para ese instante, a) dibuje un diagrama vectorial que muestre las componentes de su aceleración, b) determine la magnitud de su aceleración centrípeta, y c) determine la magnitud y dirección de su velocidad.

Resolución:



$$\vec{a} = (-22{,}5\hat{i} + 20{,}2\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

Parte (a)



Parte (b) $a_{cp} = a\,\text{sen}37° = \frac{3}{5}\sqrt{(-22{,}5)^2 + (20{,}2)^2}$

$\therefore \quad a_{cp} = 18{,}1 \approx 18 \text{ m/s}^2$

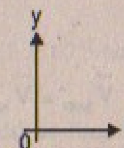
Parte (c) $18 = \frac{V^2}{1{,}5} \Rightarrow V^2 = 18 \times (1{,}5)$

$\therefore \quad |V| = \sqrt{18\times(1{,}5)} \approx 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ m/s}$

VELOCIDAD RELATIVA Y ACELERACIÓN RELATIVA

41. Heather en su "Corvette" acelera a razón de $(3{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j})$ m/s², en tanto que Jill en su "Jaguar" acelera a $(1{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ m/s². Ambas parten del reposo en el origen de un sistema de coordenadas xy. Después de 5,0 s, a) ¿cuál es la velocidad de Heather respecto de Jill, b) cuál es la distancia que la separa, y c) cuál es la aceleración de Heather respecto de Jill?

Resolución:



$\vec{r}_{Heather} = (3\hat{i} - 2\hat{j})\,t^2$

$\vec{r}_{JILL}(t) = (1\hat{i} + 3\hat{j})t^2$

Parte (a) $\vec{V}_H(t) = (3\hat{i} - 2\hat{j})t$

$\vec{V}_J(t) = (1\hat{i} + 3\hat{j})t$

Luego: $\vec{V}_{H/J} = \vec{V}_{H/O} - \vec{V}_{J/O}$

$\Rightarrow \quad \vec{V}_{H/J} = (3\hat{i} - 2\hat{j})t - (1\hat{i} + 3\hat{j})t$

$\vec{V}_{H/J} = (2\hat{i}t - 5t\hat{j})$m/s

$\therefore \quad \vec{V}_{H/J}(5) = (10\hat{i} - 25\hat{j})$ m/s

Luego: $|\vec{V}_{H/J}(5)| = \sqrt{10^2 + (25)^2} = \sqrt{725} = 26{,}9$ m/s

Parte (b) $\vec{r}_H = \frac{1}{2}(3\hat{i} - 2\hat{j})(25) = (\frac{75}{2}\hat{i} - 25\hat{j})$ m

$\vec{r}_J = \frac{1}{2}(1\hat{i} + 3\hat{j})(25) = (\frac{25}{2}\hat{i} + \frac{75}{2}\hat{j})$ m

Luego: $\vec{r}_H - \vec{r}_J = (\frac{75}{2}\hat{i} - 25\hat{j}) - (\frac{25}{2}\hat{i} + \frac{75}{2}\hat{j})$

$\Rightarrow \quad \vec{r}_H - \vec{r}_J = 25\hat{i} - \frac{125}{2}\hat{j}$ m

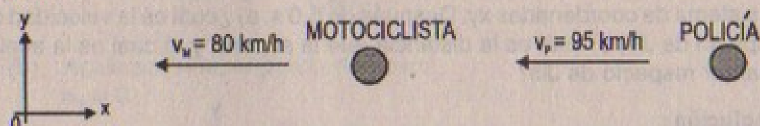
Por consiguiente la distancia de separación será:

$$|\vec{r}_H - \vec{r}_J| = \sqrt{(25)^2 + (-125/2)^2} = 67{,}3 \text{ m}$$

Parte (c) $\vec{a}_{H/J} = (2\hat{i} - 5\hat{j})\ \text{m/s}^2 \Rightarrow |\vec{a}_{H/J}| = \sqrt{29} = 5.4\ \text{m/s}^2$

42. Un motociclista que viaja rumbo al oeste a 80,0 km/h es perseguido por un auto de policía que se desplaza a 95,0 km/h. ¿Cuál es la velocidad de a) el motociclista respecto del auto del policía, y b) la de éste relativa al motociclista?

Resolución :

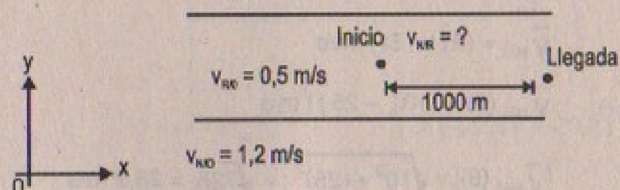


Parte (a) $\vec{V}_{M/P} = \vec{V}_{M/0} - \vec{V}_{P/0} \Rightarrow \vec{V}_{M/P} = 80 - 95 = -15$ km/h

Parte (b) $\vec{V}_{P/M} = \vec{V}_{P/0} - \vec{V}_{M/0} \Rightarrow \vec{V}_{P/M} = 95 - 80 = 15$ km/h

43. Un río tiene una velocidad estable de 0,500 m/s. Un estudiante nada aguas arriba una distancia de 1,00 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar a una velocidad de 1,20 m/s en agua sin corriente, ¿cuánto tiempo dura su recorrido? Compare éste con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera quieta.

Resolución :



Sabemos: $v_{N/R} = v_{N/0} - v_{R/0} \Rightarrow v_{N/R} = 1{,}2 - 0{,}5 = 0{,}7$ m/s

El estudiante en total recorre 2 km:

$$\Rightarrow v_{N/R} \cdot (t_{total}) = 2\,000 \text{ m}$$

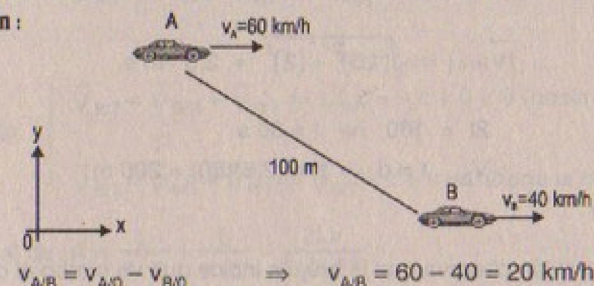
$$\therefore t_{total} = \frac{2\,000}{0{,}7} = 2\,857 \text{ s}$$

Si no hubiera corriente:

$$\Rightarrow v_{N/0}\,(t_{total}) = 2\,000 \text{ m} \quad \therefore t_{total} = \frac{2\,000}{1{,}2} = 1\,667 \text{ s}$$

44. ¿Cuánto tiempo tarda un automóvil que viaja en el carril izquierdo a 60,0 km/h para alcanzar a otro automóvil (que lleva ventaja) en el carril derecho que se mueve a 40,0 km/h, si las defensas delanteras de los autos están inicialmente separadas 100 m?

Resolución :

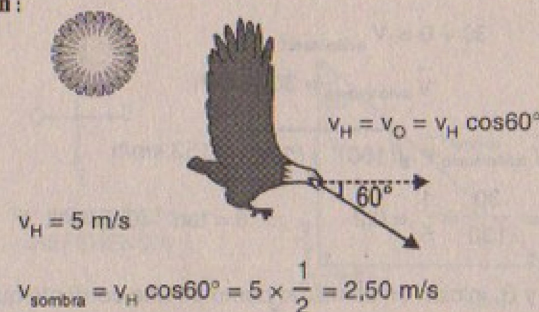


$v_{A/B} = v_{A/0} - v_{B/0} \Rightarrow v_{A/B} = 60 - 40 = 20$ km/h

Luego: $v_{A/B}t = 0{,}1$ km $\quad\therefore\quad t = \frac{0{,}1}{20} = 5 \times 10^{-3}$ horas

45. Cuando el Sol está directamente arriba, un halcón se mueve hacia el suelo a una velocidad de 5,00 m/s. Si la dirección de su movimiento está a un ángulo de 60° debajo de la horizontal, calcule la velocidad de su sombra que se mueve a lo largo del suelo.

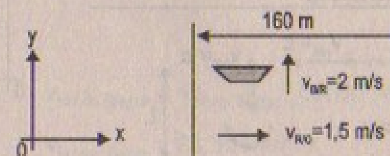
Resolución :



$$\Rightarrow v_{sombra} = v_H \cos 60° = 5 \times \frac{1}{2} = 2{,}50 \text{ m/s}$$

46. Un bote cruza un río de ancho w = 160 m en el cual la corriente tiene una velocidad uniforme de 1,50 m/s. El piloto mantiene un rumbo (es decir, la dirección en la que el bote apunta) perpendicular al río y una reducción de velocidad constante de 2,00 m/s relativa al agua. a) ¿Cuál es la velocidad del bote respecto de un observador estacionario en la orilla? b) ¿Qué tan lejos, aguas abajo, está el bote de su posición inicial cuando alcanza la orilla opuesta?

Resolución :



Parte (a)

En x: $\vec{V}_{B/o} = \vec{V}_{B/R} + \vec{V}_{R/o} \Rightarrow \vec{V}_{B/o} = 1{,}5\hat{i}$ m/s

En y: $\vec{V}_{B/o} = \vec{V}_{B/R} + \vec{V}_{R/o} \Rightarrow \vec{V}_{B/o} = 2\hat{j}$ m/s

$$\therefore\ |\vec{V}_{B/o}| = \sqrt{(1{,}5)^2 + (2)^2} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Parte (b) $2t = 160 \Rightarrow t = 80$ s

Luego: $V_{B/o} \cdot t = d \Rightarrow d = (2{,}5)(80) = 200$ m

Está a 200 m

47. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va rumbo al oeste. La velocidad del avión relativa al aire es de 150 km/h. Si hay un viento de 30,0 km/h hacia el norte, encuentre la velocidad del avión relativa al suelo.

Resolución:

$$\vec{V}_{viento/suelo} + \vec{V}_{avión/viento} = \vec{V}_{avión/suelo}$$

En x: $0 + 150 = \vec{V}_{avión/suelo}$

$\vec{V}_{avión/suelo} = 150\hat{i}$ km/h

En y: $30 + 0 = \vec{V}_{avión/suelo}$

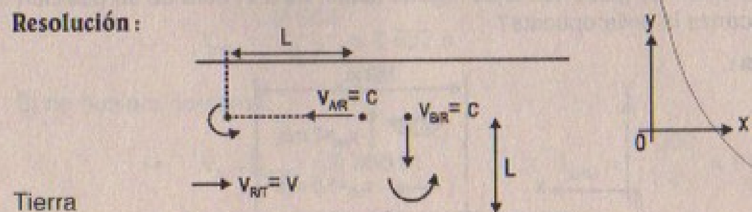
$\vec{V}_{avión/suelo} = 30\hat{j}$ km/h

Luego: $\vec{V}_{avión/suelo} = \sqrt{(150)^2 + (30)^2} = 153$ km/h

En dirección $\tan\theta = \dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 \quad \therefore\ \theta = \tan^{-1}(0{,}2) = 11{,}3^0$

48. Dos nadadores, A y B, inician en el mismo punto en una corriente que fluye con una velocidad v. Ambos se mueven a la misma velocidad c relativa a la corriente, donde c > v. Él nada aguas abajo una distancia L y después la misma distancia aguas arriba, en tanto que B nada directamente perpendicular al flujo de corriente una distancia L y después regresa la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. ¿Cuál nadador regresa primero? (Nota: Primero adivine la respuesta.)

Resolución:



Para «A»

Inicialmente: $\vec{V}_{A/T} = \vec{V}_{R/T} + \vec{V}_{A/R} \Rightarrow \vec{V}_{A/T} = v - c < 0$ (en contra de la corriente)

Después: $\vec{V}_{A/T} = \vec{V}_{R/T} + \vec{V}_{A/R} \Rightarrow \vec{V}_{A/T} = v + c > 0$ (a favor)

Para «B»

Inicialmente
$$\begin{cases} \vec{V}_{B/T} = \vec{V}_{B/R} + \vec{V}_{R/T} \Rightarrow \vec{V}_{B/T} = -c + 0 < 0 \text{ (hacia abajo) en y} \\ \vec{V}_{B/T} = \vec{V}_{B/R} + \vec{V}_{R/T} \Rightarrow \vec{V}_{B/T} = c + v > 0 \text{ (hacia la derecha) en x} \end{cases}$$

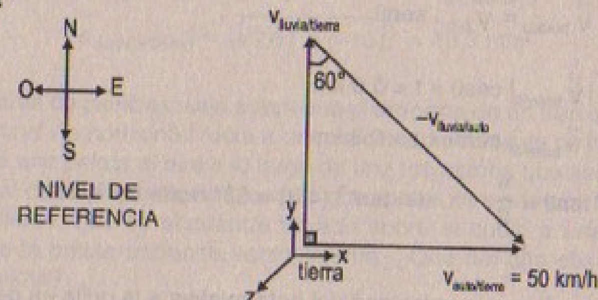
Tiempo total de $A = \dfrac{L}{v-c} + \dfrac{L}{v+c} = \dfrac{2Lv}{|c^2 v^2|}$

Tiempo total de $B = \dfrac{2L}{|v_B|} + \dfrac{2L}{\sqrt{2c^2 + v^2 + 2cv}}$

49. Un auto viaja con dirección este y una velocidad de 50 km/h. Está cayendo lluvia verticalmente con relación a la tierra. Las gotas de lluvia sobre las ventanas laterales del auto forman un ángulo de 60,0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia relativa a: a) el auto y b) la tierra.

Resolución:

Sea:



Parte (a)

$$\frac{V_{lluvia/auto}}{50} = \frac{\text{hipotenusa}}{50} = \csc 60°$$

$\Rightarrow\ V_{lluvia/auto} = 50 \times \csc 60° = 50 \times (1{,}1547)$

$\therefore\ V_{lluvia/auto} = 57{,}735$ km/h

Parte (b)

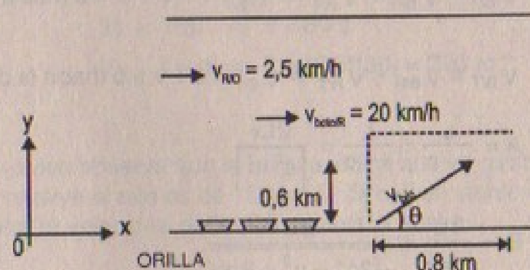
$$\frac{V_{auto/tierra}}{V_{lluvia/tierra}} = \tan 60°$$

$\Rightarrow\ V_{lluvia/tierra} = V_{auto/tierra} \cdot \cot 60° = (50)(0{,}5773)$

$\therefore\ V_{lluvia/tierra} = 28{,}865$ km/k

50. Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo arrastrado por una corriente que tiene una velocidad de 2,50 km/h. El niño se encuentra a 0,600 km de la orilla y a 0,800 km aguas arriba de un atracadero de botes cuando un bote de rescate arranca para salvarlo. a) Si el bote avanza a su velocidad máxima de 20,0 km/h relativa al agua, ¿qué dirección relativa a la orilla debe tomar el piloto? b) ¿Qué ángulo forma la velocidad del bote con la orilla? c) ¿Cuánto tarda el bote en llegar a salvarlo?

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $\vec{V}_{río/o} + \vec{V}_{bote/río} = \vec{V}_{bote/o}$

En (x) $\vec{V}_{bote/o} = \vec{V}_{R/o} + \vec{V}_{bote/o} = 2,5 \text{ km/h} + 20 \text{ km/h} = 22,5 \text{ km/h} = \vec{V}_{b/o} \cos\theta$

En (y): $\vec{V}_{bote/o} = \vec{V}_{b/o} \cdot \text{sen}\theta$

Pero: $|\vec{V}_{bote/o}| \cos\theta \times t = 0,6 \text{ km}$

$|\vec{V}_{bote/o}| \text{sen}\theta \times t = 0,3 \text{ km}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{4}{3} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}(4/3) = 53°$ norte del este.

Parte (b)

El ángulo que forma la velocidad del bote relativa a la orilla es de 53°.

Parte (c)

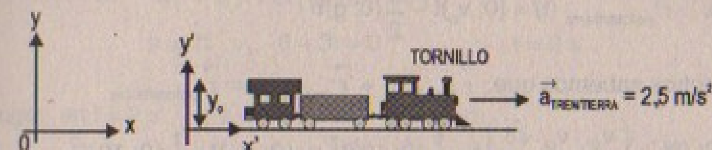
Sabemos que: de (x)

$22,5 \text{ km/h} = |\vec{V}_{bote/o}|$ en x

$\Rightarrow (22,5 \text{ km/h})\, t = 0,8 \text{ km} \qquad \therefore t = \dfrac{0,8}{22,5} = 0,036$ horas

51. Un tornillo cae del techo de un tren que está acelerando en dirección norte a una tasa de 2,50 m/s². ¿Cuál es la aceleración del tornillo relativa a: a) el vagón del tren? b) ¿la tierra?

Resolución :



Parte (a) $\vec{r}_{tren/tierra}(t) = \dfrac{1}{2}(2,5; 0)t^2$

$\vec{r}_{tornillo/tren}(t) = -y_o + \dfrac{1}{2}(0; -g)t^2$

Derivando 2 veces las respectivas posiciones:

$\vec{a}_{tren/tierra} = (2,5; 0) \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{tornillo/tren} = (0; -g) \text{ m/s}^2$

$\therefore$ La aceleración del tornillo/tren = 10 m/s² en módulo

y $(0\hat{i} - 10\hat{j})$ m/s² en vector

Parte (b)

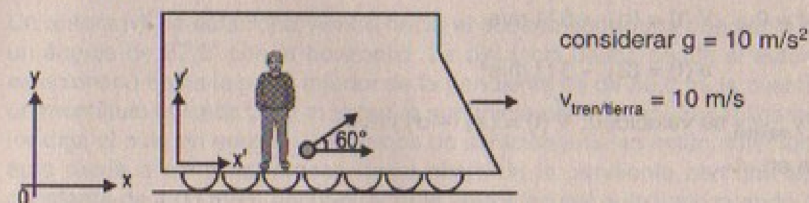
Sabemos: $\vec{a}_{tren/tierra} + \vec{a}_{tornillo/tren} = \vec{a}_{tornillo/tierra}$

$\Rightarrow (2,5; 0) + (0; -10) = (2,5; -10) = \vec{a}_{tornillo/tierra}$

$\therefore |\vec{a}_{tornillo/tierra}| = \sqrt{(2,5)^2 + (-10)^2} = 10,3 \text{ m/s}^2$

52. Una estudiante de ciencias viaja sobre una plataforma de un tren que se desplaza a lo largo de una vía horizontal recta a una velocidad constante de 10,0 m/s. La estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que según ella forma un ángulo inicial de 60,0° con la horizontal y que estará alineada con la vía. El profesor de la estudiante, que se encuentra parado sobre el suelo a una corta distancia, observa que la pelota asciende verticalmente. ¿Qué tan alto observa ella que asciende la pelota?

Resolución :



$\vec{r}_{pelota/tren}(t) = (v_o \cos\theta; v_o \text{sen}\theta)t - \dfrac{1}{2}(0; g)\, t^2$

$\vec{r}_{tren/tierra}(t) = (10; 0)t$

Por dato: $\vec{r}_{pelota/tierra}(t) = (0;\ v_o)t - \frac{1}{2}(0;\ g)t^2$

Pero nosotros sabemos que: $\vec{r}_{tren/tierra} + \vec{r}_{pelota/tren} = \vec{r}_{pelota/tierra}$

$$(10;\ 0)t + \left(\frac{v_o}{2};\ \frac{v_o.\sqrt{3}}{2}\right)t - \frac{1}{2}(0;\ 10)t^2 = (0;\ v_o)t - \frac{1}{2}(0;\ 10)t^2$$

$$\left(10 + \frac{v_o}{2};\ \frac{v_o\sqrt{3}}{2}\right)t - (0;\ 5)t^2 = (0;\ v_o)t - (0;\ 5)t^2$$

Entonces: $10 + \frac{v_o}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_o = +20$ m/s

Luego $H_{máx}$ será: $H_{máx} = 20\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}(10)t^2$

Pero: $t = \frac{v_o\, sen\theta}{g} = \left(\frac{20}{10}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ s

$$\Rightarrow H_{máx} = 20\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\right) - 5\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore H_{máx} = 15 \text{ m}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

53. En t = 0 una partícula parte del origen con una velocidad de 6,00 m/s en la dirección y positiva. Su aceleración está dada por $a = (2{,}00\hat{i} - 3{,}00\hat{j})$ m/s². Cuando la partícula alcanza su coordenada "y" máxima, su componente de velocidad "y" es cero. En este instante, encuentre: a) la velocidad de la partícula y b) sus coordenadas x e y.

Resolución:

En t = 0 $\vec{V}(t) = (0\hat{i} + 6\hat{j})$ m/s

$\vec{a}(t) = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m/s²

En $y_{máxima}$ su velocidad: $\vec{V}(t) = (a\hat{i} + 0\hat{j})$ m/s

Sea en «t»

Parte (a) $\vec{V}_f = \vec{v}_i + \vec{a}.t$

$\Rightarrow a\hat{i} + 0\hat{j} = (0\hat{i} + 6\hat{j}) + (2\hat{i} - 3\hat{j})(t)$

$\Rightarrow a\hat{i} + 0\hat{j} = 2t\hat{i} + (6 - 3t)\hat{j}$

$\therefore a = 2t \wedge 6 - 3t = 0 \qquad \therefore t = 2$ s

Luego: en t = 2 s $\quad v_f = v(2) = (4\hat{i} + 0\hat{j})$ m/s

Luego: $|\vec{V}_f| = \sqrt{4^2} = 4$ m/s

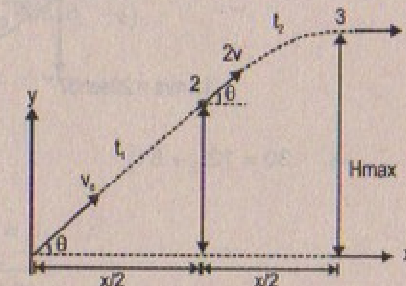
Parte (b)

Sus coordenadas x e y son: $\vec{V}_x(t) = 4\hat{i}$ m/s

$\vec{V}_y(t) = 0\hat{j}$ m/s

54. La velocidad de un proyectil cuando alcanza su altura máxima es la mitad de la velocidad cuando el proyectil se encuentra a la mitad de su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección inicial?

Resolución:



$x = v_o\cos\theta\,.\,t \Rightarrow t = \frac{x}{v_o\cos\theta}$

Pero $t = t_1 + t_2$

$\frac{x}{2} = v_o\cos\theta\,.\,t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{v_o\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{x}{v_o\cos\theta} = \frac{x}{2v_o\cos\theta} + \frac{x}{4v\cos\theta}$

$\frac{x}{2} = 2v_o.\cos\theta.t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{x}{4v\cos\theta} \qquad \therefore 2v = v_o$

$2v\cos\theta = v \Rightarrow \cos\theta = 1/2 \qquad \therefore \theta = \cos^{-1}(0{,}5) = 60°$

55. Un automóvil se estaciona viendo hacia el océano sobre una pendiente que forma un ángulo de 37,0° con la horizontal. La distancia desde donde el automóvil está estacionado hasta la parte inferior de la pendiente es de 50,0 m, la cual termina en un montículo ubicado 30,0 m sobre la superficie del océano. El negligente conductor deja el auto en neutral y los frenos de estacionamiento están defectuosos. Si el auto rueda a partir del reposo hacia abajo de la pendiente con una aceleración constante de 4,00 m/s², encuentre: a) la velocidad del auto justo cuando alcanza el montículo y el tiempo que tarda en llegar ahí, b) la velocidad del auto justo cuando se hunde en el océano, c) el tiempo total que el auto está en movimiento, y d) la posición del auto relativa a la base del montículo justo cuando entra al agua.

Resolución :

Parte (a) $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$

$\Rightarrow \quad v_f^2 = 0 + 2(4)(50)$

$\therefore \quad v_1 = 20 \text{ m/s}$

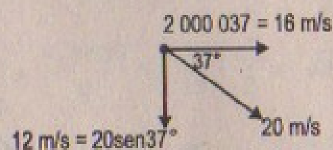
Parte (b) $v_f = v_o + at_1$

$\Rightarrow \quad 20 = 4t$

$\therefore \quad t = 5 \text{ s}$

Parte (c) Tiempo total = $t_1 + t_2$

Hallando «t_2»



considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$

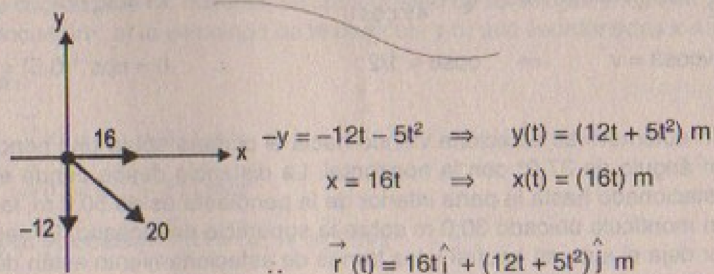
$\Rightarrow \quad 30 = 12t_2 + 5t_2^2 \qquad \therefore \quad 5t_2^2 + 12t_2 - 30 = 0$

$$\therefore \quad t_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{744}}{10}$$

En consecuencia: $\quad t_2 = \dfrac{-12 \pm 27{,}3}{10} = 1{,}53 \text{ s}$

Luego: $\quad$ tiempo total: $t_1 + t_2 = 5 + 1{,}53 = 6{,}53 \text{ s}$

Parte (d)



$-y = -12t - 5t^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = (12t + 5t^2) \text{ m}$

$x = 16t \quad \Rightarrow \quad x(t) = (16t) \text{ m}$

$$\therefore \quad \vec{r}(t) = 16t\,\hat{i} + (12t + 5t^2)\,\hat{j} \text{ m}$$

56. Se dispara un proyectil hacia arriba de una pendiente (con un ángulo ϕ) con una velocidad inicial v_o a un ángulo θ_o respecto de la horizontal ($\theta_o > \phi$), como se muestra en la figura P4.56.

a) Muestre que el proyectil recorre una distancia d hacia arriba de la pendiente, donde:

$$d = \frac{2v_o^2 \cos\theta_o \,\text{sen}(\theta_o - \phi)}{g\cos^2\phi}$$

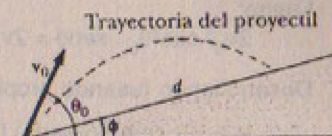
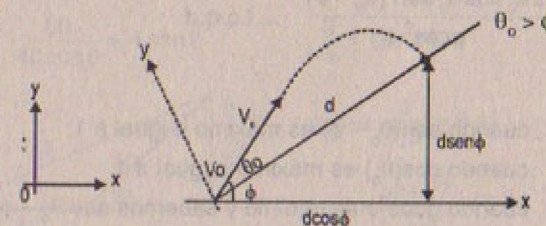


Figura P4.56

b) ¿Para qué valor de θ_o es d máxima y cuál es el valor máximo?

Resolución :



Sabemos

$$v_o\cos(\theta_o - \phi).t = d \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_o\cos(\theta_o - \phi)}$$

$$H_{máx} = v_o\text{sen}(\theta_o - \phi)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

Pero si $H_{máx} = 0$:

$$\Rightarrow \quad 0 = v_o\text{sen}(\theta_o - \phi)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t = \frac{2v_o\,\text{sen}(\theta_o - \phi)}{g}$$

Luego: $\quad \dfrac{2v_o\,\text{sen}(\theta_o - \phi)}{g} = \dfrac{d}{v_o\cos(\theta_o - \phi)}$

$$\therefore \quad d = \frac{2v_o^2\cos(\theta_o - \phi).\text{sen}(\theta_o - \phi)}{g} \qquad ...(1)$$

Por otro lado:

$$v_o\cos\theta_o t = d\cos\phi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d\cos\phi}{v_o\cos\theta_o}$$

$$d\text{sen}\phi = v_o\text{sen}\theta_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad d\text{sen}\phi = v_o\text{sen}\theta_o\left(\frac{d\cos\phi}{v_o\cos\theta_o}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{d\cos\phi}{v_c\cos\theta_c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad d\text{sen}\phi = \frac{\text{sen}\,\theta_o}{\cos\,\theta_o}\,.\,d\cos\phi - \left(\frac{1}{2}g\right)\frac{d^2.\cos^2\phi}{v_o^2.\cos^2\theta_o}$$

Luego:

$$2v_o^2\cos^2\theta_o \cdot \operatorname{sen}\phi = 2v_o^2\operatorname{sen}\theta_o \cdot \cos\theta_o \cdot \cos\phi - gd\cos^2\phi$$

Desarrollando (usando propiedades trigonométricas)

$$d = \frac{2v_o^2(\cos\theta_o)\left[\operatorname{sen}\theta_o.\cos\phi - \cos\theta_o.\operatorname{sen}\phi\right]}{g\cos^2\phi}$$

$$d = \frac{2v_o^2\cos\theta_o\operatorname{sen}(\theta_o - \phi)}{g\cos^2\phi} \quad \text{... l.q.q.d}$$

Parte (b)

d es máximo: cuando $\operatorname{sen}(\theta_o - \phi)$ es máximo e igual a 1;
cuando $\cos(\theta_o)$ es máximo e igual a 1
cuando $g\cos^2\phi$ es mínimo y sabemos que $\theta_o - \phi > 0$

Entonces tenemos:

$\operatorname{sen}(\theta_o - \phi) = 1 \Rightarrow \theta_o - \phi = 90°$

$\cos\theta_o = 1 \Rightarrow \theta_o = 0\ ;\ 360°$

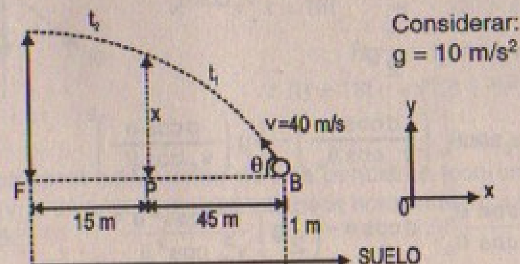
$\cos\theta_o = 360°$ cumple $\Rightarrow 360° - \phi = 90° \quad \therefore\ \phi = 270°$

Luego: $$d = \frac{2v_o^2(1)(1)}{g(-1)^2}$$

$$\therefore\ d = \frac{2v_o^2}{g}$$

57. Un bateador conecta una pelota de beisbol lanzada 1,00 m sobre el suelo, imprimiendo a la pelota una velocidad de 40,0 m/s. La línea resultante es capturada en vuelo por el fildeador izquierdo a 60,0 m del plato del *home* con su guante 1,00 m sobre el suelo. Si el parador en corto, a 45,0 m del plato de *home* y en línea con el batazo, brincara en línea recta hacia arriba para capturar la pelota en lugar de dejar la jugada al fildeador izquierdo, ¿cuánto tendría que elevar su guante sobre el suelo para capturar la pelota?

Resolución:



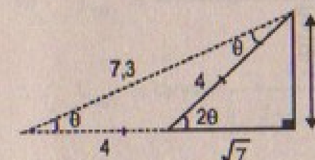
Considerar: $g = 10\ m/s^2$

$45 = 40\cos\theta \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{45}{40\cos\theta}$

$15 = 40\cos\theta \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{15}{40\cos\theta}$

$$t_1 + t_2 = \frac{v_o\operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{40\operatorname{sen}\theta}{g} = 4\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{60}{40\cos\theta} = 4\operatorname{sen}\theta \qquad \therefore\ \frac{3}{4} = \operatorname{sen}2\theta$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{7,3} \approx 0,41$$

$$\cos\theta = \frac{4+\sqrt{7}}{7,3} \approx 0,81$$

$x = 40\operatorname{sen}\theta \cdot t_1 - 5t_1^2$

$$\Rightarrow x = 40(0,41)\frac{(45)}{(40)(0,81)} - 5\left(\frac{45}{40(0,81)}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = 20,3 - 7,7 = 12,6$$

$\therefore\ x = 12,6$ m (por encima de un metro del suelo)

58. Un jugador de basketbol de 2,00 m de altura lanza un tiro a la canasta desde una distancia horizontal de 10,0 m, como en la figura P4.58. Si tira a un ángulo de 40° con la horizontal, ¿con qué velocidad inicial debe tirar de manera que el balón entre al aro sin golpear el tablero?

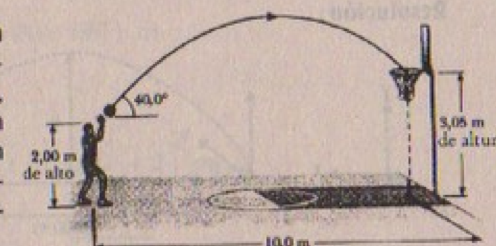


Figura P4.58

Resolución:

considerar $g = 10\ m/s^2$

$\cos 40° \approx 0,76$

$\operatorname{sen}40° \approx 0,642$

$10,0 = v_o\cos 40° \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{10}{v_o\cos 40°}$

$1,05 = v_o\operatorname{sen}40° \cdot t - 5t^2$

$$\Rightarrow \quad 1{,}05 = v_o\,\text{sen}40°\left(\frac{10}{v_o\cos 40°}\right) - 5\left(\frac{10}{v_o\cos 40°}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}05 = \tan 40° \times 10 - \frac{500}{v_o^2\cos^2 40°}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}05\ .\ v_o^2\,(\cos^2 40°) = 10\ .\ v_o^2\ .\ \cos 40° - 500$$

Reemplazando: $1{,}05\ .\ v_o^2\,(0{,}76)^2 = 10\ .\ v_o^2(0{,}76) - 500$

$$500 = 6{,}99\,v_o^2$$

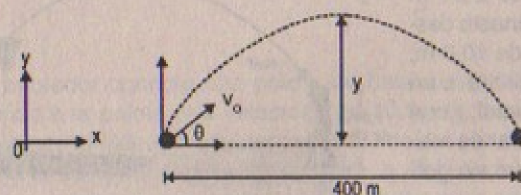
$$\therefore\ v_o = \sqrt{\frac{500}{6{,}99}}$$

Luego: $v_o \approx 8{,}46$ m/s

59. Un muchacho puede lanzar una pelota una distancia horizontal máxima de 40,0 m en un campo plano. ¿Qué tan lejos puede lanzar la misma pelota verticalmente hacia arriba? Suponga que sus músculos le dan a la pelota la misma velocidad en cada caso.

59A. Un muchacho puede lanzar una pelota una distancia horizontal máxima R en un campo plano. ¿Qué tan lejos puede lanzar la misma pelota verticalmente hacia arriba? Suponga que sus músculos le dan a la pelota la misma velocidad en cada caso.

Resolución :



Considerar
$g = 10$ m/s²
$\theta = 45°$
Puesto que dan la misma velocidad en cada caso.

$$40 = v_o\cos\theta\ .\ t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{40}{v_o\cos\theta}$$

$$y = v_o\,\text{sen}\theta\ .\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si $\quad y = 0 \ \Rightarrow\ t = \dfrac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}$

Luego: $\quad 40 = v_o\cos\theta\left(\dfrac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) = \dfrac{v_o^2}{g}\,\text{sen}2\theta$

$$\Rightarrow \quad v_o^2 = \frac{400}{\text{sen}2\theta} = \frac{400}{1} = 20 \text{ m/s}$$

Además: $\quad \dfrac{2v_o\,\text{sen}\,\theta}{g} = \dfrac{40}{v_o\cos\theta}$

Entonces: $\quad y_{máx} = v_o\,\text{sen}\theta\left(\dfrac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) - 5\left(\dfrac{v_o\,\text{sen}\,\theta}{g}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad y_{máx} = \frac{gv_o^2\,\text{sen}^2\theta - 5v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g^2}$$

$$\therefore \quad y_{máx} = \tan 45° - \frac{8\,000}{400\times\frac{1}{2}\times 4}$$

$$\Rightarrow \quad y_{máx} = 2\tan 45° - 1 = 1 \text{ m}$$

60. Las coordenadas x e y de una partícula están dadas por:

$$x = 2{,}00 \text{ m} + (3{,}00 \text{ m/s})t \quad y = x - (5{,}00 \text{ m/s}^2)t^2$$

¿A qué distancia del origen se encuentra la partícula en: a) t = 0; b) t = 2,00 s?

Resolución :

$$\vec{x}\,(t) = (2{,}0 + 3t) \text{ m} = (2 + 3t)\ \hat{i} \text{ m}$$

$$\vec{y}\,(t) = x - 5t^2 = [(2 + 3t) - 5t^2]\ \hat{j} \text{ m}$$

Parte (a)

(t = 0) $\quad \vec{x}\,(0) = 2 + 3(0) = 2$ m ; $\vec{y}\,(0) = 2 - 5(0) = 2$ m $\quad \vec{r}\,(t) = (2\,\hat{i} + 2\,\hat{j})$m

$$\therefore \ \text{Se encuentra: } |\vec{r}\,| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

Parte (b) (t = 2 s)

$$\vec{x}\,(t = 2) = 2 + 3(2) = 8\ \hat{i} \text{ m}$$

$$\vec{y}\,(t = 2) = 2 + 3(2) - 5(2)^2 = -12\ \hat{j} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\,(t) = (8\,\hat{i} - 12\,\hat{j})\text{m}$$

$$\therefore \quad |\vec{r}\,| = \sqrt{8^2 + (-12)^2} = \sqrt{208} = 14{,}4 \text{ m}$$

61. Una piedra en el extremo de una cuerda se hace girar en un círculo vertical de 1,20 m de radio a una velocidad constante $v_o = 1{,}50$ m/s, como muestra la figura P4.61. El centro de la cuerda se encuentra 1,50 m sobre el piso. ¿Cuál es el alcance de la piedra si se soltara cuando la cuerda está inclinada a 30,0° respecto de la horizontal: a) en A?, b) ¿en B?, ¿cuál es la aceleración de la piedra, c) ¿justo antes de que se suelta en A? d) ¿justo después de que se suelte en A?

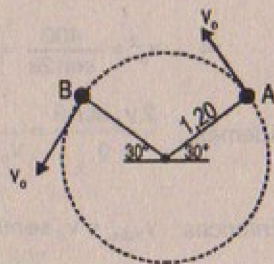
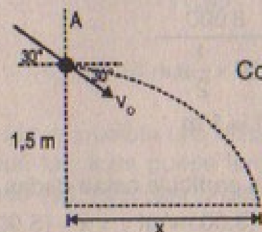


Figura P4.61

Resolución :

Parte (a)



Considerar: g = 10 m/s²

$v_o\cos30° \cdot t = x$

$1{,}5 = v_o\text{sen}30°.t + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow \quad 1{,}5 = 1{,}5 \times \frac{1}{2}t - 5t^2 \quad \Rightarrow \quad 5t^2 - 7{,}5t + 1{,}5 = 0$

$\therefore \quad 10t^2 - 15t + 3 = 0$

Luego: $\quad t = 0{,}24 \text{ s} \ \vee \ t = 1{,}3 \text{ s}$

Alcance horizontal en A:

$$x_A = (1{,}5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0{,}24) = 0{,}3 \text{ m}$$

$$x_B = (1{,}5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1{,}3) = 1{,}69 \text{ m}$$

Parte (b) $\quad a_{cp} = a = \frac{v_B^2}{R} = \frac{(1{,}5)^2}{1{,}2}$

$\therefore \quad a = 1{,}875 \text{ m/s}^2$

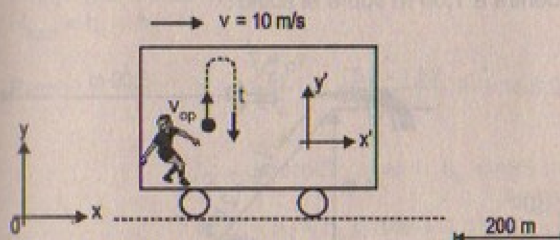
Parte (c) $\quad a_{cp} = a = \frac{v_A^2}{R} = \frac{(1{,}5)^2}{1{,}2} = 1{,}875 \text{ m/s}^2$

Parte (d) $\quad a = (0\hat{i} - 10\hat{j}) \text{ m/s}^2$

$\Rightarrow \quad a = g = 10 \text{ m/s}^2$

62. Un camión viaja hacia el norte con una velocidad constante de 10.0 m/s sobre un tramo horizontal de camino. Un muchacho que viaja en la parte trasera del camión desea lanzar una pelota mientras el camión se está moviendo y capturarla después de que el camión ha recorrido 20,0 m. a) Ignorando la resistencia del aire, ¿a qué ángulo con la vertical debe lanzarse la pelota? b) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de la pelota? c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la pelota vista por el muchacho? d) Un observador sobre el suelo observa al muchacho lanzar la pelota hacia arriba y cacharla. En este marco de referencia fijo del observador, determine la forma general de la trayectoria de la pelota y su velocidad inicial.

Resolución :



Considerar

g = 10 m/s²

Por dato:

10t = 200 m

$\Rightarrow \quad t = 2$ s

Con respecto: (ejes $0'$, x', y')

$x' = 0$

$y' = v_{op}t - \frac{1}{2}gt^2$

Luego: $\quad y' = 0 = v_{op}(2) - \frac{1}{2}(10)(2)^2 \qquad \therefore \ v_{op} = 10 \text{ m/s}$

Con respecto: (ejes 0, x, y)

$x = 10t$

$y = 10t - 5t^2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{20}(x-10)^2 + 5$ (Trayectoria es una parábola)

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 10 &= v\cos\theta \\ 10 &= v\,\text{sen}\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = 45°$$

Parte (b) $\quad$ Si $10 = v\cos45° \Rightarrow \quad v_o = 10\sqrt{2}$ m/s

Parte (c) $\quad$ La trayectoria es una parábola con ecuación:

$y = -\frac{1}{20}(x-10)^2 + 5 \quad$ con vértice V(10; +5)

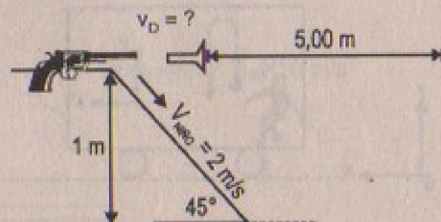
Parte (d) $y' = 10(2) - \frac{1}{2}(10)(4) = 0$

$y'\text{(ida)} = 10(1) - 5(1) = 5 \qquad V_{op} = 10\ m/s$

$\Rightarrow \quad y = \text{recta normal}$

63. Una pistola de dardos se dispara mientras se sostiene horizontalmente a una altura de 1,00 m sobre el nivel del suelo. Con la pistola en reposo respecto del suelo, el dardo recorre una distancia horizontal de 5,00 m. Un niño sostiene la misma pistola en una dirección horizontal mientras se desliza hacia abajo de una pendiente de 45,0° a una velocidad constante de 2,00 m/s. ¿Qué distancia recorrerá el dardo si la pistola se dispara cuando ésta se encuentra a 1,00 m sobre el suelo?

Resolución :



$$1 = (2 \times \text{sen}45°)t + \frac{1}{2}(g)t^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{2}(9{,}8)t^2 \quad \Rightarrow \quad 4{,}9t^2 + \sqrt{2}\,t - 1 = 0$$

$$\therefore \quad t = 0{,}327$$

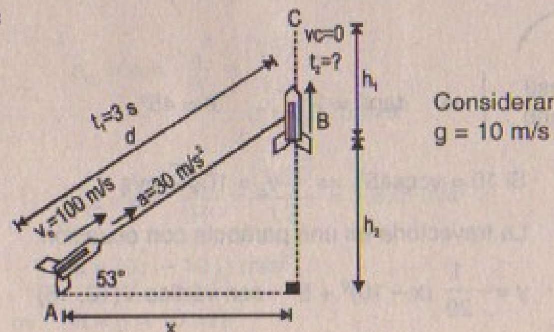
Luego: $\quad D(\text{hombre + pistola}) = (2 \times \cos45°)(t) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(0{,}327)$

$$\therefore \quad D = 0{,}402\ m$$

Entonces el dardo recorrerá: 5 m – 0,462 = 4,54 m

64. Un cohete despega a un ángulo de 53,0° con la horizontal y una velocidad inicial de 100 m/s. Viaja a lo largo de su línea de movimiento inicial con una aceleración de 30,0 m/s² durante 3,00 s. En este momento fallan sus motores y el cohete empieza a moverse como un acuerpo libre. Encuentre: a) la altitud máxima alcanzada por el cohete, b) su tiempo total de vuelo, y c) su alcance horizontal.

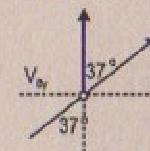
Resolución :



Considerar $g = 10\ m/s$

$$d = 100t + \frac{1}{2}(a)t^2 \quad \Rightarrow \quad d = 100(3) + \frac{1}{2}(30)(3)^2 = 435\ m$$

Parte (a) $\quad V_B = V_o + at \quad \Rightarrow \quad V_B = 100 + (30)(3) = 190\ m/s$



$\Rightarrow \quad V_B\cos37° = V_{By} \quad \Rightarrow \quad V_{By} = 152\ m/s$

Luego (por caída libre)

$H_{total} = h_1 + h_2$

Pero: $\quad h_1 = \frac{V_{By}^2}{2g} = \frac{152 \times 152}{2 \times 10} = 1\ 155{,}2\ m$

$h_2 = d\,\text{sen}53° \quad \Rightarrow \quad h_2 = 435 \times \frac{4}{5} = 348\ m$

$\therefore \quad H_{total} = h_1 + h_2 = 348 + 1\ 155{,}2$

$$H_{total} = 1\ 503{,}2\ m$$

Parte (b) $\quad t_{total} = t_1 + t_2$

$$t_2 = \frac{V_{By}}{g} = 15{,}2\ s$$

Luego: $\quad T_{total} = 3 + 15{,}2 = 18{,}2\ s$

Parte (c) $\quad x = d\cos53° = 435 \times \frac{3}{5} = 261\ m$

65. Una persona sobre la parte superior de una roca hemisférica de radio R patea una pelota (inicialmente en reposo en la parte superior de la roca) de manera que su velocidad inicial es horizontal como en la figura P4.65. a) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial mínima si la pelota no tocara la roca después de patearla? b) Con esta velocidad inicial, ¿a qué distancia de la base de la roca la pelota golpeará el suelo?

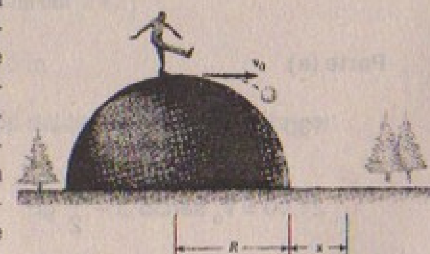


Figura P4.65

Resolución :

considerar $g = 10\ m/s^2$

Parte (a) $R = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2R}{g}} = t$

v_o mínima si $x \to R$

$\Rightarrow R = v_o t \Rightarrow v_o = \frac{R}{t} = \frac{R\sqrt{g}}{\sqrt{2R}}$ m/s

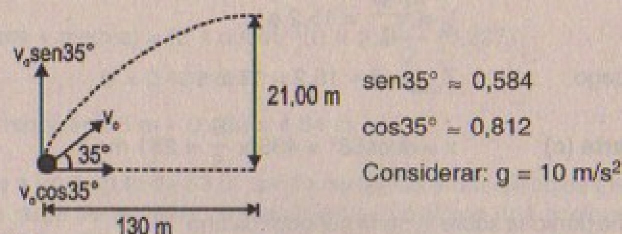
Parte (b) $x = v_o t$

$R = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$ s

Luego: $x = \sqrt{\frac{2R}{g}} \times \frac{R\sqrt{g}}{\sqrt{2R}} = R$

66. Un *home run* en un juego de beisbol se batea de manera tal que la pelota apenas libra un muro de 21,0 m de altura, localizado a 130 m del plato. La bola se golpea a un ángulo de 35,0° con la horizontal y se ignora la resistencia del aire. Encuentre: a) la velocidad inicial de la pelota, b) el tiempo que tarda en llegar al muro, y c) las componentes de la velocidad y la rapidez de la pelota cuando llega al muro. (Suponga que la pelota se golpea a una altura de 1,00 m sobre el suelo.)

Resolución:



sen35° ≈ 0,584

cos35° ≈ 0,812

Considerar: g = 10 m/s²

Parte (a)

$130 = v_o \cos 35° \cdot t \Rightarrow t = \frac{130°}{v_o \cos 35°}$

$21{,}00 = v_o \,\text{sen}35° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 21 = v_o \,\text{sen}35°\left(\frac{130}{v_o \cos 35°}\right) - 5\left(\frac{130}{v_o \cos 35°}\right)^2$

$\left(\frac{5 \times 130 \times 130}{130 \tan 35° - 21}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 35°}\right) = v_o^2$

$\Rightarrow \frac{5 \times 130 \times 130}{\left[130 \times \left(\frac{0{,}584}{0{,}812}\right) - 21\right]} \times \frac{1}{(0{,}812)^2} = v_o^2$

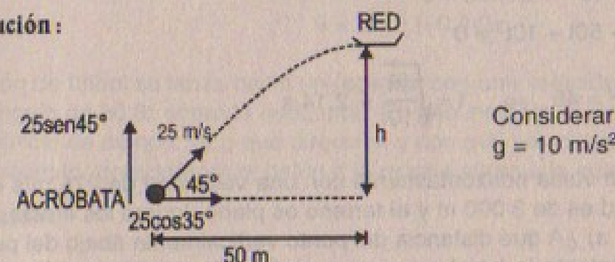
$\therefore\ v_o = 42$ m/s

Parte (b) $t = \frac{130}{(40)(0{,}812)} = 4{,}00$ s

Parte (c) $\vec{V} = \left(40\hat{i} + 0\hat{j}\right)$ m/s

67. Un temerario acróbata se dispara desde un cañón a 45,0° respecto de la horizontal con una velocidad inicial de 25,0 m/s. Una red está colocada a una distancia horizontal de 50,0 m del cañón. ¿A qué altura sobre el cañón debe ponerse la red para que caiga en ella el acróbata.

Resolución:



Considerar g = 10 m/s²

$50 = 25\,\frac{\sqrt{2}}{2}t \Rightarrow t = 2\sqrt{2}$ s

$h = \left(25 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right) - 5\left(2\sqrt{2}\right)^2$

$\therefore\ h = 10$ m

68. La posición de una partícula como función del tiempo está descrita por:

$\vec{r} = (bt)\hat{i} + (c - dt^2)\hat{j}$ b = 2,00 m/s

c = 5,00 m, d = 1,00 m/s²

a) Exprese y en función de x, dibuje la trayectoria de la partícula. ¿Cuál es la forma de la trayectoria? b) Derive una relación vectorial para la velocidad. c) ¿A qué tiempo (t > 0) es el vector velocidad perpendicular al vector de posición?

Resolución:

$\vec{r} = bt\hat{i} + (c - dt^2)\hat{j}$; b = 2 m/s ; c = 5 m ; d = 1 m/s²

Parte (a)

$\vec{x}(t) = 2t$; $\vec{y}(t) = 5 - t^2$

$\Rightarrow \quad t = \frac{x}{2}$; luego: $y = 5 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\therefore \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + 5$

Luego la trayectoria es una parábola con vértice: (0; 5)

Parte (b) $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(2\hat{i} - 2t\hat{j}\right)$ m/s

Parte (c) $\vec{V} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \left[2t\hat{i} + (5 - t^2)\hat{j}\right]\left[2\hat{i} - 10t\hat{j}\right] = 0\hat{i} + 0\hat{j} = 0$

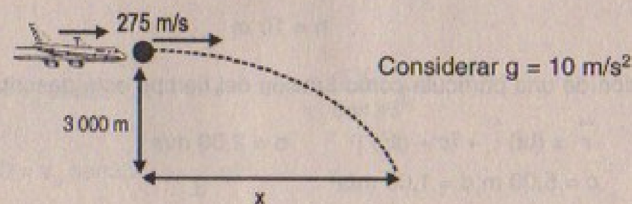
$4t + (5 - t^2)(-10t) = 0$

$\Rightarrow \quad 4t - 50t + 10t^3 = 0$

$\therefore \quad 10t^2 = 46 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{46}{10}} \approx 2,14$ s

69. Un bombardero vuela horizontalmente con una velocidad de 275 m/s respecto del suelo. Su altitud es de 3 000 m y el terreno es plano. Ignore los efectos de la resistencia del aire. a) ¿A qué distancia del punto verticalmente abajo del punto de liberación hace contacto la bomba con el suelo? b) Si el avión mantiene su curso y velocidad originales, ¿dónde se encuentra cuando la bomba estalla en el suelo? c) ¿A qué ángulo, desde la vertical en el punto de liberación, debe apuntar la mira telescópica del bombardero de modo que la bomba dé en el blanco observado en la mira en el momento de que se suelta el proyectil?

Resolución :



Considerar g = 10 m/s²

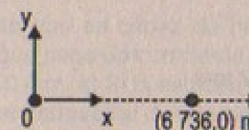
Parte (a)

$3\,000 = \frac{1}{2}(g).t^2 \Rightarrow \quad 600 = t^2 \quad \therefore \quad t = 10\sqrt{6}$ s

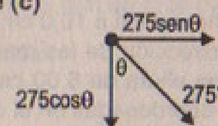
$x = 275t \quad \Rightarrow \quad x = (275)(10\sqrt{6})$

$\therefore \quad x = 2\,750\sqrt{6}$ m

Parte (b)



Parte (c)



$3\,000 = 275\cos\theta \,.\, t + 5t^2$

$6\,736 = 275\text{sen}\theta \,.\, t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6\,736}{275\,\text{sen}\,\theta}$

$\Rightarrow \quad 3\,000 = \cot\theta \times 6\,736 + 5\left(\frac{6\,736}{275\,\text{sen}\,\theta}\right)^2$

Pero: $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

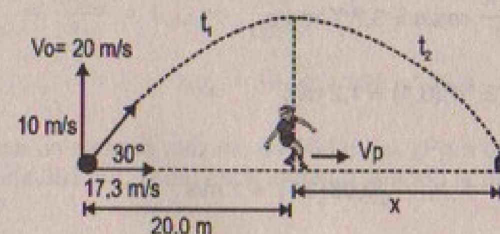
$\Rightarrow \quad 3\,000 = 6\,736\cot\theta + 3\,000\csc^2\theta$

Desarrollando: $\cot\theta = -2,25 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = -0,44$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(-0,44)$

70. Un balón de fútbol se lanza hacia un receptor con una velocidad inicial de 20,0 m/s a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. En ese instante el receptor está a 20,0 m del mariscal de campo. ¿En qué dirección y con qué velocidad constante debe correr el receptor para atrapar el balón a la misma altura a la cual fue lanzado?

Resolución :



$t_{vuelo} = \text{Hmáx} = 0 = 10t - 5t^2 \quad \therefore \quad t_{vuelo} = 2$ s

$\Rightarrow \quad D_{xmáx} = 17,3\,t = 17,3\,(2) = 34,6$ m

$\Rightarrow \quad x = 34,6 - 20 = 14,6$ m

$\Rightarrow \quad v_p = \frac{x}{t_2} = \frac{14,6}{t_2} \quad ...(1)$

$t_1 = \frac{20}{17,3} = 1,16$ s

$\Rightarrow \quad t_2 = t_{vuelo} - t_1 = 2 - 1,16 = 0,844$ s

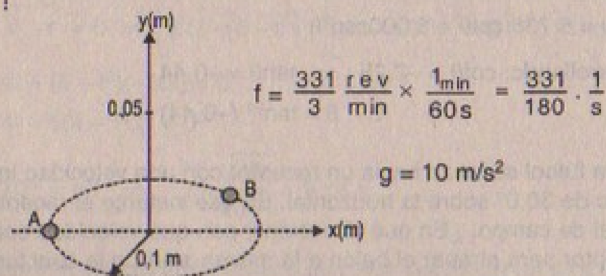
Parte (c)

Por lo tanto de (1): $v_p = \dfrac{14,6}{0,844} = 13,52$ m/s

En la dirección Este (0°).

71. Una pulga está en el punto A sobre una tornamesa horizontal a 10,0 cm del centro. La tornamesa está girando a 33 1/3 rev/min en la dirección de las manecillas del reloj. La pulga salta verticalmente hacia arriba a una altura de 5,00 cm y aterriza sobre la tornamesa en el punto B. Sitúe el origen de coordenadas en el centro de la tornamesa con el eje x positivo fijo en el espacio y pasando a través de A. a) Encuentre el desplazamiento lineal de la pulga. b) Determine la posición del punto A cuando la pulga aterriza. c) Determine la posición del punto B cuando la pulga aterriza.

Resolución :



$$f = \frac{331}{3}\frac{rev}{min} \times \frac{1 min}{60 s} = \frac{331}{180} \cdot \frac{1}{s}$$

$g = 10$ m/s²

Parte (a)

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{331\pi}{90} \text{ rad/s} = 3,7\ T \text{ rad/s}$$

$$v = \omega.R = \frac{331}{90}(3,14)(0,1) = 1,2 \text{ m/s}$$

$$0,05 = \frac{v_i^2 - v_f^2}{2(10)} \Rightarrow v_i = \sqrt{0,05(20)} = 1 \text{ m/s}$$

$$v_f = v_i - 10t \Rightarrow t = 1/10$$

$$\therefore\ S_{lineal} = v.t = 1,2\left(\frac{1}{10}\right) = 0,12 \text{ m}$$

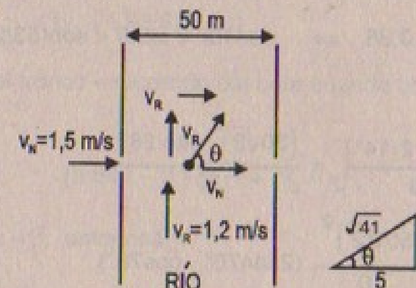
Parte (b) $\theta(t) = \theta_o + \omega t \Rightarrow \theta(1/10) = (3,7\pi)\left(\dfrac{1}{10}\right) = 0,37\pi$ rad

Parte (c) $\theta(t) = \theta_o + \omega t \Rightarrow \theta(1/10) = (0,37\pi)\left(\dfrac{1}{10}\right) + 3,7\pi\ (1/10)$

$\Rightarrow \theta(1/10) = 0,74\pi$

72. Una estudiante que es capaz de nadar a 1,50 m/s en agua sin corrientes desea cruzar un río que tiene una corriente de 1,20 m/s de velocidad hacia el sur. El ancho del río es de 50,0 m. a) Si la estudiante inicia desde la orilla oeste, ¿en qué dirección debe nadar para atravesar directamente el río? ¿Cuánto durará este recorrido? b) Si se dirige hacia el este, ¿en cuánto tiempo cruzará el río? (Nota: la estudiante recorre más de 50,0 m en este caso.)

Resolución :



Parte (a) $\tan\theta = \dfrac{V_R}{V_N} = \dfrac{1,2}{1,5} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \theta = \arctan(0,8)$

Parte (b) $50 = (1,5)(t) \Rightarrow t = 33,3$ s

El recorrido durará:

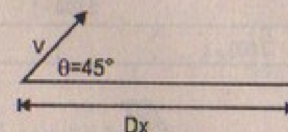
$$V_R = \sqrt{(1,2)^2 + (1,5)^2} = 1,92 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{D_{total}}{V_R} = t_{total} \Rightarrow \frac{50}{\cos\theta} \times \frac{1}{V_R} = t_{total}$$

$$\therefore\ t_{total} = 10\sqrt{41} \times 1,92 = 123 \text{ s}$$

73. Un rifle tiene un alcance máximo de 500 m. a) ¿Para qué ángulos de elevación el alcance sería 350 m?, ¿cuál es el alcance cuando la bala sale del rifle, b) a 14,0° c) a 76,0°?

Resolución :



Considerar:

$g = 10$ m/s²

Parte (a)

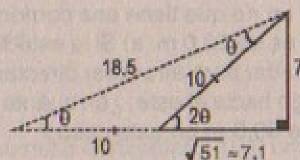
$D_{xmáx} = 500 = v\cos\theta \cdot t_{vuelo}$

$$t_{vuelo} = \frac{2v\,sen\,\theta}{g}$$

Luego: $D_{máx} = \dfrac{v^2 sen 2\theta}{g} = 500 \qquad \therefore\ v = 50\sqrt{2}$ m/s

Si $D_{xmáx} = 350$:

$$\Rightarrow \quad 350 = \frac{\left(50\sqrt{2}\right)^2}{10} \cdot \text{sen}2\theta$$



$$\therefore \quad \text{sen}2\theta = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \frac{7}{18{,}5} \approx 0{,}38 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}15° < \text{sen}\theta < \text{sen}(53/2)$$

Parte (b)

$$\text{a } 14° \Rightarrow \quad D_{x\,máx} = \frac{v^2 \,\text{sen}\, 2(14°)}{g} = \frac{\left(50\sqrt{2}\right)^2 \text{sen } 28°}{10}$$

$$\text{a } 76° \quad \Rightarrow \quad D_{x\,máx} = \frac{\left(50\sqrt{2}\right)^2}{10} (2\text{sen}76° \cdot \cos76°)$$

como 14° y 76° son complementarios entonces los alcances son iguales.

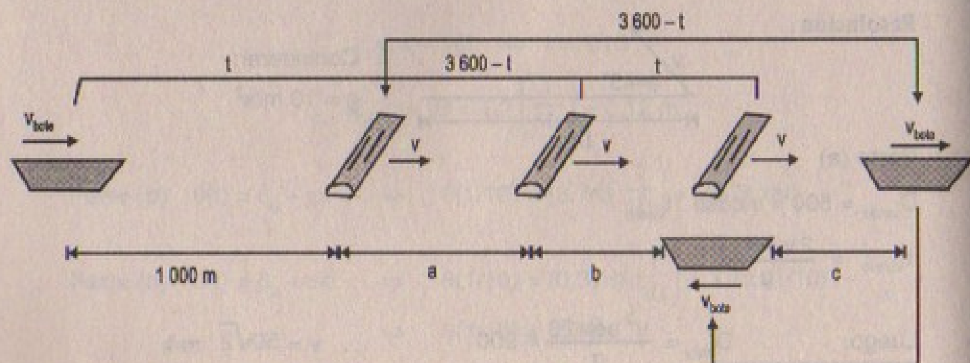
$$\text{sen}14° = 0{,}254 \quad \wedge \quad \cos14° \approx 0{,}967$$

Entonces: $D_{máx}(14°) = 500(2\text{sen}14° \cdot \cos14°) = 1\,000\,(0{,}254)(0{,}967)$

$$\therefore \quad D_{máx}(14°) = 246 \text{ m}$$

74. Un río fluye con velocidad uniforme v. Una persona en un bote de motor viaja 1,00 km aguas arriba, momento en que observa un tronco flotando. La persona continúa desplazándose aguas arriba durante 60,0 min a la misma velocidad y luego regresa aguas abajo hasta el punto de partida, donde vuelve a ver el mismo tronco. Determine la velocidad del río. (Sugerencia: el tiempo de viaje del bote después de que alcanza al tronco es igual al tiempo de viaje del tronco.)

Resolución :



Se sabe que:

$$t_{\text{viaje del bote}} = t_{\text{viaje del tronco}} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$$

Por otro lado:

Recorrido del bote en el momento que observa al tronco por primera vez es:

$$(v_b + v)(3\,600 - t) \qquad ...(\alpha)$$

Recorrido del tronco + recorrido del bote cuando observa el tronco por segunda vez es:

$$v(3\,600 - t) + v \cdot t + (v_b - v) \cdot t \qquad ...(\beta)$$

como: $\alpha = \beta$; entonces:

$$3\,600\, v_b - v_b \cdot t + 3\,600 \cdot v - \cancel{v}t = 3\,600\, v - \cancel{v}t + \cancel{v}t + v_b \cdot t - \cancel{v}t$$

$$\Rightarrow \quad 3\,600\,\cancel{v_b} = 2\,\cancel{v_b}\,t \qquad \therefore \; t = 1\,800 \text{ s}$$

Luego: en tiempos iguales se recorren espacios iguales; entonces:

$$\boxed{a = b = c = \frac{1\,000}{3}}$$

Luego:

$$(v_b + v) \times 1\,800 = 1\,000$$

$$\therefore \; v_b + v = \frac{10}{18} \qquad ...(1)$$

Del gráfico:

$$(v_b - v) \times 1\,800 = \frac{1\,000}{3}$$

$$\therefore \; v_b - v = \frac{10}{54} \qquad ...(2)$$

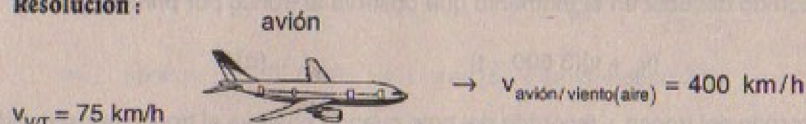
Restando: (1) – (2) resulta que:

$$2v = \frac{30}{54} - \frac{10}{54} = \frac{20}{54}$$

$$\therefore \; v = 0{,}185 \text{ m/s}$$

75. Un avión tiene una velocidad de 400 km/h en dirección este respecto del aire en movimiento. Al mismo tiempo, sopla un viento en dirección norte con una velocidad de 75,0 km/h en relación con la Tierra. a) Determine la velocidad del avión respecto de la Tierra. b) ¿En qué dirección debe orientarse el avión con el fin de moverse hacia el este respecto de la Tierra?

Resolución:



Parte (a)

$$\vec{V}_{avión/T} = \underset{\text{En x}}{v_{avión/aire}} + \underset{\text{(viento)}}{v_{viento/T}}$$

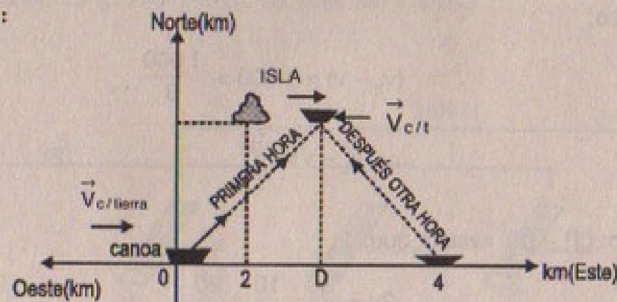
$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{avión/T\ en\ x} = 400 \text{ km/h} + 0\,\hat{i}$$

$$\vec{V}_{avión/T\ en\ y} = 0 + 75 \text{ km/h}\,\hat{j} \qquad \therefore \qquad \vec{V}_{a/T} = \sqrt{(400)^2 + (75)^2} = 407 \text{ km/h}$$

Parte (b) $\qquad \tan\theta = \dfrac{75}{400} = 0{,}19 \qquad \therefore \qquad \theta = \tan^{-1}(0{,}19)$

76. Una marinera dirige una canoa hacia una isla localizada 2,00 km al este y 3,00 km al norte de su posición de partida. Después de una hora ella ve la isla en dirección oeste. Después dirige el bote en la dirección opuesta en la cual estuvo remando, rema durante otra hora y termina 4,00 km en dirección este de su posición de partida. Deduce correctamente que la corriente va de oeste a este. a) ¿Cuál es la velocidad de la corriente? b) Demuestre que la velocidad del bote relativa a la orilla durante la primera hora puede expresarse como v = (4,00 km/h)i + (3,00 km/h)j, donde $\hat{i}$ apunta al este y $\hat{j}$ hacia el norte.

Resolución:



Sabemos: $\qquad v_{canoa/tierra} = v_{río/tierra} + v_{canoa/río}$

Por hipótesis: asumiendo $\vec{V}_{río/tierra} \rightarrow$ (oeste-este)... (α)

Entonces:

En la primera hora

En (x) $\qquad \vec{V}_{c/t} \times 1 \text{ hora} = d > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{c/t} > 0 \qquad$ cumple

En (y): $\qquad \vec{V}_{c/t} \times 1 \text{ hora} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{c/t} > 0 \qquad$ cumple

Despues de una hora la $\vec{V}_{c/t}$ cambia de sentido $\Rightarrow \vec{V}_{c/t} < 0$

En (x): $\qquad -\vec{V}_{c/t}(1 \text{ hora}) = (4 - d) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{V}_{c/t} > 0 \ \setminus\ \vec{V}_{c/t} < 0 \quad$ cumple

En (y): $\qquad -\vec{V}_{c/t}(1 \text{ hora}) = (0 - 3) < 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{V}_{c/t} < 0 \ \setminus\ \vec{V}_{c/t} > 0$ cumple

Por consiguiente: por (α)

Como la $\vec{V}_{c/t}$ (es > 0) $\quad \Rightarrow \quad v_{R/t} + V_{canoa/R} > 0$

Luego $v_{río/tierra} > 0$

Lo que equivale a decir por α que la corriente va de oeste a este.

Parte (a)

Sabemos del gráfico: $\qquad d - 0 = 4 - d \quad \Rightarrow \quad d = 3$ km

$$\Rightarrow \quad V_{c/t}\text{ (en x)} = 3 \text{ km/h} \quad \wedge \quad V_{c/t}\text{ (en y)} = 3 \text{ km/h}$$

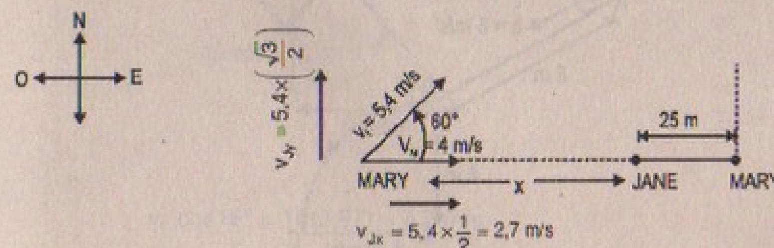
Luego: $\qquad |\vec{V}_{c/t}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ km/h

Parte (b)

Del gráfico $\qquad \vec{V}_{c/tierra} = 400 \text{ km/h}\,\hat{i} + 3 \text{ km/h}\,\hat{j}$

77. Dos jugadoras de *futbol soccer*. Mary y Jane, empiezan a correr casi desde el mismo punto al mismo tiempo. Mary corre en dirección este a 4,0 m/s mientras que Jane parte en una dirección 60° al norte del este a 5,4 m/s. a) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que estén separadas por una distancia de 25 m? b) ¿Cuál es la velocidad de Jane en relación con la de Mary? c) ¿Qué distancia las separa después de 4,0 s?

Resolución:



$$\left.\begin{array}{l} D_{MARY} = (x + 25)t = 4t \\ D_{JANE} = x = 2{,}7t \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+25}{x} = \frac{4}{2{,}7} \quad \Rightarrow \quad x = 52\ m$$

Parte (a) $\therefore \quad t \Rightarrow \quad 52 = 2{,}7t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{52}{2{,}7} = 19{,}3\ s$

Parte (b)

En x: $\quad v_{M/tierra} = v_{J/tierra} + v_{M/J}$

$\Rightarrow \quad v_{M/J} = v_{M/T} - v_{J/T} = 4\ m/s - 2{,}7\ m/s = 1{,}3\ m/s$

$\therefore \quad \vec{V}_{J/M} = -1{,}3\ m/s$

En y: $\quad v_{M/tierra} = v_{J/tierra} + v_{M/J}$

Parte (c) $\quad D_{Mary} = 4(4) = 16\ m$

$D_{Jane} = 2{,}7(4) = 10{,}8\ m$

$\therefore$ Distancia de separación = 16 – 10,8 = 5,2 m

78. Después de entregar sus juguetes de la manera usual, Santa Clos decide divertirse un poco y se desliza por un techo congelado, como se ve en la figura P4.78. Parte del reposo en la parte superior del techo, que mide 8,00 m de longitud, y acelera a razón de 5,00 m/s². La orilla del techo está a 6,00 m arriba de un banco de nieve blanda, en la cual aterriza Santa. Encuentre: a) las componentes de velocidad de Santa cuando llega al banco de nieve, b) el tiempo total que permanece en movimiento, y c) la distancia d entre la casa y el punto donde él aterriza en la nieve.

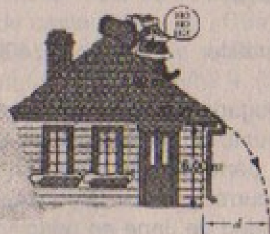
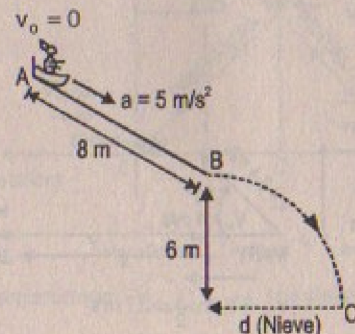


Figura P4.78

Resolución :

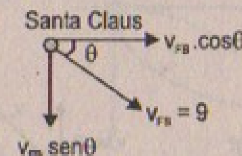


Considerar : $g = 10\ m/s^2$

$$8 = \frac{1}{2}(a)t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{5} = t^2 \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{16}{5}} = 1{,}8\ s$$

$$v_f = v_o + 5t \quad \Rightarrow \quad v_{fB} = 5\,(1{,}8) = 9\ m/s$$

Por Mov. Proyectiles:



79. Un esquiador sale de una rampa de salto con una velocidad de 10 m/s, 15° arriba de la horizontal, como muestra la figura P4.79. La pendiente está inclinada a 50°, y la resistencia del aire es despreciable. Determine: a) la distancia a la cual el esquiador aterriza y b) las componentes de velocidad justo antes del aterrizaje. (¿Cómo cree usted que podrían afectarse los resultados si se incluyera la resistencia del aire? Observe que los saltadores de esquí se impulsan hacia adelante en la forma de un proyectil aerodinámico con sus manos en sus costados para incrementar su distancia. ¿Por qué funciona esto?)

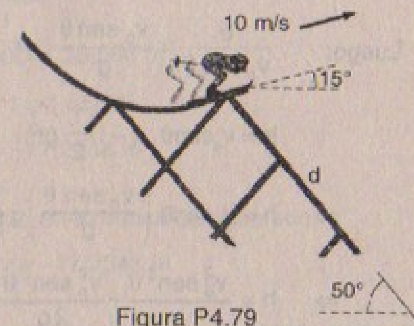
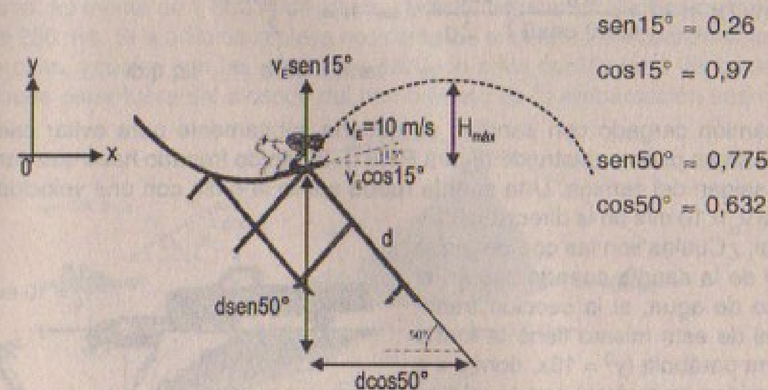


Figura P4.79

Resolución :



sen15° ≈ 0,26

cos15° ≈ 0,97

sen50° ≈ 0,775

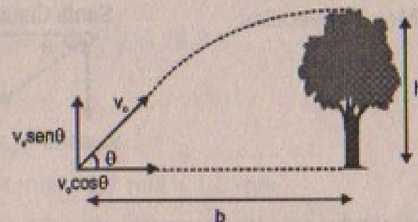
cos50° ≈ 0,632

$$v_E \cos 15° = 10(0{,}97) = 9{,}7\ m/s$$

$$v_E\ \text{sen}\,15° = 10(0{,}26) = 2{,}6\ m/s$$

80. Una pelota de golf abandona el suelo a un ángulo θ y golpea un árbol mientras se mueve horizontalmente a una altura h sobre el suelo. Si el árbol se encuentra a una distancia horizontal b desde el punto de partida, demuestre que: a) $\tan\theta = 2h/b$. b) ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota en términos de b y h?

Resolución:



$$V_{vf} = v_o\,sen\theta - gt$$

$$\Rightarrow\quad 0 = v_o sen\theta - gt$$

$$\therefore\quad t = \frac{v_o\,sen\theta}{g}$$

$$b = v_o \cdot \cos\theta \cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{b}{v_o\cos\theta}$$

Luego: $$\frac{b}{v_o\cos\theta} = \frac{v_o\,sen\theta}{g} \quad\Rightarrow\quad v_o^2 = \frac{bg}{sen\theta\,.\,\cos\theta} \quad ...(1)$$

$$h = v_o sen\theta\,.\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow\quad h = v_o sen\theta\left(\frac{v_o\,sen\,\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o\,sen\,\theta}{g}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad h = \frac{v_o^2 sen^2\theta}{g} - \frac{v_o^2 sen^2\theta}{2g} = \frac{v_o^2 sen^2\theta}{2g} \quad ...(2)$$

(1) en (2): $$h = \left(\frac{bg}{sen\theta.\cos\theta}\right)\frac{sen^2\theta}{2g} \quad\Rightarrow\quad h = \frac{b.\tan\theta}{2}$$

$$\therefore\quad \tan\theta = 2h/b \qquad \text{l.q.q.d.}$$

81. Un camión cargado con sandías se detiene súbitamente para evitar caer por el borde de un puente destruido (figura P4.81). El rápido frenado hace que varias sandías salgan del camión. Una sandía rueda sobre la orilla con una velocidad inicial v_o = 10 m/s en la dirección horizontal. ¿Cuáles son las coordenadas x e y de la sandía cuando cae en el banco de agua, si la sección transversal de este mismo tiene la forma de una parábola ($y^2 = 16x$, donde x e y se miden en metros) con su vértice en el borde el camino?

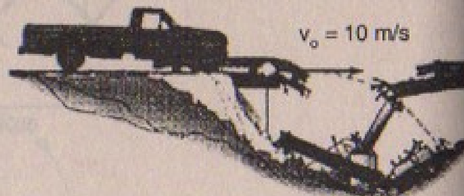
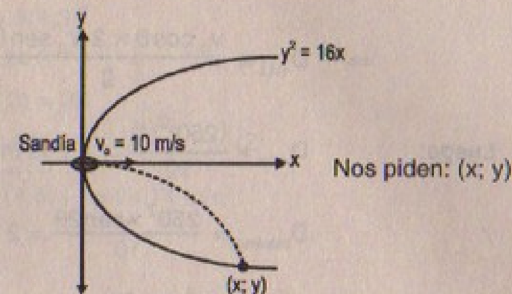


Figura P4.81

Resolución:



Sabemos que:

$x(t) = 10.t$ (para la sandía)

$y(t) = -5.t^2$ (para la sandía)

Nos piden: (x; y)

Entonces: $$y = -5\left(\frac{x}{10}\right)^2 = -\frac{1}{20}x^2 \quad \text{(trayectoria de la sandía)}$$

Luego: al intersectar tenemos que:

$$\left(-\frac{1}{20}x^2\right)^2 = 16x \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{400}x^3 - 16 = 0$$

$$\therefore\quad x = \sqrt[3]{16\times400} = 18{,}566 \text{ m}$$

Entonces: $18{,}566 = 10.t \Rightarrow t = 1{,}85665$

Luego: $y = -5(1{,}8566)^2 = -17{,}2348$ m

En consecuencia:

Las coordenadas de la sandía cuando cae en el banco de agua son:

$$x = 18{,}566 \text{ m} \quad ; \quad y = -17{,}2348 \text{ m}$$

82. En la figura P4.82 se muestra un barco enemigo que está en el lado oeste de una isla montañosa. El barco enemigo puede maniobrar hasta 2 500 m de distancia de la cima del monte de 1 800 m de altura y puede disparar proyectiles con una velocidad de 250 m/s. Si la orilla de la playa occidental se encuentra horizontalmente a 300 m de la cima, ¿cuáles son las distancias desde la orilla occidental a las cuales un barco puede estar fuera del alcance del bombardero de la embarcación enemiga?

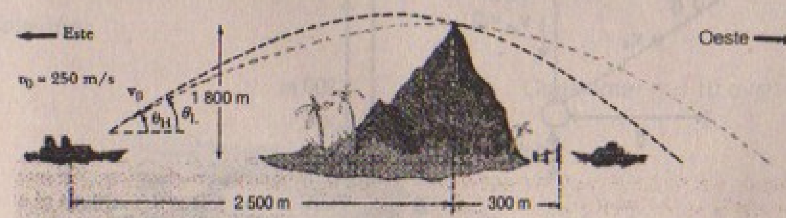


Figura P4.82

Resolución:

Considerar g = 10 m/s²

Sabemos que: $$t_{máx} = \frac{2v_o\,sen\theta}{g} \quad\wedge\quad 2\,800 < Dx < 6\,250$$

$$\Rightarrow \quad D_{máx} = \frac{v_o \cos\theta \times 2\, v_o \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Luego: $$D_{máx} = \frac{(250)^2(1)}{10} = 6\,250 \text{ m cuando } \theta = 45°$$

$$D_{mínimo} = \frac{250^2 \times \operatorname{sen} 2\theta}{10} = 2\,800$$

$$\Rightarrow \quad 2\,800 < \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{10} < 6\,250$$

$$\Rightarrow \quad 2\,800 < v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta < 62\,500$$

$$\therefore \quad 28\,000/v_o^2 < \operatorname{sen} 2\theta < 62\,500/v_o^2 = 1$$

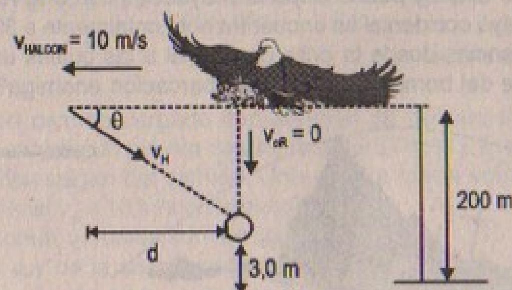
$$= 0{,}045 < \operatorname{sen} 2\theta < 1$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}5° < 2\theta < 90° \quad \Rightarrow \quad 1{,}25° < \theta < 45°$$

$\therefore$ Las distancias serán con $\angle$s que varíen en 1,25° y 45°.

83. Un halcón vuela horizontalmente a 10,0 m/s en una línea recta 200 m arriba del suelo. Un ratón que él lleva escapa de sus garras. El halcón continúa en su misma trayectoria a la misma velocidad durante dos segundos antes de recuperar a su presa. Para lograrlo, desciende en línea recta a velocidad constante y recaptura al ratón a 3,0 m sobre el suelo. Suponiendo que no hay resistencia del aire, a) encuentre la velocidad de descenso del halcón, b) ¿qué ángulo con la horizontal forma el halcón durante su descenso?, y c) ¿durante cuánto tiempo el ratón «disfruta» su caída libre?

Resolución:



Considerar g = 10 m/s²

Parte (a) $197 = \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 6{,}3 \text{ s}$

$d = v_H \times t_1 = 10(2) = 20 \text{ m}$

$197 = v_H . \operatorname{sen}\theta\,(6{,}3 - 2) + \frac{1}{2}(10)(6{,}3 - 2)^2$

$\Rightarrow \quad 197 = v_H \operatorname{sen}\theta\,(4{,}3) + 5(4{,}3)^2$

$\therefore \quad v_H \operatorname{sen}\theta = 24{,}3 \qquad \ldots (1)$

Pero: $\quad v_H . \cos\theta (4{,}3) = 20$

$\therefore \quad v_H \cos\theta = 4{,}65 \qquad \ldots (2)$

De: (1) y (2): $\quad v_H = \sqrt{(24{,}3)^2 + (4{,}65)^2} = 24{,}74 \text{ m/s}$

Parte (b)

(1) ÷ (2) $\qquad \tan\theta = \frac{24{,}3}{4{,}65} = 5{,}23 \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(5{,}23)$

Parte (c)

El ratón disfruta de su caída libre durante t = 6,3 segundos.

84. El coyote con gran determinación está listo otra vez para intentar capturar al elusivo correcaminos. El coyote porta un par de patines de ruedas de propulsión a chorro Acme, que brindan una aceleración horizontal constante de 15 m/s² (figura P4.84). El coyote parte del reposo a 70 m del borde de un precipicio en el instante que el correcaminos como de rayo cambia de dirección alejándose del precipicio. a) Si el correcaminos se mueve con velocidad constante, determine la velocidad mínima que debe tener para llegar al precipicio antes que el coyote. b) Si el peñasco está a 100 m sobre el fondo de un cañón, determine dónde aterriza el coyote (suponga que los patines continúan en operación cuando él está «volando»). c) Determine las componentes de velocidad del coyote justo antes de aterrizar en el cañón. (Como siempre, el correcaminos se salva haciendo un repentino giro en el peñasco.)

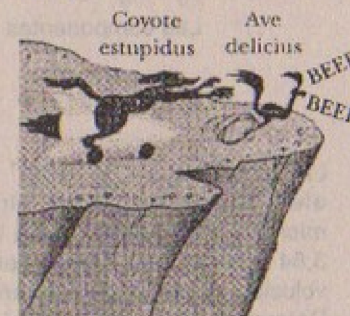
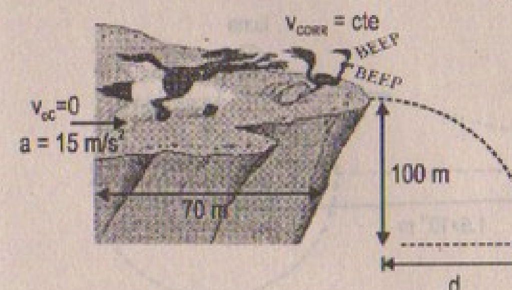


Figura P4.84

Resolución:

Considerar g = 10 m/s²



Parte (a)

$v_{corr} \times t = 70$ m

$t_{mínimo}$ será el tiempo que emplee el coyote en recorrer 70 m:

$$\Rightarrow \quad 70 = \frac{1}{2}(15)t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{140}{5} = 2\sqrt{7} \approx ¿?$$

$$\therefore \quad t = 5{,}3 \text{ s}$$

$$\therefore \quad v_{correc} = \frac{70}{5{,}3} = 13{,}2 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$v_f = v_o + at \quad \Rightarrow \quad v_f = 15(5{,}3) = 79{,}5$ m/s

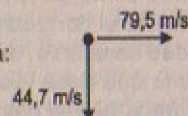
$100 = \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{5}$

$\therefore \quad t = 4{,}47$ s

Luego: $(79{,}5)(4{,}47) = d = 355{,}4$ m

Parte (c) $v_{fy} = v_{oy} + g(t) = 10(4{,}47) = 44{,}7$ m/s

$\therefore$ Las componentes de la velocidad será:



85. La Tierra está a $1{,}50 \times 10^{11}$ m del Sol y efectúa una revolución alrededor del mismo en $3{,}16 \times 10^7$ s. La Luna está a $3{,}84 \times 10^8$ m de la Tierra y realiza una revolución alrededor de ésta en $2{,}36 \times 10^6$. Determine la velocidad de la Luna relativa al Sol en el instante en que el satélite terrestre apunta directamente hacia el Sol, como en la figura P4.85.

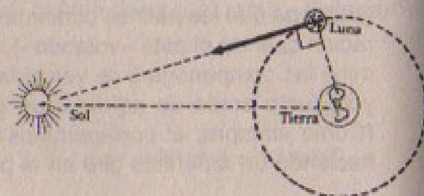
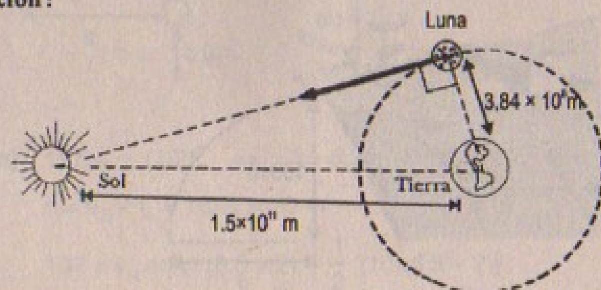


Figura P4.85

Resolución :



$$v_{Tierra/Sol} = \omega.R = \frac{2\pi}{T}.R = \frac{2(3{,}14156)}{3{,}16\times10^7}(1{,}5\times10^{11})$$

$$\therefore \quad v_{Tierra/Sol} = 2{,}98 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$v_{Luna/Tierra} = \omega.R = \frac{2\pi}{T}\times R = \frac{2(3{,}14159)}{2\times36\times10^6}\times(3{,}34\times10^8)$$

$$\therefore \quad v_{Luna/Tierra} = 10{,}2\times10^2 \approx 10^3 \text{ m/s}$$

Por lo tanto: $\quad v_{Luna/Sol} = v_{Luna/Tierra} + v_{Tierra/Sol}$

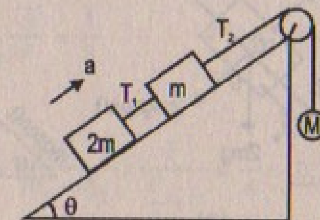
$$\Rightarrow \quad v_{Luna/Sol} = 10^3 \text{ m/s} + 2{,}98\times10^4 \text{ m/s} \approx 30\,800 \text{ m/s}$$

que equivale a: 30,8 km/s.

Capítulo 5

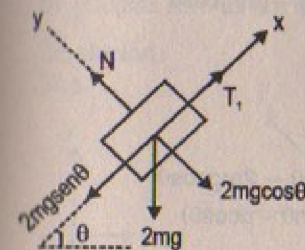
PROBLEMAS DE REPASO

Considere los tres bloques conectados que se muestran en el diagrama. Si el plano inclinado es sin fricción y el sistema está en equilibrio, determine (en función de m, g y θ) a) la masa M, y b) las tensiones T_1 y T_2. Si se duplica el valor encontrado para la masa suspendida en el inciso a), determine c) la aceleración de cada bloque, y d) las tensiones T_1 y T_2. Si el coeficiente de fricción estática entre m y 2m y el plano inclinado es μ_c y el sistema está en equilibrio, encuentre e) el valor mínimo de M, y f) el valor máximo de M. g) Compare los valores de T_2 cuando M tiene sus valores mínimo y máximo.

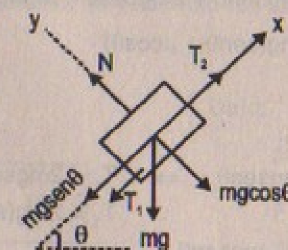


Resolución:

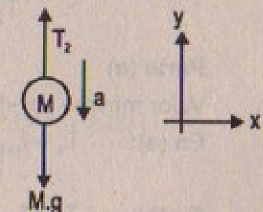
Parte (a)



(a)



(b)



(c)

En (a)

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2mg\,sen\theta = T_1$

En (b)

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad mgsen\theta + T_1 = T_2 \Rightarrow T_2 = mgsen\theta + 2mgsen\theta = 3mgsen\theta$

En (c)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = Mg \quad \Rightarrow \quad 3mgsen\theta = M.g \quad \therefore \quad M = 3msen\theta$

Parte (b)

Si: $M = 2(3m\,sen\theta) \Rightarrow T_2 = 6mg\,sen\theta \wedge T_1 = 5mg\,sen\theta$

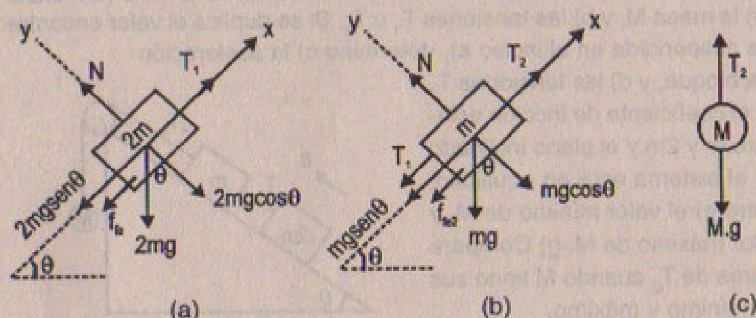
Parte (c)

$Mg - T_2 = M.a$ ... (1) $\wedge$ $T_2 - 3mg\,sen\theta = 3m(a)$ ... (2)

(1) + (2):

$$\Rightarrow Mg - 3mg\,sen\theta = a(M + 3n) \quad \therefore a = \frac{g\,(M - 3m\,sen\theta)}{M + 3m}$$

Parte (d)



En (a) $T_1 = 2mg\,sen\theta + \mu 2mg\cos\theta$

$\Rightarrow T_1 = 2mg(sen\theta + \mu\cos\theta)$

$T_2 = T_1 + mg\,sen\theta + mg\cos\theta\,.\,\mu$

$\therefore T_2 = 2mg\,sen\theta + 2mg\cos\theta + mg\,sen\theta + \mu mg\cos\theta$

$\therefore T_2 = 3mg(sen\theta + \mu\cos\theta)$

Parte (e)

Valor mínimo de «M»:

En (a): $T_1 + f_{fe1} = 2mg\,sen\theta \Rightarrow T_1 = 2mg\,sen\theta - 2mg\cos\theta$

$\therefore T_1 = 2mg(sen\theta - \mu\cos\theta)$

En (b): $T_2 + f_{fe2} = T_1 + mg\,sen\theta$

$\Rightarrow T_2 = 2mg\,sen\theta - 2mg\mu\cos\theta + mg\,sen\theta - \mu mg\cos\theta$

$\therefore T_2 = 3mg(sen\theta - \mu\cos\theta)$

Luego: $M_{mínimo} \Rightarrow Mg = 3mg(sen\theta - \mu\cos\theta)$

$\therefore M_{mín.} = 3m(sen\theta - \mu\cos\theta)$

Parte (f)

Valor máximo de «M» $\Rightarrow M_{máx.} = 3m(sen\theta + \mu\cos\theta)$

PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA LEY DE NEWTON, MASA INERCIAL Y PESO

1. Una fuerza F aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3,00 m/s². La misma fuerza aplicada a un objeto de masa m_2 produce una aceleración 1,00 m/s². a) ¿Cuál es el valor de la proporción m_1/m_2? b) Si se combinan m_1 y m_2 encuentre su aceleración bajo la acción de F.

Resolución :

Parte (a)

$(m_1) \xrightarrow{F}$ $a_1 = 3$ m/s² $\qquad (m_2) \xrightarrow{F}$ $a_2 = 1$ m/s²

$$m_1 = \frac{F}{a_1} = \frac{F}{3} \quad ...(1) \quad \wedge \quad m_2 = \frac{F}{a_2} = F$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{F}{3}}{F} = \frac{1}{3}$$

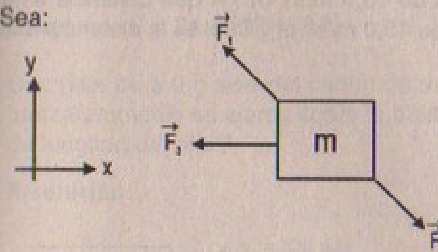
Parte (b)

$$(m_1 + m_2) \xrightarrow{F} \Rightarrow a_{sist.} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{\frac{F}{3} + F} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

2. Tres fuerzas, dadas por $F_1 = (-2{,}00\hat{i} + 2{,}00\hat{j})$ N; $F_2 = (5{,}00\hat{i} - 3{,}00\hat{j})$ N, y $F_3 = (-45{,}0\hat{i})$ N, actúan sobre un objeto para producir una aceleración de magnitud 3,75 m/s². a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? b) ¿Cuál es la masa del objeto? c) Si el objeto inicialmente está en reposo, ¿cuál es su velocidad después de 10,0 s? d) ¿Cuáles son las componentes de velocidad del objeto después de 10,0 s?

Resolución :

Sea:



Dato:

$\vec{F}_1 = -2{,}00\hat{i} + 2{,}00\hat{j}$

$\vec{F}_2 = 5\hat{i} - 3\hat{j}$

$\vec{F}_3 = -45\hat{i}$

$|\vec{a}_{sist.}| = 3{,}75$ m/s²

Parte (a) $\Sigma \vec{F}x = m.\vec{a}_x$

$$\Rightarrow -2\hat{i} + 5\hat{i} - 45\hat{i} = m.\vec{a}_x \Rightarrow \vec{a}_x = -\frac{42\hat{i}}{m} \quad ...(1) \quad \Rightarrow \vec{a}_x = -37{,}5\hat{i}$$

$\Rightarrow \vec{a}_y = -0{,}89\hat{j}$

$$\Sigma \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_y$$

$$\Rightarrow \quad 2\hat{j} - 3\hat{j} + 0\hat{j} \;\Rightarrow\; m \cdot \vec{a}_y \;\Rightarrow\; \vec{a}_y = \frac{-\hat{j}}{m} \quad ...(2)$$

$\therefore$ La dirección de la aceleración es $\tan\theta = \dfrac{\vec{a}_y}{\vec{a}_x} = \dfrac{-1\,\hat{j}/m}{-42\,\hat{i}/m} = 0{,}024$

$$\therefore \quad \theta = \arctan(0{,}024)$$

Parte (b) $\quad F_{sist} = m.a \;\Rightarrow\; m_{sist} = \dfrac{F}{a} = \dfrac{\sqrt{(-42)^2 + (-1)^2}}{3{,}75}$

$$\therefore \quad m_{sist} = 11{,}2 \text{ kg}$$

Parte (c)

Cinemática: $\quad v_f^2 = v_0^2 + 2ad$

Pero: $\quad v_f = v_0 + at$

$$\Rightarrow \quad |\vec{V}_f| = (0{,}0) + (3{,}75)(10) = 37{,}5 \text{ m/s}$$

Parte (d)

$$\vec{V}_{fx} = 0\hat{i} + a_x(10) = 0\hat{i} - 3{,}75\hat{i}(10) = -37{,}5\hat{i} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{V}_{fy} = 0\hat{j} - 0{,}09\hat{j}\,(10) = -0{,}9\hat{j} \text{ m/s}^2$$

3. Una fuerza dependiente del tiempo, $F = (8{,}00\hat{i} - 4{,}00t\hat{j})$ N (donde t está en segundos), se aplica a un objeto de 2,00 kg inicialmente en reposo. a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una velocidad de 15,0 m/s? b) ¿A qué distancia está de su posición inicial cuando su velocidad es 15,0 m/s? c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto en este tiempo?

Resolución:

Sea: $\quad v_0 = 0$

2 kg

$$\vec{F}(t) = (8\hat{i} - 4\hat{j}t) \text{ N}$$

Parte (a) $\quad \vec{F}(t) = m.\dfrac{dv}{dt} = 2.\dfrac{dv}{dt} = 8 - 4t \;\Rightarrow\; \int_0^v dv = \int_0^t 4dt - \int_0^t 2t\,dt$

$$\therefore \quad \vec{V}(t) = 4t\hat{i} - t^2\hat{j}$$

$$|\vec{V}(t)| = 15 = \sqrt{(4t)^2 + (-t^2)^2} \qquad \therefore \quad t = 3 \text{ s}$$

Parte (b)

Sabemos: $\quad v = \dfrac{dx}{dt} = 4t - t^2 \;\Rightarrow\; \int_0^x dx = \int_0^t 4t\,dt - \int_0^t t^2\,dt$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = 2t^2\,\hat{i} - \frac{t^3}{3}\,\hat{j}$$

Luego en t = 10 s $\quad \vec{x}(10) = 200\,\hat{i} - \dfrac{1\,000}{3}\,\hat{j}$

Su velocidad es 15 m/s en t = 3 s

$$\Rightarrow \quad \vec{x}(3) = (18\hat{i} - 9\hat{j}) \text{ m}$$

Parte (c) $\quad |\vec{x}| = \sqrt{(18)^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{45} \approx 20 \text{ m}$

4. Una partícula de 3,00 kg parte del reposo y se mueve una distancia de 4,00 m en 2,00 s bajo la acción de una fuerza constante única. Encuentre la magnitud de la fuerza.

Resolución:

Por dato: $\quad F = m.a \;\Rightarrow\; F = 3a$

Pero: $\quad v_f = v_0 + at$

$\wedge \quad x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; 4 = \dfrac{1}{2}(a)(4) \quad \therefore \; a = 2 \text{ m/s}^2$

Luego: $\quad F = 3a = 3(2) = 6$ N

5. Una bala de 5,0 g sale del cañón de un rifle con una velocidad de 320 m/s. ¿Qué fuerza promedio se ejerce sobre la bala mientras se mueve por el cañón de 0,82 m de longitud del rifle?

Resolución:



Dato: $m_{bala} = 5$ g $= 0{,}005$ kg

$$\vec{F}_{prom} = m.\vec{a}_m = (0{,}005 \text{ kg})(\vec{a}_m) = (0{,}005)\frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{t} = 5 \times 10^{-3}\,\frac{(32)^2 \times 10^3}{2 \times 82}$$

Cinemática:

$$0.82 = 320t + \frac{1}{2}at^2$$

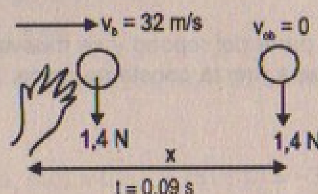
$\wedge \quad v_f^2 = v_i^2 - 2(a)(0,82) \qquad \therefore \quad F_{prom} = 31\ N$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{v_i^2}{2(0,82)} = \frac{320\times320}{2\times82}\times100$$

6. Un lanzador tira una pelota de beisbol de 1,4 N de peso con una velocidad de 32 m/s al acelerar uniformente su brazo durante 0.090 s. Si la bola parte del reposo, a) ¿qué distancia se desplaza antes de acelerarse? b) ¿Qué fuerza promedio se ejerce sobre ella para producir esta aceleración?

6A. Un lanzador tira una pelota de beisbol de peso w con una velocidad v al acelerar uniformemente su brazo durante un tiempo t. Si la bola parte del reposo, a) ¿qué distancia se desplaza antes de acelerarse? b) ¿Qué fuerza promedio se ejerce sobre ella para producir esta aceleración?

Resolución:



Parte (a)

$$v_f = v_i + at$$

$$o = 32 + (0,09)a \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -356\ m/s^2\ \hat{i}$$

$$\Rightarrow \quad x = (32)(0,09) + \frac{1}{2}(-356)(0,09)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = 2,88 - 1,44 = 1,44\ m$$

Parte (b)



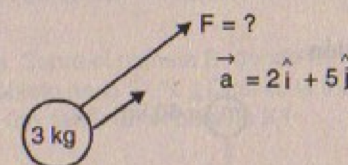
$$mg = 1,4 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1,4}{10} = 0,14\ kg$$

$$F_{promedio} = m.\vec{a}_{prom} = m.\frac{v_f - v_i}{t} = (0,14)(356)$$

$$\therefore \quad F_p = 49,84\ N$$

7. Una masa de 3.0 kg se somete a una aceleración dada por $a = (2,0\hat{i} + 5,0\hat{j})\ m/s^2$. Determine la fuerza resultante, F, y su magnitud.

Resolución:



$$\Sigma\vec{F}_x = 3.\vec{a}_x$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_x = 3(2\hat{i}) = 6\hat{i}\ N$$

$$\Sigma\vec{F}_y = 3.\vec{a}_y$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_y = 3(5\hat{j}) = 15\hat{j}\ N$$

$\therefore$ Fuerza resultante será:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_x + \vec{F}_y = (6\hat{i} + 15\hat{j})\ N$$

Luego: $\quad |\vec{F}_R| = \sqrt{6^2 + 15^2} = 16,2\ N$

8. Un tren de carga tiene una masa de $1,5 \times 10^7$ kg. Si la locomotora puede ejercer un jalón constante de $7,5 \times 10^5$ N, ¿cuánto tarda en aumentar la velocidad del tren del reposo hasta 80 km/h?

Resolución:

$m_{tren} = 1,5 \times 10^7\ kg \quad ; \quad F_{locom} = 7,5 \times 10^5\ N$

$t = ? \quad ; \quad v_o\ tren = 0$

$v_f\ tren = 80\ km/h = \frac{400}{18}\ m/s$

$$\frac{F}{m} = a \Rightarrow \frac{7,5\times10^5}{1,5\times10^7} = 5 \times 10^{-2}\ m/s^2 = a$$

Cinemática:

$$v_f = v_i + at \quad \Rightarrow \quad \frac{400}{18} = 0 + 5,10^{-2}t \quad \therefore \quad t = 0,04 \times 10^{-4}\ s$$

9. Una persona pesa 125 lb. Determine a) su peso en newtons y b) su masa en kilogramos?

Resolución:

Parte (a) Si 1 libra ≈ 445 g $\quad \Rightarrow \quad$ 125 lb ≈ 55 625 g = 55,6 kg

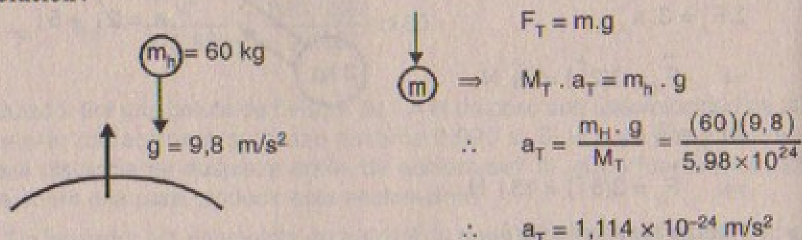
Luego: $m_p = 55,6$ kg

$$\Rightarrow \quad W_{persona} = (55,6)(10) = 556\ N$$

Parte (b) $m_p = 55,6$ kg

10. Si la fuerza gravitacional de la Tierra ocasiona que un estudiante de 60 kg que está cayendo acelere hacia abajo a 9,8 m/s², determine la velocidad hacia arriba de la Tierra durante la caída del estudiante. Considere la masa de la Tierra igual a 5,98 × 10^{24} kg.

Resolución :



$F_T = m.g$

$\Rightarrow \quad M_T \cdot a_T = m_h \cdot g$

$\therefore \quad a_T = \dfrac{m_H \cdot g}{M_T} = \dfrac{(60)(9,8)}{5,98\times10^{24}}$

$\therefore \quad a_T = 1,114 \times 10^{-24}$ m/s²

Entonces: $\quad v_T = \dfrac{a_T . R}{M_T} = \dfrac{1,114\times10^{-24} . R_{tierra}}{5,98\times10^{24} \text{ kg}} = \ ?$

11. La velocidad promedio de una molécula de nitrógeno en el aire es cercana a 6,7 × 10^2 m/s y su masa aproximadamente de 4,68 × 10^{-26} kg. a) Si se requieren 3,0 × 10^{-13} s para que una molécula de nitrógeno golpee una pared y rebote con la misma velocidad pero en dirección opuesta, ¿cuál es la aceleración promedio de la molécula durante este intervalo de tiempo? b) ¿Qué fuerza promedio ejerce la molécula sobre la pared?

Resolución :

Datos: $\quad v_{prom} = 6,7 \times 10^2$ m/s ; $\quad M_{aire} = 4,68 \times 10^{-26}$ kg

Parte (a): $t = 3,0 \times 10^{-13}$ s $\rightarrow \quad v = \dfrac{v_o + v_f}{2} = \dfrac{2v}{2} = 6,7 \times 10^2$ m/s

$$|\vec{a}_{prom}| = \frac{|\vec{V}_f| . |\vec{V}_i|}{t} = \frac{2 . v}{t} = \frac{2\times6,7\times10^2 \text{ m/s}}{3,0\times10^{-13}\text{s}} = 4,5 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

Parte (b): $F_{prom} = M_{aire} \cdot a_{prom} = (4,68 \times 10^{-26} \text{ kg})(4,5 \times 10^{15} \text{ m/s}^2)$

$\therefore \quad F_{prom} = 21 \times 10^{-11}$ N

12. Si un hombre pesa 875 N sobre la Tierra, ¿cuánto pesaría en Júpiter, donde la aceleración de caída libre es 25,9 m/s²?

Resolución :

Peso del hombre en la Tierra: $\quad w_H = m.g = 875$ N

pero g ≈ 10 m/s² $\quad \Rightarrow \quad m.(10) = 875$ N

$\therefore \quad m_p = 87,5$ kg

Peso del hombre en Júpiter:

$g_J = 25,9$ m/s² $\qquad w_H = m.g_J = (87,5)(25,9)$

$\therefore \quad w_H$ = (en Júpiter) = 2 266,3 N

13. Sobre el planeta X un objeto pesa 12 N. Sobre el planeta B, donde la magnitud de la aceleración de caída libre es 1,6 g, el objeto pesa 27 N. ¿Cuál es la masa del objeto y cuál es la aceleración de caída libre (en m/s²) en el planeta X?

Resolución :

Planeta «x» : $\quad m_o \cdot g_x = 12$ N

Planeta «B» : $\quad m_o \cdot (1,69) = 27$N $\quad \Rightarrow \quad m_o \cdot (1,6)(10) = 27$

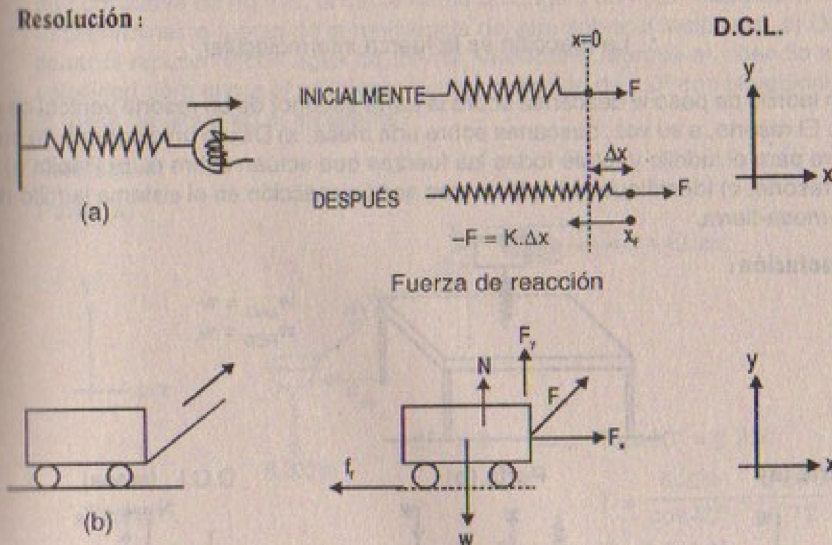
$\therefore \quad m_o = 1,7$ kg

Luego: $\quad$ masa del objeto = 1,7 kg

$\Rightarrow \quad g_x = \dfrac{12 \text{ N}}{1,7 \text{ kg}} = 7,06$ m/s²

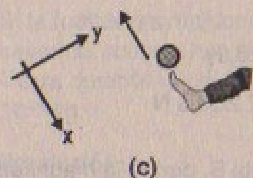
14. Una o más fuerzas externas se ejercen sobre cada objeto encerrado en el recuadro de líneas punteadas mostrado en la figura 5.1. Identifique la reacción para cada una de estas fuerzas.

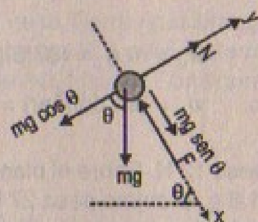
Resolución :



$\therefore \quad$ La reacción en x: f_r

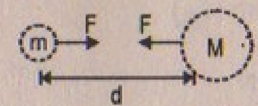
La reacción en y: $n = w - F_y$





∴ La reacción en x: mgsen θ
La reacción en y: N = mgcos θ

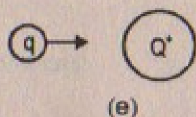


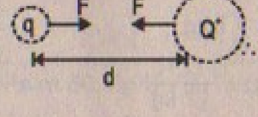


La reacción es:

$$F = k\,.\,\frac{m.M}{d^2}$$

cte. de gravitación





La reacción es la

$$F_{eléctrica} = k\,.\,\frac{q\,.Q}{d^2}$$

↓ cte de Coulumb

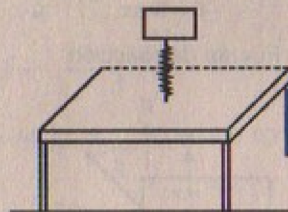




∴ La reacción es la fuerza intermolecular.

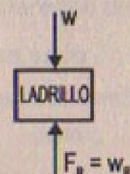
15. Un ladrillo de peso w descansa sobre la parte superior de un resorte vertical de peso w_r. El resorte, a su vez, descansa sobre una mesa. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el ladrillo y rotule todas las fuerzas que actúan sobre él. b) Repita a) para el resorte. c) Identifique todos los pares acción-reacción en el sistema ladrillo-resorte-mesa-tierra.

Resolución :

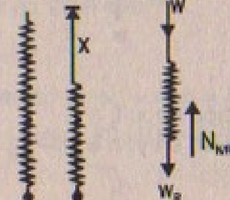


$W_{LAD} = w$
$W_{RES} = w_r$

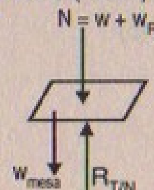
Parte (a)



Parte (b)



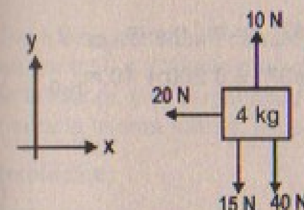
D.C.L. (mesa)



Los pares de acción reacción son: $w \wedge w_r$
$N = w + w_r \wedge R_{T/M}$

16. De manera simultánea se aplican fuerzas de 10,0 N al norte, 20,0 N al este y 15,0 N al sur sobre una masa de 4,00 kg. Obtenga su aceleración.

Resolución :



$$\Sigma \vec{F}_x = m\,.\,\vec{a}_x$$

$$-20\hat{i} = 4\,\vec{a}_x \Rightarrow \vec{a}_x = -5\hat{i}\ m/s^2$$

$$\Sigma \vec{F}_y = m.\vec{a}_y$$

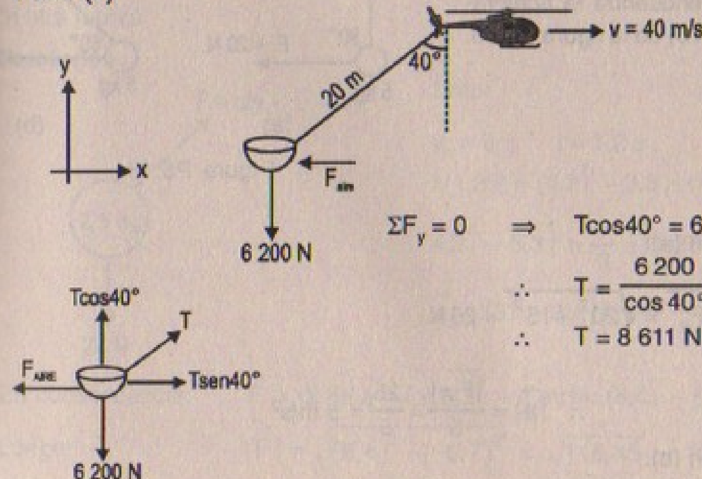
$$10\hat{j} - 15\hat{j} - 40\hat{j} = 4.\vec{a}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_y = -11{,}25\hat{j}$$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{(-5)^2 + (-11{,}25)^2} = 12{,}3\ m/s^2$$

17. Un helicóptero contra incendios transporte un recipiente para agua de 620 kg en el extremo de un cable de 20 m de largo. Al volar de regreso de un incendio a velocidad constante de 40 m/s, el cable forma un ángulo de 40,0° respecto de la vertical. a) Determinar la fuerza de la resistencia del aire sobre el recipiente. b) Después de llenar el recipiente con agua de mar el helicóptero regresa al incendio a la misma velocidad pero ahora el recipiente forma un ángulo de 7,0° con la vertical. ¿Cuál es la masa del agua en el recipiente?

Resolución :

Parte (a)



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos 40° = 6\,200$$

$$\therefore \quad T = \frac{6\,200}{\cos 40°} = \frac{6\,200}{0{,}72}$$

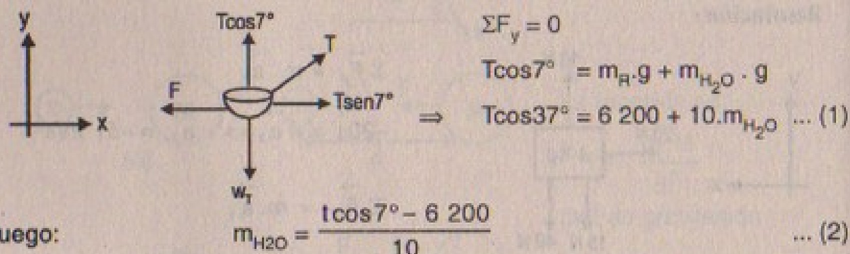
$$\therefore \quad T = 8\,611\ N$$

$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad T\text{sen}40° - F_{aire} = 0$

$\therefore \quad F_{aire} = T\text{sen}40° = 8\,611(0{,}68) = 5\,855{,}5\ N$

Parte (b)



$\Sigma F_y = 0$

$T\cos 7° = m_{R}.g + m_{H_2O} \cdot g$

$\Rightarrow \quad T\cos 37° = 6\,200 + 10.m_{H_2O}$ ... (1)

Luego: $m_{H2O} = \dfrac{t\cos 7° - 6\,200}{10}$ ... (2)

$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad T\text{sen}7° = F$

Pero $F = 5\,855{,}5\ N$

$\therefore \quad T = \dfrac{5\,855{,}5}{\text{sen } 7°} = \dfrac{5\,855{,}5}{0{,}14} = 41\,825\ N$ ... (3)

(3) en (2)

$\therefore \quad m_{H_2O} = \dfrac{(41\,825)\,(0{,}99) - 6\,200}{10} = 3\,521\ kg$

18. Dos fuerzas F_1 y F_2 actúan sobre una masa de 5,00 kg. Si $F_1 = 20{,}0\ N$ y $F_2 = 15.0\ N$, encuentre la aceleración en a) y en b) de la figura P5.18.

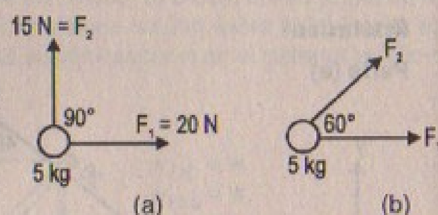


Figura P5.18

Resolución :

Aceleración en (a):

$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25N$

$\therefore \quad |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{F}_R|}{5} = \dfrac{25}{5} = 5\ m/s^2$

Aceleración en (b):

$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60°} = \sqrt{625 + 2(20)(15)(1/2)}$

$\therefore \quad |\vec{F}_R| = 5\sqrt{37}\ N = 30{,}4\ N$

Luego: $\therefore \quad |\vec{a}| = \dfrac{5\sqrt{37}}{5} = 6{,}08\ m/s^2$

19. Una fuerza constante cambia la velocidad de un velocista de 85 kg de 3,0 m/s a 4,0 m/s en 0,50 s. Calcule a) la magnitud de la aceleración del velocista, b) la magnitud de la fuerza, y c) la magnitud de la aceleración de un velocista de 58 kg que experimenta la misma fuerza. (Suponga que el movimiento es lineal.)

Resolución :

Parte (a)

Cinemática: $v_f = v_i + at \Rightarrow 4 = 3 + \dfrac{1}{2}a \quad \therefore \quad a = 2\ m/s^2$

Parte (b)

Dinámica: $F = m.a \quad \Rightarrow \quad F = (85)(2) = 170\ N$

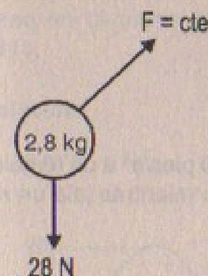
Parte (c)

Dinámica: $F = m.a \quad \Rightarrow \quad 170 = 58a$

$\therefore \quad a = \dfrac{170}{58} = 2{,}93\ m/s^2$

20. Además de su peso, un objeto de 2,80 kg se somete a otra fuerza constante. El objeto parte del reposo y en 1,20 s experimenta un desplazamiento de $(4{,}20\ m)\hat{i} - (3{,}30\ m)\hat{j}$, donde la dirección de $\hat{j}$ es la dirección vertical hacia arriba. Determine la otra fuerza.

Resolución :



Dato:

$v_o = 0\ ; \quad t = 1{,}2\ s$

$x(1{,}25) = (4{,}2\hat{i} - 3{,}3\hat{j})\ m$

$4{,}2\hat{i} - 3{,}3\hat{j} = \dfrac{1}{2}\vec{a}\,(1{,}2)^2$

$\vec{a} = (3\hat{i} - 2{,}4\hat{j})\ m/s^2$

En consecuencia: $\vec{F} = (2{,}8)(\vec{a}) = 2{,}8(3\hat{i} - 2{,}4\hat{j}) = (8{,}4\hat{i} - 6{,}7\hat{j})\ N$

Luego: $|\vec{F}| = \sqrt{(8{,}4)^2 + (-6{,}7)^2} = \sqrt{115{,}45} = 10{,}7\ N$

21. Un objeto de 4,0 kg tiene una velocidad de $3{,}0\hat{i}$ m/s en un instante. Ocho segundos después su velocidad es $(8{,}0\hat{i} + 10{,}0\hat{j})$ m/s. Si se supone que el objeto se sometió a una fuerza neta constante, encuentre: a) las componentes de la fuerza y b) su magnitud.

Resolución :

$\vec{V}_o = (3\hat{i} + 0\hat{j})$ m/s Dato F = cte

En t = 3 s: $\vec{V}_f = (8\hat{i} + 10\hat{j})$ m/s m = 4 kg

Parte (a) $\vec{V}_f = \vec{V}_i + \vec{a}t \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{(8\hat{i}+10\hat{j})-(3\hat{i}+0\hat{j})}{8}$

$$\therefore \quad \vec{a} = \left(\frac{5}{8}\hat{i} + \frac{5}{4}\hat{j}\right) \text{m/s}^2$$

Luego: $F = 4\vec{a} = 4\left(\dfrac{5}{8}\hat{i} + \dfrac{5}{4}\hat{j}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\hat{i} + 5\hat{j}\right)$ N

$\downarrow \quad \downarrow$

$\vec{F}_x \quad \vec{F}_y$

Parte (b) $|\vec{F}| = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + (5)^2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5} = 5{,}6$ N

22. Un pateador de goles de campo descalzo imprime una velocidad de 35 m/s a un balón de fútbol inicialmente en reposo. Si el balón tiene una masa de 0,50 kg y el tiempo de contacto con él es 0,025 s, ¿cuál es la fuerza ejercida por el balón sobre el pie?

Resolución :

Cinemática: $V_f = V_i + a.t \Rightarrow 35 = \dfrac{1}{40}a$

$$\therefore \quad a = 35\,(40) = 1\,400 \text{ m/s}^2$$

Luego: $F = m.a = \dfrac{1}{2}(1\,400) = 700$ N

23. Un camión de 2,0 t proporciona una aceleración de 3,0 pies/s² a un remolque de 5,0 t. Si el camión ejerce la misma fuerza sobre el camino mientras jala un remolque de 15,0 t, ¿qué aceleración se produce?

Resolución :

F → [2t][5t] a → 3 pies/s²

1 t = 1000 kg

$\Rightarrow \dfrac{F}{7t} = 3 \Rightarrow F = 21\,000$ kg. pies/s²

F → [2t][15t] a = ?

$\Rightarrow \dfrac{F}{17t} = a \quad \therefore a = \dfrac{F}{17t} = \dfrac{21t}{17t}$. pies/s²

$$\therefore \quad |\vec{a}| = 1{,}24 \text{ pies/s}^2$$

24. Un electrón de masa $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg tiene una velocidad inicial de $3{,}0 \times 10^5$ m/s. Viaja en línea recta y su velocidad aumenta a $7{,}0 \times 10^5$ m/s en una distancia de 5,0 cm. Considere que su aceleración es constante y a) determine la fuerza sobre el electrón, y b) compare esta fuerza con el peso del electrón.

Resolución :

Dato: $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

m_e $V_o = 3\times10^5$ m/s $V_f = 7\times10^5$ m/s 5×10^{-2} m

Cinemática: $v_f^2 = v_i^2 + 2a(d) \Rightarrow a = \dfrac{49\times10^{10} - 9.10^{10}}{2(5).10^{-2}} = 4 \times 10^{12}$ m/s²

Parte (a) $F = m_e \cdot a = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. $(4 \times 10^{12}$ m/s²$) = 36{,}4 \times 10^{-19}$ N

Parte (b) $W_{e-} = (9{,}1 \times 10^{-31}$ kg$)(10$ m/s²$) = 9{,}1 \times 10^{30}$ N

25. La figura P5.25 muestra la velocidad del cuerpo de una persona durante el ascenso en una barra. Suponiendo que el movimiento es vertical y que la masa de la persona (sin incluir los brazos) es 64,0 kg, determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre el cuerpo por los brazos en diversas etapas del movimiento.

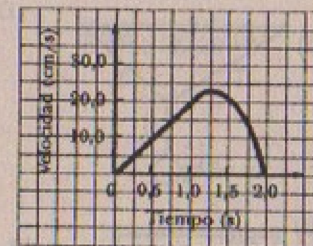
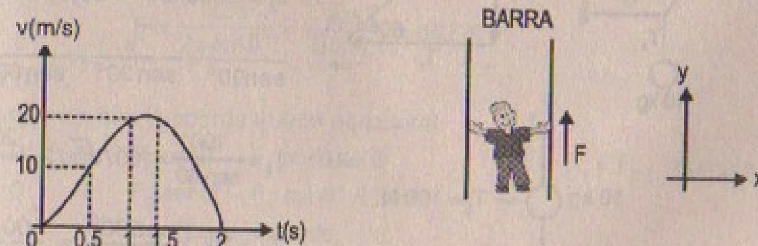


Figura P5.25

Resolución :



$\Sigma F_y = m.a_y$

$F - m.g = n.a_y \Rightarrow F = m(a_y + g)$ ... (1)

Del gráfico:

Para: $t = 0,5 \Rightarrow v_f = v_i + at \Rightarrow a = \dfrac{10}{\frac{1}{2}} = 20\ m/s^2$

$\therefore\ F = 64(20 + 10) = 1\ 920\ N$

Para: $t = 0,5$ y $1 \Rightarrow Vf = Vi + at \Rightarrow a = \dfrac{20-10}{\frac{1}{2}} = 20\ m/s^2$

$\therefore\ F = 1\ 920\ N$ cte. en cada caso.

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

26. Encuentre la tensión en cada cuerda para los sistemas mostrados en la figura P5.26. (Ignore la masa de las cuerdas.)

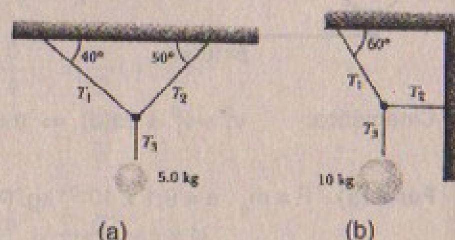
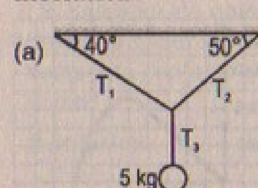


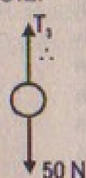
Figura P5.26

Resolución :

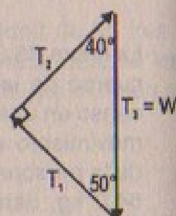
(a)



D.C.L.



$\therefore\ T_3 = 50\ N$



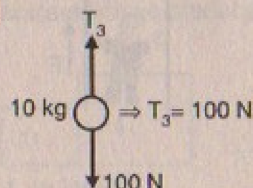
$\Rightarrow \dfrac{T_1}{sen\,40°} = \dfrac{T_2}{sen\,50°} = \dfrac{50}{1}$

$\therefore\ T_1 = 50sen40° = 50(0,64) = 32\ N$

$\wedge\ T_2 = 50sen50° = 50(0,77) = 38,5\ N$

(b)

$\Rightarrow \dfrac{T_1}{sen90°} = \dfrac{T_2}{sen\,30°} = \dfrac{T_3}{sen\,60°}$



$\Rightarrow T_1 = \dfrac{100}{sen60} = 100/\sqrt{3}/2 = \dfrac{200\sqrt{3}}{3}\ N$

$\wedge\ T_2 = 100 \times \dfrac{sen30°}{sen60°} = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}\ N$

27. Una masa de 2,0 kg acelera a 11 m/s² en una dirección 30,0° al norte del este (figura P5.27). Una de las dos fuerzas que actúan sobre la masa tiene una magnitud de 11 N y está dirigida al norte. Determine la magnitud de la segunda fuerza.

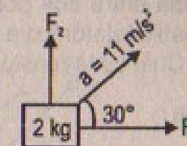
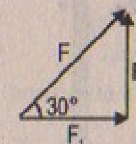


Figura P5.27

Resolución :



$F_1 = Fcos30°$

$F_2 = Fsen30° \Rightarrow 11 = F \times \dfrac{1}{2}$ $\therefore\ |\vec{F}| = 20\ N$

Luego: $\therefore\ F_1 = 22 . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 11\sqrt{3} = 19,05\ N$

28. Un peso de 225 N se une a la parte media de una resistente cuerda y dos personas tiran en los extremos opuestos de la cuerda con la intención de levantar el peso. a) ¿Cuál es la magnitud F de la fuerza que cada persona debe aplicar para suspender el peso, como se muestra en la figura P5.28? b) ¿Pueden jalar de manera tal que hagan que la cuerda quede horizontal? Explique.

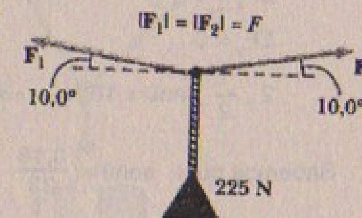


Figura P5.28

Resolución :

Dato: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$

$sen10° \approx 0,17$

Parte (a)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2\,cos10° - F_1\,cos10° = 0$ $\therefore\ F_2 = F_1$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1\,sen10° + F_2\,sen10° - 225 = 0$

$\Rightarrow 2F(sen10°) = 225$

$\therefore\ F = \dfrac{225}{2sen10°} = \dfrac{225}{2(0.17)} = 662\ N$

Parte (b)

Supongamos que la cuerda quede horizontal:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2\,cos0° - F_1\,cos0° = 0$ $\therefore\ F_1 = F_2$ ... cumple

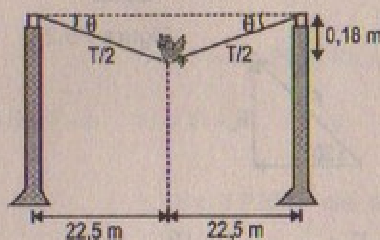
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2\,sen0° - F_1\,sen0° = 225$

$0 = 225$ ... absurdo

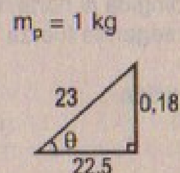
$\therefore$ "La preposición no se cumple".

29. La distancia entre dos postes de teléfono es 45 m. Un pájaro de 1,0 kg se posa sobre el cable telefónico a la mitad entre los postes de modo que la línea se pandea 0.18 m. ¿Cuál es la tensión en el cable? Ignore el peso del cable.

Resolución :



$m_p = 1$ kg



Sabemos:

D.C.L.

T/2 T/2 10 N

$\Sigma F_x = 0$

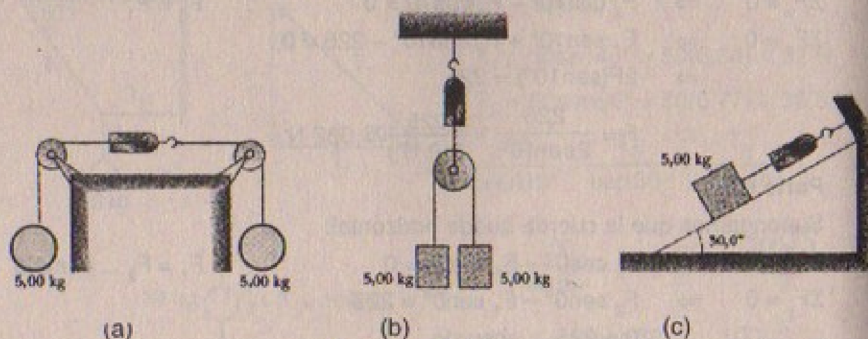
$\Sigma F_y = 0$

$$2 \cdot \frac{T}{2}\ \text{sen}\theta = 10\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{10}{\text{sen}\,\theta} \quad \text{... (1)}$$

Sabemos que: $\text{sen}\theta = \dfrac{0{,}18}{23}$

$$\therefore \quad T = \frac{10 \times 23}{0{,}18} = 1\,273\ \text{N}$$

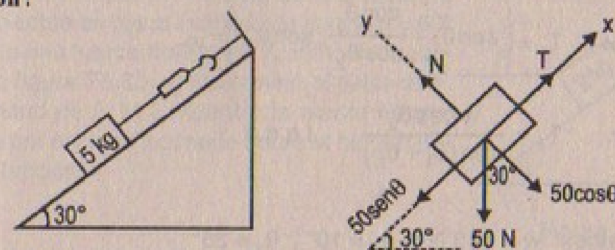
30. Los sistemas mostrados en la figura P5.30 están en equilibrio. Si las balanzas de resorte están calibradas en newtons, ¿qué lectura indican en cada caso? (Ignore la masa de poleas y cuerdas y suponga que el plano inclinado es sin fricción.)



(a) (b) (c)

Figura P5.30

Resolución :



La lectura del dinamómetro es la tensión de la cuerda.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 50\text{sen}30° - T = 0 \qquad \therefore \quad T = 50 \times \frac{1}{2} = 25\ \text{N}$$

31. Un costal de cemento cuelga de tres alambres, como se indica en la figura P5.31. Los dos alambres forman ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal. Si el sistema está en equilibrio, a) demuestre que:

$$T_1 = \frac{W \cos \theta_2}{\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)}$$

b) Dado que $w = 325$ N, $\theta_1 = 10°$ y $\theta_2 = 25°$, encuentre las tensiones T_1, T_2 y T_3 en los alambres.

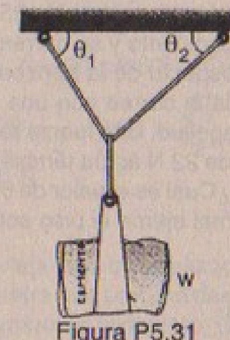
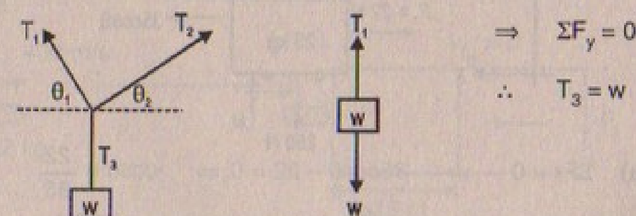


Figura P5.31

Resolución :



$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0$

$\therefore \quad T_3 = w$

Parte (a)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1 = 0 \ \therefore \quad T_1 = T_2 \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \qquad \text{...(1)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2\text{sen}\theta_2 + T_1\text{sen}\theta_1 - T_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_2\text{sen}\theta_2 + T_1\text{sen}\theta_1 = T_3 = w$$

Luego: $$T_1\text{sen}\theta_1 = w - T_2 = w - T_1 \cdot \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = \left(\operatorname{sen}\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} . \operatorname{sen}\theta_2 \right) = w$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{w\cos\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{l.q.q.d}$$

parte (b)

según los datos: $w = 325\ N$; $\theta_1 = 10°$; $\theta_2 = 25°$

$$T_1 = \frac{325\cos 25°}{\operatorname{sen} 35°} = \frac{325(0,84)}{0,54} = 506\ N$$

$$T_2 = \frac{325\cos 10°}{\operatorname{sen} 35°} = \frac{325(0,98)}{0,54} = 590\ N \qquad \therefore \quad T_3 = W = 325\ N$$

32. Una mujer jala su maleta de 25 kg a una velocidad constante y su correa forma un ángulo θ respecto de la horizontal (figura P5.32). Jala la correa con una fuerza de 35 N de magnitud. Una fuerza retardadora horizontal de 22 N actúa también sobre la maleta. a) ¿Cuál es el valor de θ? b) ¿Qué fuerza normal ejerce el piso sobre la maleta?

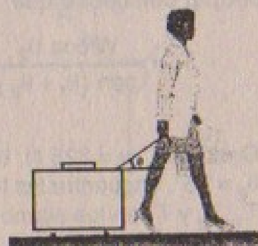
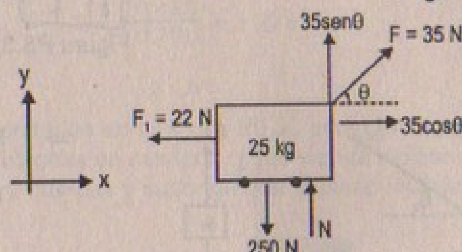


Figura P5.32

Resolución:



Parte (a) $\Sigma Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad 35\cos\theta - 22 = 0 \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{22}{35}$

35, $\sqrt{741}$, θ, 22

$$\therefore \quad \theta = \arccos\left(\frac{22}{25}\right)$$

Parte (b)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F\operatorname{sen}\theta + N - w = 0$

$$\Rightarrow \quad N = w - F\operatorname{sen}\theta = 250 - 35 . \frac{\sqrt{741}}{35}$$

$$\therefore \quad N = 250 - \sqrt{741} = 222,8\ N$$

33. Un bloque de masa m = 2,0 kg se mantiene en equilibrio sobre un plano inclinado de ángulo θ = 60° mediante una fuerza horizontal F, como se muestra en la figura P5.33. a) Determine el valor de F, la magnitud de F. b) Encuentre la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el bloque (ignore la fricción).

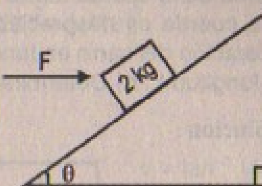


Figura P5.33

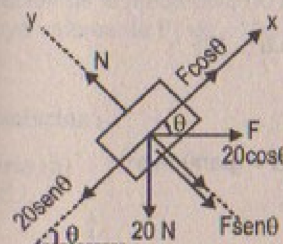
Resolución:

Dato: θ = 60°

Parte (a)

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F\cos\theta - w\operatorname{sen}\theta = 0$

$\therefore \quad F\cos 60° = 20\operatorname{sen}60° \quad \therefore \quad F = 20 . \frac{\operatorname{sen}60°}{\cos 60°} = 34,6\ N$



Parte (b)

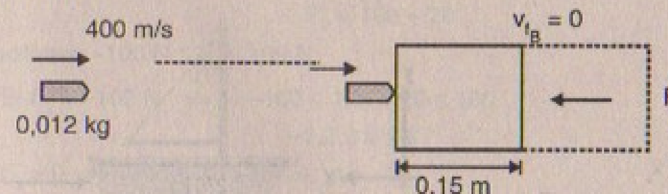
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 20\cos 60° - F\operatorname{sen}60° = 0$

$$\Rightarrow \quad N = 20 \times \frac{1}{2} + 34,6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \quad N = 40\ N$

34. La bala de un rifle con una masa de 12 g viaja con una velocidad de 400 m/s y golpea un gran bloque de madera, al cual penetra una profundidad de 15 cm. Determine la magnitud de la fuerza retardadora (supuesta constante) que actúa sobre la bala.

Resolución:



Sabemos: cinemática

$$v_f^2 = v_i^2 - 2a.d \quad \Rightarrow \quad 0 = (400)^2 - 2a\,(0,15)$$

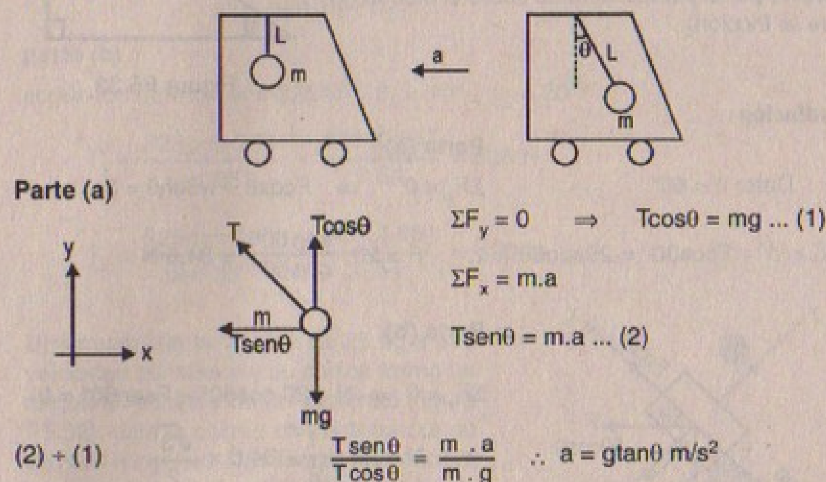
$$\therefore \quad a = 0,58 \times 10^6 = 53 \times 10^4\ m/s^2$$

Luego: $\quad F_{ret} = 12 \times 10^{-3} \times 53 \times 10^4 = 63,6\ N$

35. Un acelerómetro sencillo se construye suspendiendo una masa m de una cuerda de longitud L que se une a la parte superior de un carro. Cuando el carro se acelera el

sistema de la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. a) Suponiendo que la masa de la cuerda es despreciable comparada con m, obtenga una expresión para la aceleración del carro en función de θ y muestre que es independiente de la masa m y la longitud L. b) Determine la aceleración del carro cuando θ = 23°.

Resolución:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$ ... (1)

$\Sigma F_x = m.a$

$T\text{sen}\theta = m.a$ ... (2)

(2) ÷ (1) $\dfrac{T\,\text{sen}\theta}{T\cos\theta} = \dfrac{m\,.\,a}{m\,.\,g}$ ∴ $a = g\tan\theta$ m/s²

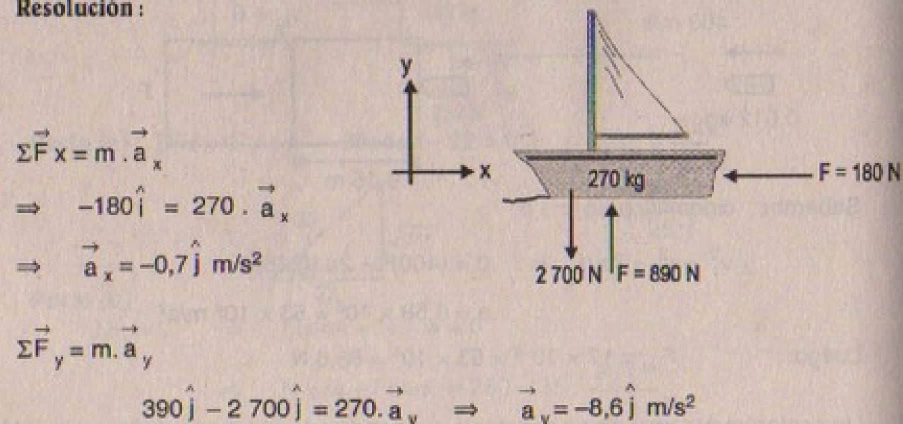
Parte (b)

$\theta = 23°$

$\Rightarrow a = (10)(\tan 23°) = 10(0{,}62) = 6{,}2$ m/s²

36. La fuerza del viento sobre la vela de un velero es de 390 N en dirección al norte. El agua ejerce una fuerza de 180 N al este. Si el bote junto con la tripulación tiene una masa de 270 kg. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de su aceleración?

Resolución:



$\Sigma \vec{F}x = m\,.\,\vec{a}_x$

$\Rightarrow -180\hat{i} = 270\,.\,\vec{a}_x$

$\Rightarrow \vec{a}_x = -0{,}7\hat{j}$ m/s²

$\Sigma \vec{F}_y = m.\vec{a}_y$

$390\hat{j} - 2\,700\hat{j} = 270.\vec{a}_y \Rightarrow \vec{a}_y = -8{,}6\hat{j}$ m/s²

La magnitud de la aceleración será: $|\vec{a}| = \sqrt{(-0{,}7)^2 + (-8{,}6)^2}$

∴ $|\vec{a}| = 8{,}63$ m/s²

Luego la dirección será: $\tan\theta = \dfrac{\vec{a}_y}{\vec{a}_x} = \dfrac{-8{,}6}{-0{,}7} = 12{,}3$ ∴ $\theta = \tan^{-1}(12{,}3)$

37. En el sistema que se muestra en la figura P5.37, una fuerza horizontal F, actúa sobre una masa de 8,00 kg. a) ¿Para cuáles valores de F_x la masa de 2,00 kg acelera hacia arriba? b) ¿Para cuáles valores de F_x la tensión en la cuerda es cero? c) Grafique la aceleración de la masa de 8,00 kg contra F_x. Incluya valores de F_x de –100 N a + 100 N.

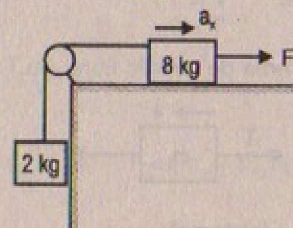
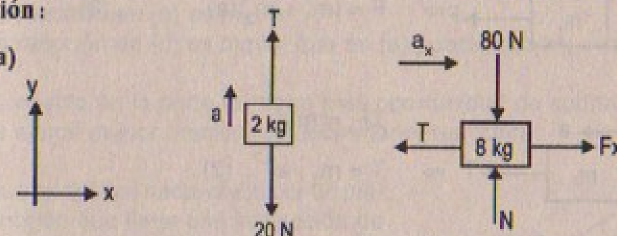


Figura P5.33

Resolución:

Parte (a)

D.C.L.



En (a): $\Sigma F_y = m.a \Rightarrow T - 20 = 2a \Rightarrow T = 2a + 20$ ... (1)

En (b): $\Sigma F_x = m.a_x \Rightarrow F_x - T = 3a \Rightarrow F_x = 8a + T = 10a + 20$ ... (2)

∴ $F_x = 10a + 20$

Para valores: $-100\text{ N} \leq F_x \leq 100\text{ N}$

$\Rightarrow$ Si $F_x = -100$ N $\Rightarrow -100 \leq 10a + 20 \leq 100$

∴ $-1{,}2 \leq a \leq 8$

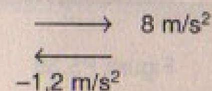
Pero $F_x > 0 \Rightarrow 10a + 20 > 0 \Rightarrow a > -2$

Luego F_x será positivo cuando «a» varíe de: $-1{,}2 \leq a \leq 8$

Parte (b)

Si: $F_x = -100$ N $\Rightarrow a = \dfrac{-100 - 20}{10} = -1{,}2$ m/s²

Si: $F_x = 100$ N $\Rightarrow a = 8$ m/s² $\Rightarrow \vec{a} = 6{,}3$ m/s² $\vec{i}$



38. Dos masas, m_1 y m_2, situadas sobre una superficie horizontal sin fricción se conectan mediante una cuerda sin masa. Una fuerza, F, se ejerce sobre una de las masas a la derecha (figura P5.38). Determine la aceleración del sistema y la tensión, T, en la cuerda.

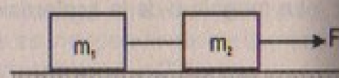


Figura P5.38

Resolución :

Hallar: F = ? ;
T = ?

Diagrama de cuerpo libre: (m_2)

$\Sigma F_x = m.a$

$\Rightarrow \quad F - T = m_2 \;\Rightarrow\; F = m_2 a + T \quad ... (1)$

D.C.L. (sistema)

$\Sigma F_x = \Sigma m.a$

$\Rightarrow \quad F = (m_1 + m_2)(a) \quad ... (2)$

D.C.L. (n_1)

$\Sigma F_x = m.a$

$\Rightarrow \quad T = m_1 . a \quad ... (3)$

Reemplazando (3) en (1):

$F = m_2 . a + m_1 . a \qquad \therefore \quad F = (m_1 + m_2)(a)$

Luego: $\quad a_{sistema} = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \quad ; \quad T_{cuerda} = \dfrac{m_1 F}{m_1 + m_2}$

39. Un pequeño insecto es colocado entre dos bloques de masa m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$) sobre una mesa sin fricción. Una fuerza horizontal, F, puede aplicarse ya sea a m_1, como muestra la figura P5.39a, ó a m_2, como en la figura P5.39b. ¿En cuál de los dos casos el insecto tiene mayor oportunidad de sobrevivir? Explique. (Sugerencia: Determine la fuerza de contacto entre los bloques en cada caso.)

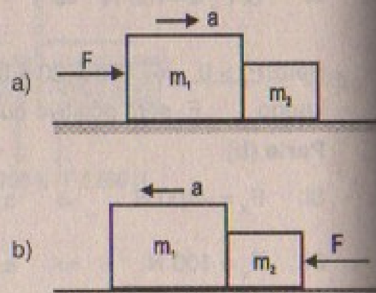


Figura P5.39

Resolución :

D.C.L. (a)

$R = m_2 . a \; ... (2)$

$F - R = m_1 . a \quad ... (1)$

(2) en (1) $\Rightarrow \quad F = (m_1 + m_2)(a)$

D.C.L. (b)

$R = m_1 . a \; ... (1)$

$F - R = m_2 a \quad \Rightarrow \quad F = (m_1 + m_2)a$

En ambos casos (a) y (b) la fuerza es la misma.

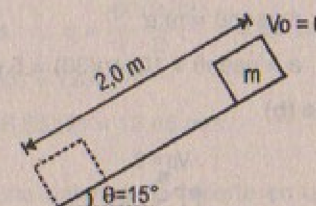
La reacción en (a) es $m_2 . a$

La reacción en (b) es $m_1 . a$

∴ La reacción en (b) es mayor que en (a) puesto que $m_1 > m_2$

⇒ El insecto en la parte (a) tiene más oportunidad de sobrevivir, porque en ella se ejerce menor presión, es decir menor reacción.

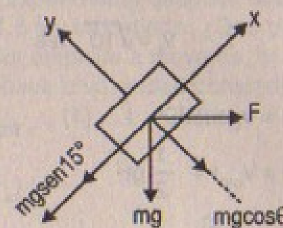
40. Un bloque se desliza hacia abajo por un plano sin fricción que tiene una inclinación de θ = 15°. Si el bloque parte del reposo en la parte superior y la longitud de la pendiente es 2,0 m, encuentre a) la magnitud de la aceleración del bloque, y b) su velocidad cuando alcanza el pie de la pendiente.



Resolución :

Parte (a)

D.C.L.



$\therefore \quad a_{bloque} = g\,sen15°$

Cinemática:

$v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d)$

$\Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2a(2)} \quad ... (1)$

$\Sigma F_x = m.a$

$mg\,sen15° = m.a$

$\therefore \quad a = g\,sen15°$

$\Rightarrow \quad a = 10 . \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) m/s^2$

Parte (b)

De (1): $v_F = \sqrt{4(a)} \Rightarrow v_f = 2\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$ m/s

41. Un bloque de masa m = 2.0 kg se suelta del reposo a una altura h = 0,5 m de la superficie de una mesa, en la parte superior de una pendiente con un ángulo θ = 30°, como se ilustra en la figura P5.41. La pendiente está fija sobre una mesa de altura H = 2,0 m y la pendiente no presenta fricción. a) Determine la aceleración del bloque cuando se desliza hacia abajo de la pendiente. b) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando deja la pendiente? c) ¿A qué distancia de la mesa el bloque golpeará el suelo? d) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido entre el momento en que se suelta el bloque y cuando golpea el suelo? e) ¿La masa del bloque influye en cualquiera de los cálculos anteriores?

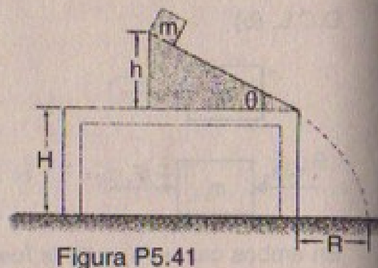


Figura P5.41

Resolución :

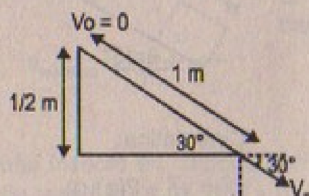
Parte (a)
D.C.L.

$\Sigma F_x = m.a$

$\Rightarrow mg\,sen\theta = m.a$

$\therefore a = g\,sen\theta = 10sen(30) = 5\ m/s^2$

Parte (b)



Cinemática:

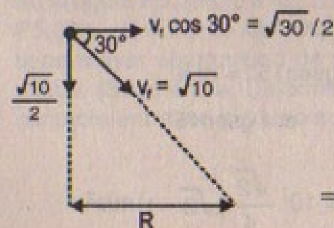
$v_f^2 = v_i^2 + 2.ad$

$v_f^2 = 0 + 2(1)(5)$

$\therefore v_f = \sqrt{10}$ m/s

Parte (c)

$v_f \cos 30 = \sqrt{30}/2$



$R = v_f \cos 30° . t \ ...\ (1)$

$H = v_{oy}.t + \frac{1}{2}gt^2$

$2 = \frac{\sqrt{10}}{2}.t + 5t^2$

$\Rightarrow 10t^2 + \sqrt{10}\,t - 4 = 0 \quad \therefore t = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{170}}{20}$

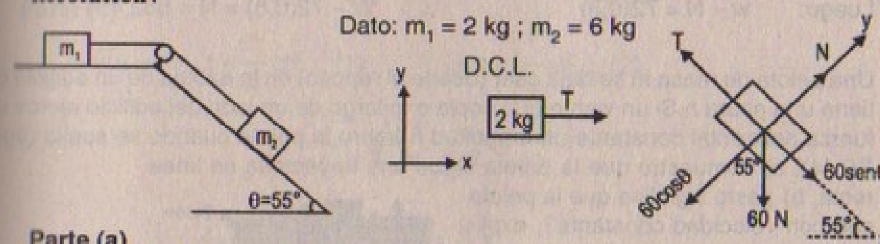
Luego: $R = \frac{\sqrt{10}}{2} . \frac{\sqrt{10}}{20}\left(1+\sqrt{17}\right) = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$ m

Parte (d) $t = \frac{\sqrt{10}}{20}\left(1+\sqrt{17}\right)$ s

Parte (e) «No» porque hay conservación de energía.

42. En la figura 5.13 se muestran dos masas conectadas por medio de una cuerda sin masa que pasa sobre una polea sin masa. Si la pendiente tampoco presenta fricción y si m_1 = 2,00 kg, m_2 = 6,00 kg y θ = 55,0°, encuentre: a) la magnitud de la aceleración de las masas, b) la tensión en la cuerda, y c) la velocidad de cada masa 2,00 s después de que aceleran desde el reposo.

Resolución :



Parte (a)
$T = 2a \quad ...\ (1)$

$60sen55° - T = 6.a \Rightarrow 60sen55° = 3.a \ \therefore a = \frac{60(0,83)}{3} = 6,23\ m/s^2$

Parte (b) $T = 2a \Rightarrow T = 2(6,23) = 12,46$ N

Parte (c) $v_f = v_i + a.t \Rightarrow v_f = 0 + (6,23)(2) = 12,46$ m/s

43. Un hombre de 72 kg está parado sobre una balanza de resorte en un elevador. Partiendo del reposo, el elevador asciende y alcanza su velocidad máxima de 1,2 m/s en 0,80 s. Se desplaza con esta velocidad constante durante los siguientes 5,0 s. El elevador experimenta después una aceleración uniforme en la dirección y negativa durante 1,5 s y se detiene. ¿Qué pasa con el registro de la balanza a) antes de que el elevador empiece a moverse, b) durante los primeros 0,80 s, c) mientras el elevador se mueve a velocidad constante y d) durante el tiempo que desacelera?

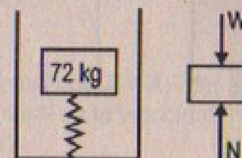
Resolución :

D.C.L.

V_F = 1,2 m/s

t = 0,8 s

V_o = o



Parte (a) (reposo)

$$w = N = 720\ N$$

Parte (c)

$v = cte \Rightarrow a = 0$

$$N - w = 72a = 72\,\frac{(1{,}2)}{0{,}8} = 108$$

$\therefore \quad N = 720 + 108 = 828\ N$

$\therefore \quad N = 828\ N$

Luego: $\quad w - N = 72(0{,}8)$

Parte (b)

Durante t = 0,8

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5\ m/s^2$$

$\Rightarrow \quad N = 828\ N$

Parte (d)

$v_f = v_i + a.t \Rightarrow v_f = 1{,}2 + (1{,}5)a$

$\Rightarrow \quad a = 1{,}2/1{,}5 = 0{,}8\ m/s$

$\therefore \quad W - 72(0{,}8) = N = 662{,}4\ N$

44. Una pelota de masa m se deja caer (desde el reposo) en la azotea de un edificio que tiene una altura h. Si un viento que sopla a lo largo de un lado del edificio ejerce una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre la pelota cuando se suelta (figura P5.44), a) demuestre que la pelota sigue una trayectoria en línea recta; b) ¿esto significa que la pelota cae con velocidad constante?, explique; c) si la pelota se deja caer con una velocidad inicial vertical diferente de cero v_o, ¿seguirá con una trayectoria en línea recta?, explique, d) Utilizando m = 10,0 kg; h = 10,0 m; F = 20,0 N, y v_o = 4,00 m/s hacia abajo, ¿a qué distancia del edificio la pelota golpeará el suelo?

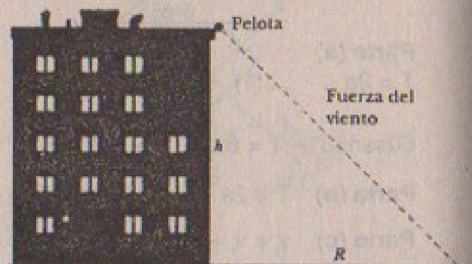
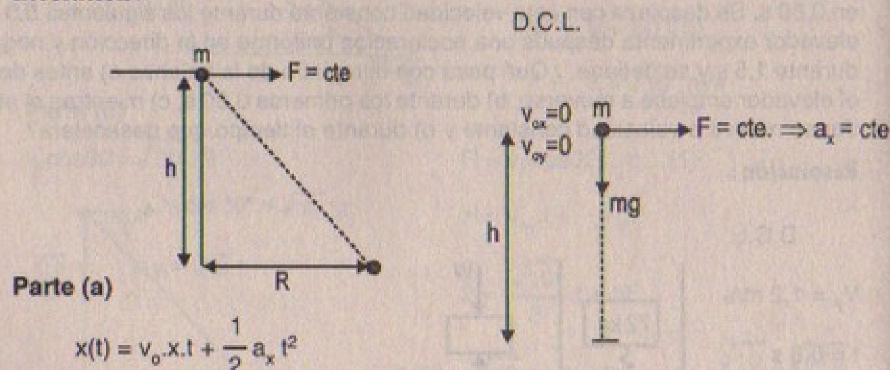


Figura P5.44

Resolución:



Parte (a)

$$x(t) = v_o.x.t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 \ldots (1)$$

$$y(t) = v_{oy}.t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ldots (2)$$

$\Rightarrow$ (1) en (2):

$$+y = \frac{1}{2}g\,\frac{(2x)}{a}$$

$$\therefore \quad \vec{y} = -\left(\frac{g}{a}\right).\vec{x}$$

Ecuación de una recta

Parte (b)

Cae con aceleración de la gravedad cte. y avanza con aceleración en x cte

osea cae con $a_T = \sqrt{a^2 + g^2} \quad \therefore \quad v \neq cte$

Parte (c)

$$-y(t) = -v_{oy}.t + \frac{1}{2}gt^2 \ldots (1) \quad ; \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 \ldots (2)$$

(2) en (1):

$$-y = -v_{oy}\sqrt{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{2}g\left(\frac{2x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -y = \frac{-v_{oy}\sqrt{2x}}{\sqrt{a}} + \frac{g}{a}x$$

Desarrollando queda: $y^2 = \left(\frac{g}{a}\right)^2 x^2 + \frac{2x\,v_o}{a}\left(v_o - g\sqrt{\frac{2x}{a}}\right) \neq$ recta

Parte (d)

Datos: $\quad m = 10\ kg\ ; \quad h = 10\ m\ ; \quad F = 20\ N\ ; \quad v_o = 4\ m/s \downarrow$

$$10 = 4t + \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \Rightarrow \quad 5t^2 + 4t - 10 = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{216}}{10} = \frac{3\sqrt{6} - 2}{5}\ s$$

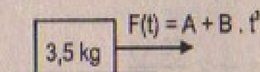
$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}.a_x t^2 \quad \ldots (1)$$

$$F = (10)(a_x) = 20 \qquad \therefore \quad a_x = 2\ m/s^2$$

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)(2)\frac{\left(3\sqrt{6} - 2\right)}{5} \qquad \therefore \quad R = \frac{3\sqrt{6} - 2}{5}\ m$$

45. Una fuerza horizontal neta $F = A + Bt^3$ actúa sobre un objeto de 3,5 kg, donde A = 8,6 N y B = 2,5 N/s³. ¿Cuál es la velocidad horizontal de este objeto 3,0 s después de que parte del reposo?

Resolución :



Dato: 8,6 N = A ; B = 2,5 N/s³

t = 3 s v_f = ?

$$F(t) = m\,.\,\frac{dv}{dt} = 9{,}6 + 2{,}5\,t^3$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}5\,\frac{dv}{dt} = 8{,}6 + 2{,}5t^3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^v dv = \int_0^3 2{,}46\,dt + \int_0^3 0{,}71t^3dt$$

$$v(3) = v_f = 2{,}46\;t\Big|_0^3 + \frac{0{,}71}{4}t^4\Big|_0^3$$

$$\therefore \quad v_f = 2{,}46(27) + \frac{0{,}71}{4}(81) \quad \Rightarrow \quad v_f = 66{,}42 + 14{,}38 = 80{,}80\text{ m/s}$$

46. La masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a la masa m_2 por medio de una polea sin masa P_1 y una polea fija sin masa P_2 como se muestra en la figura P5.46. a) Si a_1 y a_2 son las magnitudes de las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, ¿cuál es la relación entre estas aceleraciones? Determine expresiones para b) las tensiones en las cuerdas, y c) las aceleraciones a_1 y a_2 en función de m_1, m_2 y g.

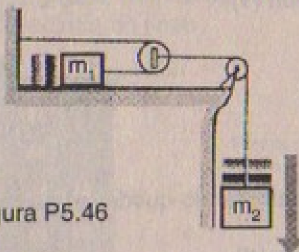
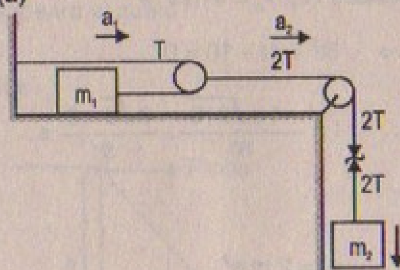


Figura P5.46

Resolución :

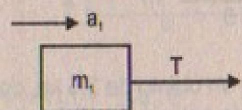
Parte (a)



$$2\vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

Por propiedad de poleas

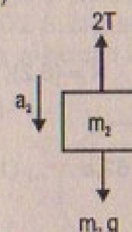
D.C.L. (m_1)



$$\Sigma F_x = m_1\,a_1$$

$$T = m_1\,a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{T}{m_1} \;...\;(1)$$

D.C.L. (m_2)



$$\Sigma F_y = m.a_2$$

$$m_2.g - 2T = m_2.a_2 \;...\;(2)$$

(1) en (2):

$$m_2g - 2(m_1.a_1) = m_2.a_2$$

$$m_2g = 2m_1.a_1 + m_2.a_2 \;...\;(3)$$

En (3): $\quad m_2.g = 2m_1.a_1 + m_2a_2 \;\Rightarrow\; m_2g = 2m_1a_1 + m_2\,(2a_1)$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{m_2g}{2(m_1 + m_2)}$$

$$m_2(g - a_2) = m_2(a_{ef}) = 2m_1.a_1 \quad \therefore \quad \frac{a_{ef}}{a_1} = \frac{2m_1}{m_2}$$

Luego: (por propiedad): $\quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{2}$

Parte (b) $\quad T = m_1.a_1 =$

$$\therefore \quad T = m_1\left(\frac{m_2.\,a_{ef}}{2m_1}\right) = \frac{m_2}{2}(a_{ef}) = \frac{m_2}{2}(g - a_2)$$

$$\therefore \quad T = m_1.a_1 = \frac{m_1\,m_2.g}{2(m_1 + m_2)}$$

Parte (c) $\quad a_1 = \dfrac{T}{m_1} = \dfrac{m_2}{2m_1}(g - a_2) \quad ; \quad a_2 = g - \dfrac{2m_1.a_1}{a_2} = g - 2m\,.\,\dfrac{a_1}{a_2}$

FUERZAS DE FRICCIÓN

47. Un bloque que cuelga, de 8,5 kg, se conecta por medio de una cuerda que pasa por una polea a un bloque de 6,2 kg que se desliza sobre una mesa plana (figura P5.47). Si el coeficiente de fricción durante el deslizamiento es 0,20, encuentre la tensión en la cuerda.

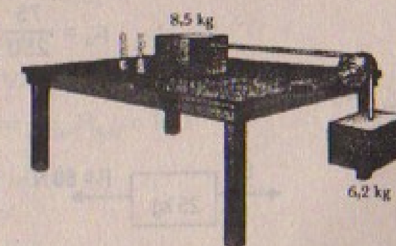
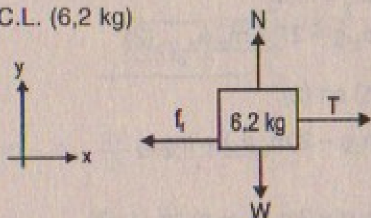


Figura P5.47

Resolución:

D.C.L. (6,2 kg)

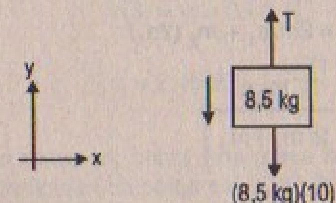


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (6,2)(10) = 62$ N

$\Sigma F_x = (6,2)(a)$

$T - (0,2)(62) = 62,a$ ... (1)

D.C.L. (8,5 kg)



$\Sigma F_y = (8,5)(a)$

$(8,5)(10) - T = 8,5(a)$ ... (2)

(2) en (1):

$(8,5)(10) = 8,5a + 6,2a + (0,2)(62)$

$85 = 14,7a + 12,4$

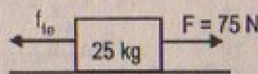
$72,6 = 14,7a \quad \therefore \quad a = 4,9\ m/s^2$

Luego: $T = 6,2(4,9) + (0,2)(62)$

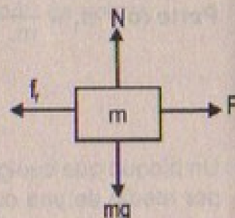
$\therefore \quad T = 30,38 + 12,40 = 42,78$ N

48. Un bloque de 25 kg está incialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Se necesita una fuerza horizontal de 75 N para poner el bloque en movimiento. Después de que empieza a moverse, se necesita una fuerza de 60 N para mantener al bloque en movimiento con velocidad constante. Determine los coeficientes de fricción estático y cinético a partir de esta información.

Resolución:



D.C.L.

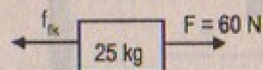


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (25)(10) = 250$ N

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 75\ N = \mu_e.N$

$\therefore \quad \mu_e = \dfrac{75}{250} \quad \therefore \quad \mu_e = 0,3$

Después



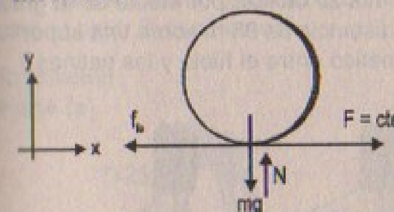
$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad 60 = f_{tk} = \mu_k.N = \mu_k\ 250$

$\therefore \quad \mu_k = \dfrac{60}{250} = 0,24$

49. Suponga que el coeficiente de fricción entre las ruedas de un auto de carreras y la pista es 1,00. Si el auto parte del reposo y acelera a una tasa constante por 335 m, ¿cuál es la velocidad al final de la carrera?

Resolución:



Estado inminente:

$\mu_e . N = m.a$

$\Rightarrow \quad \mu_e . m.g = m.a$

$\therefore \quad a = \mu_e.g = 10\ m/s^2$

Cuando acelera: (cinemática)

$v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d) \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = 2(10)(335)$

$\therefore \quad v_f = 10\sqrt{67}$ m/s

50. ¿Qué fuerza debe aplicarse sobre un bloque A con el fin de que el bloque B no caiga (figura P5.50). El coeficiente de fricción estático entre los bloques A y B es 0,55, y la superficie horizontal no presenta fricción.

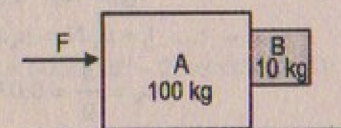
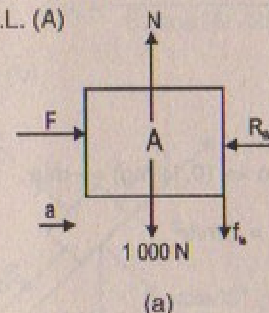


Figura P5.50

Resolución:

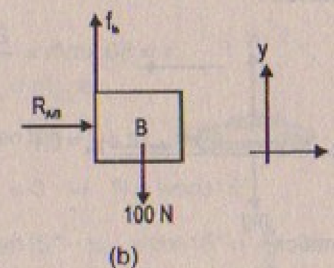
Datos: $\mu_e = 0,55$

D.C.L. (A)



(a)

D.C.L. (G)



(b)

En (a): $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1000 + f_{fe} = N$

$\Sigma F_x = 100a \quad \Rightarrow \quad F - R_{B/A} = 100a$ ... (1)

En (b): $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{fe} = 100 \Rightarrow \mu_e.R_{A/B} = 100$

pero $\mu_e = 0,55 \quad \therefore \quad R_{A/B} = \dfrac{100}{0,55} = 182$ N

$\Sigma F_x = 10.a$

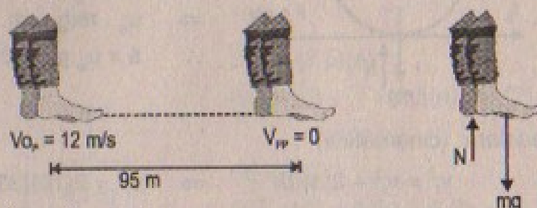
$\Rightarrow \quad R_{A/B} = 10a \Rightarrow 182 = 10a \quad \therefore \quad a = 18,2\ m/s^2$ ... (2)

(2) en (1): F – 10a = 100a ⇒ F = 110a

∴ F = 110(18,2) = 2 002 N

51. Un patinador de hielo que se mueve a 12 m/s se desliza por efecto de la gravedad hasta detenerse después de recorrer una distancia de 95 m sobre una superficie de hielo. ¿Cuál es el coeficiene de fricción cinético entre el hielo y los patines?

Resolución :



Cinemática $v_{fp}^2 = v_i^2 - 2a.d$

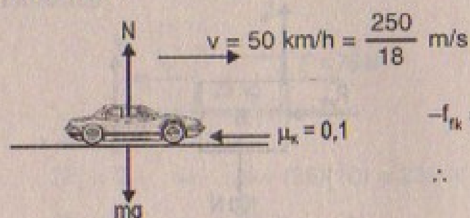
$v_{fp}^2 = 12^2 - 2(a)(95)$ ∴ $|a| = 0,76\ m/s^2$

$f_f = \mu_k.N = \mu_k.m.g = m.a$

∴ $\mu_k = \frac{a}{g} = 0,076$

52. Un auto viaja a 50,0 mi/h sobre una autopista horizontal. a) Si el coeficiente de fricción entre el camino y las llantas en un día lluvioso es 0,10, ¿cuál es la distancia mínima en la cual se detendrá el automóvil? b) ¿Cuál es la distancia de frenado cuando la superficie está seca y $\mu = 0,60$?

Resolución :



$v = 50\ km/h = \frac{250}{18}\ m/s$

$-f_{fk} = m.a \Rightarrow (0,1)(mg) = -m.a$

∴ $|a| = 1\ m/s^2$

cinemática:

$v_f = v_i - a(t) \quad \wedge \quad v_f^2 = v_i^2 - 2(a)(d)$

∴ $d = \frac{v_i^2}{2(1)} = \frac{250\times250}{2\times18\times18} = 96,5\ m$

Parte (b)

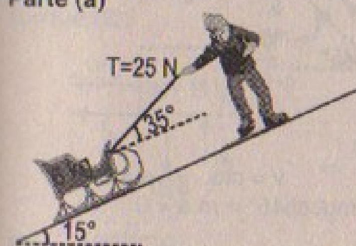
$-f_f = m(a) \Rightarrow -(0,6)(mg) = m.a$ ∴ $|a| = 6\ m/s^2$

$\Rightarrow d = \frac{v_i^2}{2(6)} = \frac{250\times250}{18\times18\times2\times6} = 16,1\ m$

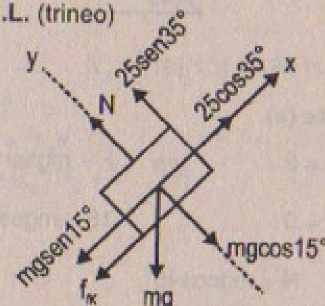
53. Un muchacho arrastra su trineo de 60,0 N a velocidad constante al subir por una colina de 15°. Con una cuerda unida al trineo lo jala con una fuerza de 25 N. Si la cuerda tiene una inclinación de 35° respecto de la horizontal, a) ¿cuál es el coeficiente de fricción cinético entre el trineo y la nieve? b) En la parte alta de la colina, el joven sube al trineo y se desliza hacia abajo. ¿Cuál es la magnitud de su aceleración al bajar la pendiente?

Resolución :

Parte (a)



D.C.L. (trineo)



$\Sigma Fy = 0$

$N + 25sen35° - mgcos15° = 0 \Rightarrow N = 60cos15° - 25sen35° \ ...\ (1)$

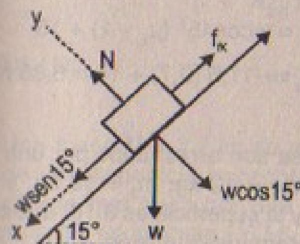
$\Sigma Fx = 0$

$\Rightarrow 25cos35° = \mu_k.N + mg\ sen15°$

$\Rightarrow 25cos35° = \mu_k\ (60cos15° - 25sen35°) + 60sen15°$

∴ $\mu_k = \frac{25\cos35° - 60\ sen\ 15°}{60\cos15° - 25\ sen\ 15°}$

Parte (b)



$\Sigma F_x = m_{sis}.a$

$wsen15° - f_f = m_{sis}.a$

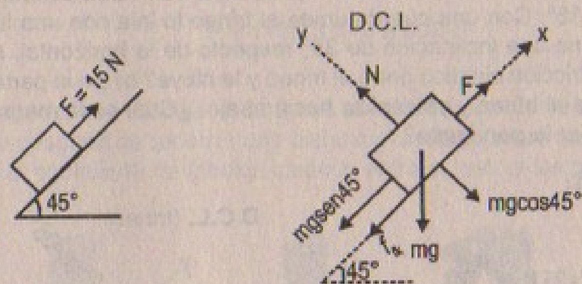
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = wcos15°$

$\Rightarrow wsen15° - \mu_k\ .\ wcos15° = \frac{w}{g}\ .\ a$

∴ $a = gsen15° - \mu_k\ cos15°.g$

54. Un bloque se mueve hacia arriba de una pendiente de 45° con una velocidad constante bajo la acción de una fuerza de 15 N aplicada *paralela* a la pendiente. Si el coeficiente de fricción cinético es 0,30, determine: a) el peso del bloque y b) la fuerza mínima requerida para permitirle moverse *hacia abajo* de la pendiente a velocidad constante.

Resolución :



Parte (a)

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F - mgsen45° - f_{fk} = 0$

$v = cte. \Rightarrow a = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad\quad 15 - mgsen45° - \mu_k \cdot mgcos45° = m.a = 0$

$\Rightarrow \quad N = mgcos45° \quad\quad \therefore \quad 15 = mg(sen45° + \mu_k.cos45°)$

$$\therefore \quad Peso = mg = \frac{15}{sen\,45° + \mu_k \cdot cos\,45°} = \frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{300}{13\sqrt{2}} = 16,4\ N$$

Parte (b)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = wcos45° = 16,4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 11,6N$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F + wsen45° = f_{fk} + 15$

$F_{min} = f_{fk} - wsen45° + 15$

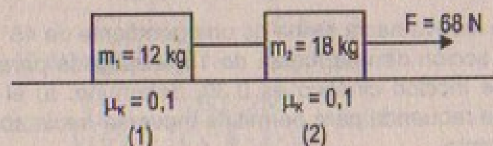
$\Rightarrow \quad F_{min} = \mu_k \cdot wcos45° - wsen45° + 15$

$F_{min} = wcos45°\ (\mu_k - 1) + 15$

$\therefore \quad F_{min} = -11,6\ (0,7) + 15 = 6,88\ N$

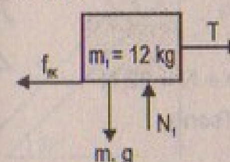
55. Dos bloques conectados por una cuerda sin masa son arrastrados por una fuerza horizontal F (figura P5.38). Suponga F = 68 N; m_1 = 12 kg; m_2 = 18 kg, y que el coeficiente de fricción cinético entre cada bloque y la superficie es 0,10. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. b) Determine la tensión, T y la magnitud de la aceleración del sistema.

Resolución :



Parte (a)

Bloque (1):

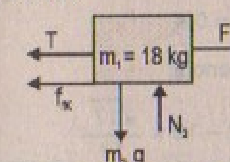


$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = (12)(10) = 120\ N$

$\Sigma F_x = m_1.a$

$\Rightarrow \quad T - \mu_k.N_1 = m_1.a \ ...\ (1)$

Bloque (2):



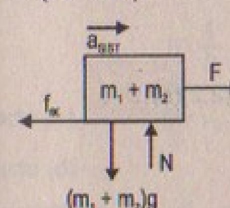
$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = (18)(10) = 180\ N$

$\Sigma F_x = m_2.a$

$F - T - f_k = m_2a$

$\Rightarrow \quad F = m_2a + \mu_k \cdot N_2 + T \ ...\ (2)$

D.C.L. (sistema)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{TOTAL} = (m_1 + m_2)g = 300\ N$

$F - f_t = (m_1 + m_2)(a_{sist})$

$\Rightarrow \quad F = \mu_k \cdot 300 + 30a_{sist} \ ...\ (3)$

Desarrollando:

(1) en (2): $\quad F = m_2 \cdot a + \mu_k \cdot 180 + m_1a + \mu_k .120$

$F = a_{sist}(30) + 300(\mu_k) \Rightarrow 68 = 30.a_{sis} + 30$

Parte (b):

$$\therefore \quad a_{sist} = \frac{68}{30} - 1 = \frac{38}{30} = 1.3\ m/s^2$$

De (1): $\quad \Rightarrow \quad T_{sist} = 12(1,3) + (0,1)(120) = 27,6\ N$

56. Una masa M = 2,2 kg se acelera a lo largo de una superficie horizontal mediante una cuerda que pasa por una polea, como se muestra en la figura P5.56. La tensión en la cuerda es 10,0 N y la polea está 10,0 cm sobre la parte superior del bloque. El coeficiente de la fricción de deslizamiento es 0,40. a) Determine la aceleración del bloque cuando x = 0,40 m. b) Determine el valor de x en el cual la aceleración se vuelve cero.

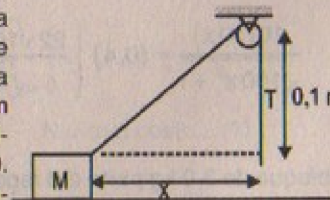


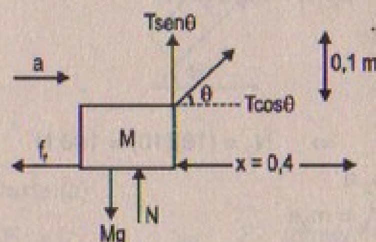
Figura P5.56

Resolución :

Datos: $T = 10\ N$; $\mu_k = 0,4$; $M = 2,2\ kg$

Parte (a)

D.C.L. (M)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\text{sen}\theta + N = 22\ N$

$\therefore\ N = 22\ N - T\text{sen}\theta$

Pero: $T\text{sen}\theta = 0,1$

$T\cos\theta = 0,4$ $\quad \therefore\ \tan\theta = \frac{1}{4}$

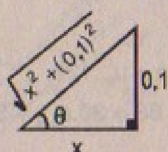
(triángulo: $\sqrt{17}$, 1, 4, θ)

En consecuencia:

$N = 22 - 10 \times \frac{\sqrt{17}}{17}$

$\therefore\ N = 22 - 2,43 = 19,57\ N$

D.C.L. (Polea)



$\Sigma F_x = M.a$

$T\cos\theta - f_r = M.a$

$10 \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} - (0,4)(19,57) = (2,2)(a)$

$\therefore\ a = \frac{9,7 - 7,83}{2,2} = 0,85\ m/s^2$

Parte (b)

Sabemos: (triángulo: $\sqrt{x^2 + (0,1)^2}$, 0,1, x, θ) $\quad \cos\theta = \frac{10x}{\sqrt{100x^2 + 1}}$ $\quad \text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{100x^2 + 1}}$

$\Rightarrow\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{100x^2 + 1}} + N = 22 \quad \therefore\ N = 22 - \frac{10}{\sqrt{100x^2 + 1}}$

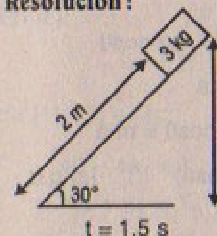
$\Sigma F_x = M.a = M(0) = 0$

$\Rightarrow\ T\cos\theta = f_r$ $\quad$ Resolviendo:

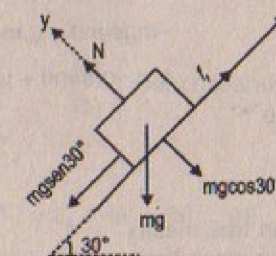
$\Rightarrow\ \frac{10(10x)}{\sqrt{100x^2 + 1}} = (0,4)\left(\frac{22\sqrt{100x^2 + 1} - 10}{\sqrt{100x^2 + 1}}\right) \quad x = ?$

57. Un bloque de 3,0 kg parte del reposo en la parte superior de una pendiente de 30,0° y se desliza 2,0 m hacia abajo en 1,5 s. Encuentre: a) la magnitud de la aceleración del bloque, b) el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano, c) la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, y d) la velocidad del bloque después de que se ha deslizado 2,0 m.

Resolución :



Parte (a)



Cinemática:

$2 = \frac{1}{2} \cdot a(1,5)^2$

$\therefore\ a = \frac{4 \times 100}{225} = 1,8\ m/s^2$

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow\ N = m.g\cos 30° = 3 \times 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\ N$

Parte (b) $\quad \Sigma F_x = m.a$

$mg\text{sen}30° - \mu_k\ mg\cos 30° = ma$

$10 \cdot \frac{1}{2} - \mu_k \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 1,8 \quad \therefore\ \mu_k = \frac{(5 - 1,8)}{5\sqrt{3}} = \frac{3,2}{5\sqrt{3}} = 0,37$

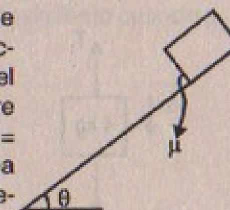
Parte (c) $\quad f_r = \mu_k.N = (0,37)(15\sqrt{3}) = 9,6\ N$

Parte (d)

Cinemática: $\quad v_f^2 = v_o^2 + 2a.d \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = 0 + 2(1,8)(2)$

$\therefore\ v_f = \sqrt{7,2} = 2,68\ m/s$

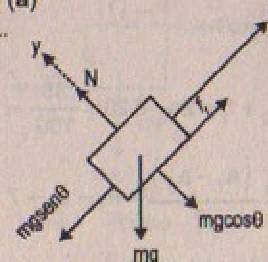
58. Un bloque se desliza sobre una pendiente que tiene una inclinación θ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano es μ. a) Si el bloque acelera hacia abajo por la pendiente, muestre que la magnitud de su aceleración está dada por a = g(sen θ–μcosθ). b) Si el bloque se mueve hacia arriba de la pendiente, muestre que la magnitud de su aceleración es a = –g(senθ + μcosθ).



Resolución :

Parte (a)

D.C.L.



$\Sigma F_y = 0$

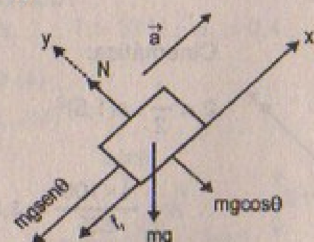
$\Rightarrow\ N = m.g\cos\theta$ ... (1)

$\Sigma F_y = ma$

$mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta = m.a$

$\therefore\ a = g(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)$ $\quad$ l.q.q.d.

Parte (b)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$

$-mg\,\text{sen}\theta - f_1 = m.a$

$-mg\,\text{sen}\theta - \mu.mg\cos\theta = m.a$

$\therefore \quad a = -g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)$ l.q.q.d.

59. En la figura P5.59 se muestran tres masas conectadas sobre una mesa. La mesa tiene un coeficiente de fricción de deslizamiento de 0,35. Las tres masas son de 4,0 kg; 1,0 kg y 2,0 kg, respectivamente, y las poleas son sin fricción. a) Determine la aceleración de cada bloque y sus direcciones. b) Determine las tensiones en las dos cuerdas.

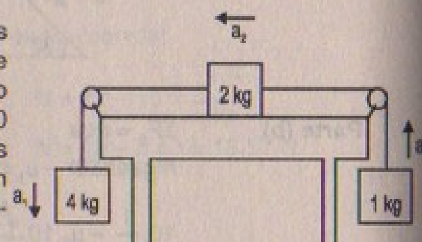


Figura P5.59

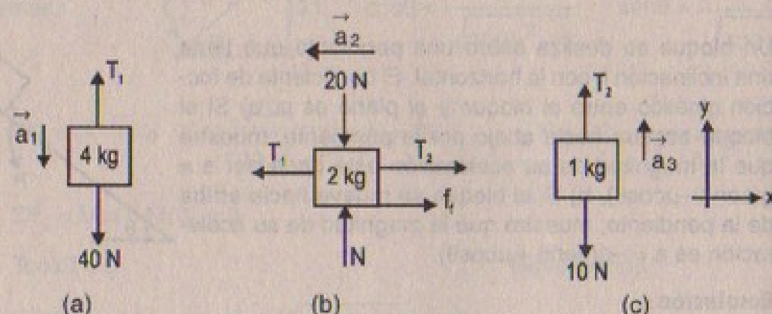
Resolución :

Datos: $\mu = 0{,}35$

$T_1 = ?\,;\ T_2 = ?$

$a_1 = ?\,;\ a_2 = ?\,;\ a_3 = ?$

Parte (a)



En (a): $\Sigma F_y = 4a_1 \Rightarrow 40 - T_1 = 4a_1$ ... (1)

En (b): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 20 = N$

$\Sigma F_x = 2.a_2 \Rightarrow T_1 - T_2 = 2a_2 + f_1 = 2a_2 + 20 \cdot \dfrac{35}{100} = 2a_2 + 7$

Pero: $\vec{a}_2 = \dfrac{\vec{a}_1 - \vec{a}_3}{2} \Rightarrow T_1 - T_2 = 2\dfrac{(a_1 - a_3)}{2} = a_1 - a_3 + 7$ ...(2)

En (c): $\Sigma F_y = a_3$

$\Rightarrow T_2 - 10 = a_3 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 10 + a_3$ ... (3)

de (1); (2) y (3):

$40 - 4a_1 = T_1$ (a)

$10 + a_3 = T_2$ (b) } Desarrollando el sistema de ecuaciones

$7 + a_1 - a_3 = T_1 - T_2$ (c)

(b) − (a) $\Rightarrow T_2 - T_1 = a_3 + 4a_1 - 30$ ... (d)

y sumando (c) con (d):

(+) $T_2 - T_1 = a_3 + 4a_1 - 30$

$T_1 - T_2 = 7 + a_1 - a_3$

$0 = 5a_1 - 23 \Rightarrow a_1 = 23/5 = 4{,}6\ \text{m/s}^2 \wedge T_1 = 21{,}6\ \text{N}$

(a) − (b) = (c)

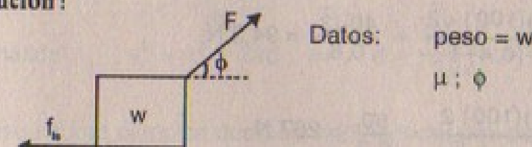
$\Rightarrow 21{,}6 - 10 - a_3 = 7 + 2a_2$

60. Una caja de peso w es empujada por una fuerza F sobre un piso horizontal. Si el coeficiente de fricción estático es μ_e, y F está dirigida a un ángulo ϕ debajo de la horizontal, a) muestre que el valor mínimo de F que moverá la caja es:

$$F = \frac{\mu_e\, w \sec\phi}{1 - \mu_e \tan\phi}$$

b) Encuentre el valor mínimo de F que puede producir movimiento cuando $\mu_e = 0{,}40$, w = 100 N y $\phi = 0°, 15°, 30°, 45°$ y $60°$.

Resolución :



Datos: peso = w

$\mu\,;\ \phi$

(a) D.C.L.

Fsenφ
Fcosφ
fₑ
N
w

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F\text{sen}\phi + N = w$

$\therefore \quad N = w - F\text{sen}\phi$ ... (1)

$\Sigma F_x = 0$

$F\cos\phi - \mu_e.(w - F\text{sen}\phi) = 0$

$\Rightarrow F\cos\phi - \mu_e.w + \mu_e \cdot F\text{sen}\phi = 0$

$F(\cos\phi + \mu_e\,\text{sen}\phi) = \mu_e.w$

$$\therefore \quad F = \frac{\mu_e \cdot w}{\cos\phi + \mu_e \operatorname{sen}\phi} = \frac{\dfrac{\mu_e \cdot w}{\cos\phi}}{1+\mu_e \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}} = \frac{\mu_e \cdot \sec\phi . w}{1 \pm \mu_e \tan\phi}$$

l.q.q.d

Si $\vec{a}$ (+)

Si $\overleftarrow{a}$ (–)

Parte (b)

Sabemos que se moverá a la izquierda con:

$$F_{min} = \frac{\mu_e . \sec\phi . w}{1 - \mu_e . \tan\phi}$$

con: $\mu_e = 0{,}4$; $w = 100$ N . $\phi = 0°$; 15°; 30°; 45°; 60°

$\phi = 0°$ $\quad F_{min} = \dfrac{(0{,}4)(100)(1)}{1-(0{,}4)(0)} = 40$ N

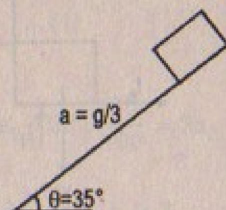
$\phi = 15°$ $\quad F_{min} = (0{,}4)(100)\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\right] = 10{,}4$ N

$\phi = 30°$ $\quad F_{min} = \dfrac{(0{,}4)(100)}{1-(0{,}4)\left(\sqrt{3}\right)} \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\, 3 = \dfrac{80}{0{,}6} = 133$ N

$\phi = 45°$ $\quad F_{min} = \dfrac{(0{,}4)(100)\sqrt{2}}{1-(0{,}4)\,1} = \dfrac{40\sqrt{2}}{0{,}6} = 94{,}3$ N

$\phi = 60°$ $\quad F_{min} = \dfrac{(0{,}4)(100)\,2}{1-(0{,}4)\left(\sqrt{3}\right)} = \dfrac{80}{0{,}3} = 267$ N

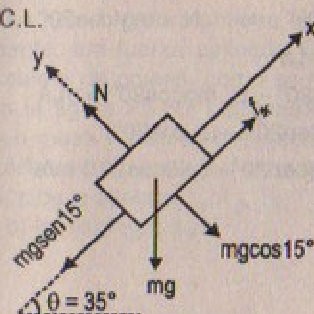
61. Un bloque se sitúa sobre un plano inclinado a 35° respecto de la horizontal. Si el bloque se desliza hacia abajo del plano con una aceleración de magnitud g/3, determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano.



Resolución:

$\mu_k = ?$; $\quad a = g/3$

D.C.L.



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N = mgm\cos 35°$

$\Sigma F_x = ma$

$\Rightarrow \quad mg\operatorname{sen}35° - \mu_k . N = m.a$

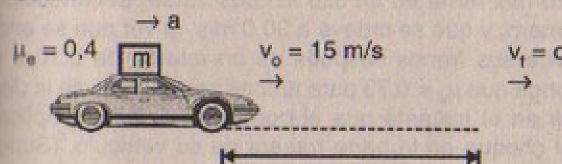
$\Rightarrow \quad mg\operatorname{sen}35° - \mu_k\, mg\cos 35° = \dfrac{g}{3}.m$

$\therefore \quad \mu_k = \dfrac{3\operatorname{sen}35° - 1}{3\cos 35°}$

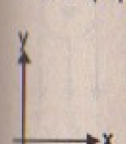
62. Un camión que se mueve horizontalmente a 15 m/s transporta una caja. Si el coeficiente de fricción estático entre la caja y el camión es 0,40, determine la distancia mínima de frenado del camión de manera que la caja no se deslice.

Resolución:

Sea:



D.C.L (m)



mg, fs, m, a, N

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m.g$

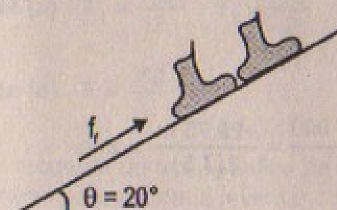
$\Sigma F_x = m.a \quad \Rightarrow \quad \mu_e.m.g = n.a$

$\therefore \quad a = \mu_e.g = (0{,}4)(10) = 4$ m/s²

Cinemática: $\quad v_f^2 = v_i^2 - 2ad \quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{15\times 15}{2\times 4} = \dfrac{225}{8} = 28{,}125$ m

63. Una esquiadora olímpica que baja a 25 m/s por una pendiente a 20° encuentra una región de nieve húmeda de coeficiente de fricción $\mu_k = 0{,}55$. ¿Cuánto desciende antes de detenerse?

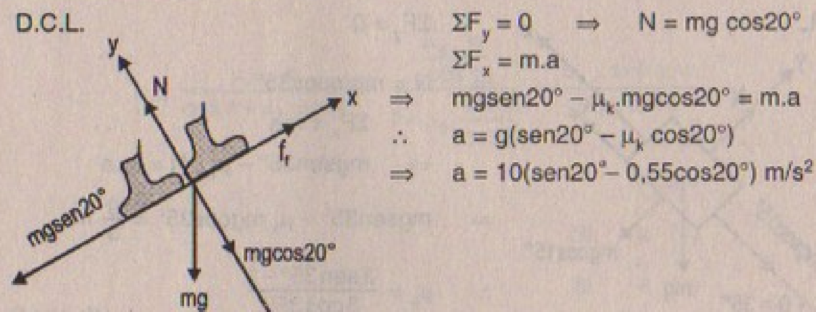
Resolución:



$v_o = 25$ m/s

Dato: $\mu_k = 0{,}55$

D.C.L.



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos 20°$

$\Sigma F_x = m.a$

$\Rightarrow \quad mg\,sen20° - \mu_k.mg\cos 20° = m.a$

$\therefore \quad a = g(sen20° - \mu_k \cos 20°)$

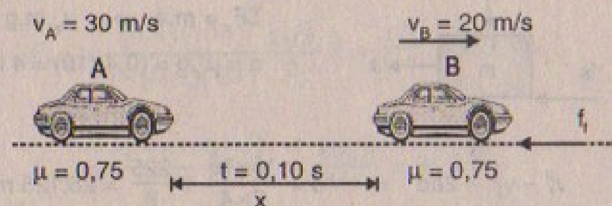
$\Rightarrow \quad a = 10(sen20° - 0{,}55\cos 20°)\ m/s^2$

Cinemática: $v_f^2 = v_i^2 - 2ad \quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{v_i^2}{2a} = \dfrac{625}{2(a)}$

PROBLEMAS ADICIONALES

64. Un carro que se mueve a 20 m/s frena en un alto sin deslizarse. El conductor del auto que está detrás del primero, y que se mueve a 30,0 m/s, al ver que se encienden las luces de freno, aplica sus frenos después de un retardo de 0,10 s y se detiene sin deslizarse. Suponga que $\mu_e = 0{,}75$ para ambos carros. Calcule la distancia mínima entre los carros en el instante que el conductor delantero aplica los frenos si se quiere evitar el choque en la parte trasera de su vehículo. (Suponga aceleraciones constantes.)

Resolución :



$-f_r = m.a \quad \Rightarrow \quad -\mu\, mg = m.a \quad \therefore \quad |\vec{a}| = (0{,}75)(10) = 7{,}5\ m/s^2$

Cinemática:

$v_{f_A} = 30 - (7{,}5)(0{,}1) = 30 - 0{,}75 = 29{,}25\ m/s$

$v_{f_B} = 0 \qquad x_B = \dfrac{Vf^2}{2a} = \dfrac{400}{2\,(7{,}5)} = 26{,}7\ m$

$x_A = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \dfrac{(29{,}25)^2 - 900}{-2(7{,}5)} = \dfrac{-29{,}75\ m}{2(7{,}5)} = 2\ m$

$\therefore \quad x_B - x_A = 26{,}7 - 2 = 24{,}7\ m$

65. Una masa M se mantiene fija mediante una fuerza aplicada F y un sistema de poleas, como se ilustra en la figura P5.65. Las poleas tienen masa y fricción despreciables. Encuentre a) la tensión en cada sección de la cuerda, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5, y b) la magnitud de F.

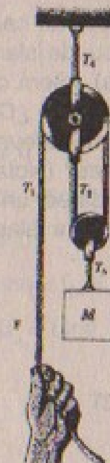
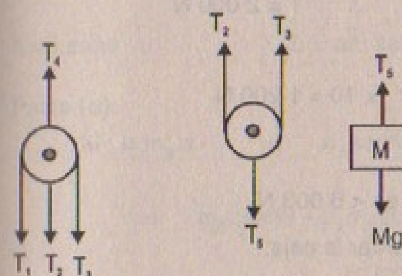


Figura P5.65

Resolución :

De la figura:



$T_5 = Mg$

$T_2 = T_3$

$\Rightarrow \quad 2T_3 = T_5 = Mg$

$\therefore \quad T_3 = \dfrac{Mg}{2} = T_2$

$T_1 = T_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \dfrac{Mg}{2}$

$T_1 + T_2 + T_3 = T_4 \quad \Rightarrow \quad T_4 = Mg + \dfrac{Mg}{2} = \dfrac{3Mg}{2}$

Pero: $\quad T_1 = F \quad \therefore \quad F = \dfrac{Mg}{2}$

Luego:

Parte (a) $\; T_1 = \dfrac{Mg}{2}\;;\; T_2 = \dfrac{Mg}{2}\;;\; T_3 = \dfrac{Mg}{2}\;;\; T_4 = \dfrac{3Mg}{2}\;;\; T_5 = Mg$

Parte (b) $\; F = \dfrac{Mg}{2}$

66. Alex recuerda de sus estudios de física en la preparatoria que las poleas pueden utilizarse para ayudar a levantar objetos pesados. La figura P5.66 muestra el sistema de poleas sin fricción que diseñó para levantar una caja fuerte hasta la oficina

de un segundo piso. La caja fuerte pesa 400 lb y Alex puede jalar con una fuerza de 240 lb. a) ¿Será capaz de levantar la caja fuerte? b) ¿Cuál es el peso máximo que puede levantar con su sistema de poleas? (Nota: La polea grande está unida por un tirante a la cuerda que Alex está jalando.)

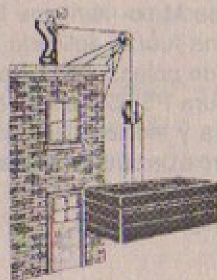
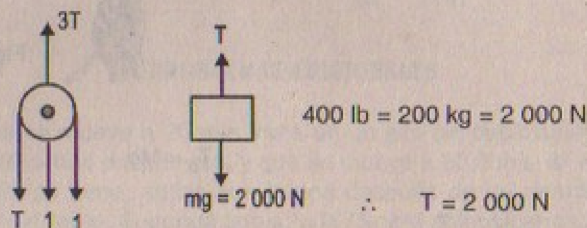


Figura P5.65

Resolución :

D.C.L.



400 lb = 200 kg = 2 000 N

$\therefore$ T = 2 000 N

Dato: $F = m.g = w = 240 \text{ lb} \times \dfrac{0,5 \text{ k}}{1 \text{ lb}} \times 10 = 1\,200 \text{ N}$

Pero $F = 3T \Rightarrow 3(2\,000) = 6\,000 \text{ N}$

a) El máximo peso que puede levantar es < 6 000 N

$\therefore$ Si se puede levantar la caja.

67. Como parte de una investigación de laboratorio, un estudiante desea medir los coeficientes de fricción entre un bloque de metal y un tablero de madera. El tablero tiene una longitud L y el bloque está situado en un extremo de él. Este extremo del tablero se levanta y el bloque empieza a deslizarse cuando se encuentra a una distancia h sobre el extremo inferior del tablero, como se muestra en la figura P5.67. En este ángulo, el bloque se desliza hacia abajo la longitud del tablero en el tiempo t. Determine:
a) el coeficiente de fricción estático entre el bloque y el tablero, b) la aceleración del bloque, c) el ángulo más pequeño que ocasiona que el bloque se mueva, y d) el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el tablero.

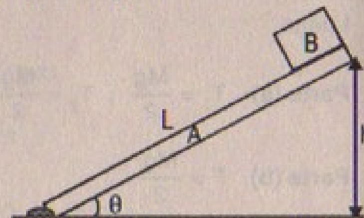


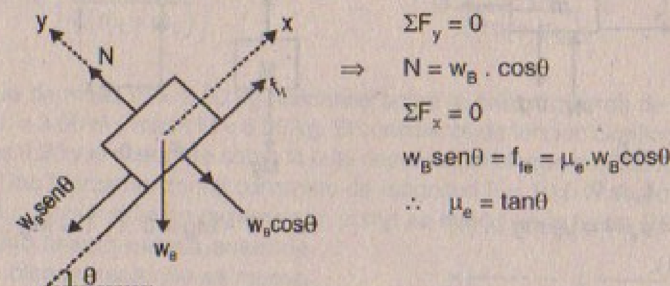
Figura P5.67

Resolución :

Dato t = L (en llegar a la parte inferior el bloque)

Parte (a)

D.C.L.



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow N = w_B \cdot \cos\theta$

$\Sigma F_x = 0$

$w_B \text{sen}\theta = f_{le} = \mu_e . w_B \cos\theta$

$\therefore \mu_e = \tan\theta$

Parte (b)

Cinemática: $L = \dfrac{1}{2}(a)L^2$ $\therefore a = \dfrac{2}{L} \text{ m/s}^2$

Parte (c)

$h = L\text{sen}\theta$ $\therefore \theta = \text{arc sen}\left(\dfrac{h}{L}\right)$

Parte (d)

$\Sigma F_x = m_B.a \Rightarrow w_B\text{sen}\theta - f_f = m_B.a$

$\Rightarrow m_B g\text{sen}\theta - \mu_k m_B g\cos\theta = m_B.a \Rightarrow g\text{sen}\theta - \mu_k g\cos\theta = \dfrac{2}{L}$

$\Rightarrow g\left(\dfrac{h}{L}\right) - \mu_k \cdot g\left(\dfrac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}\right) = \dfrac{2}{L} \Rightarrow gh - \mu_k \cdot g\sqrt{L^2 - h^2} = 2$

$\therefore \mu_k = \dfrac{gh - 2}{g\sqrt{L^2 - h^2}}$

68. Hace aproximadamente 200 años, Charles Coulomb inventó el tribómetro, un dispositivo para investigar la fricción estática. El instrumento se representa de manera esquemática en la figura P5.68. Para determinar el coeficiente de fricción estático, la masa colgante M aumenta o disminuye según sea necesario hasta que m esté a punto de deslizarse. Demuestre que $\mu_e = M/m$.

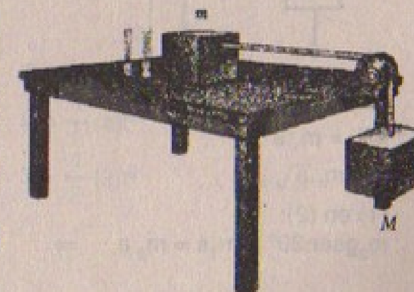


FIGURA P5.68

Resolución :

D.C.L. (m)

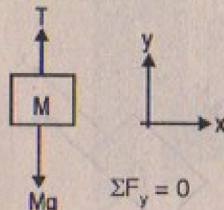


$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad T - f_{te} = 0$

$\therefore \quad T = \mu_e.N = \mu_e.mg$ ... (1)

D.C.L. (M)



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad T - Mg = 0 \therefore \; T = Mg$ ... (2)

(2) en (1):

$\mu_e.mg = T = Mg \qquad \therefore \quad \mu_e = \dfrac{M}{m}$ l.q.q.d.

69. Un bloque de aluminio de 2,00 kg y un bloque de cobre de 6,00 kg se conectan mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. Se deja que se muevan sobre un bloque-cuña fijo de acero (de ángulo θ = 30,0°), como se muestra enla figura P5.69. Determine a) la aceleración de los dos bloques, y b) la tensión en la cuerda.

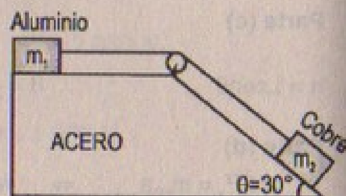


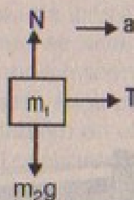
Figura P5.69

Resolución :

Datos: $\quad m_1 = 2$ kg ; $\quad m_2 = 6$ kg

Parte (a)

D.C.L. (m_1)



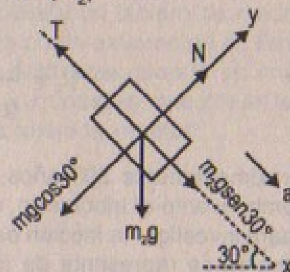
$\Sigma F_x = m_1.a$

$T = m_1.a$ ... (1)

(1) en (2):

$m_2gsen30° - m_1a = m_2.a \quad \Rightarrow$

D.C.L. (m_2)



$\Sigma Fx = m_2.a$

$m_2gsen30° - T = m_2.a$ ... (2)

$m_2gsen30° = (m_2 + m_1)a$

$\therefore \quad a = \dfrac{m_2 g}{2\,(m_1 + m_2)}$ m/s²

Parte (b)

De (1)

$$T = m_1\left[\frac{m_2\, g}{2(m_1 + m_2)}\right] \qquad \therefore \quad T = \frac{m_1 m_2\, g}{2(m_1 + m_2)}\ N$$

70. Un bloque de masa m = 2,00 kg descansa sobre la orilla izquierda de un bloque de longitud L = 3,00 m y masa M = 8,00 kg. El coeficiente de fricción cinético entre los dos bloque es 0,30 y la superficie sobre la cual descansa el bloque de 8,00 kg no presenta fricción. Una fuerza horizontal constante de magnitud F = 10,0 N se aplica al bloque de 2,00 kg, poniéndolo en movimiento, como se indica en la figura P5.70a.

a) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que este bloque haga que se mueva a la derecha el bloque de 8,00 kg, como se ilustra en la figura P5.70b? (Nota: Ambos bloques se ponen en movimiento cuando se aplica F.) b) ¿Qué distancia se mueve el bloque de 8,00 kg en el proceso?

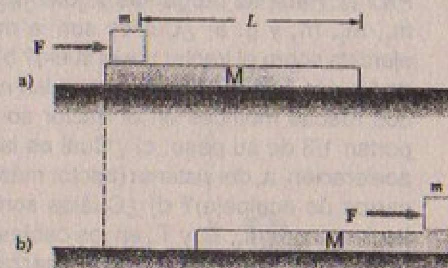


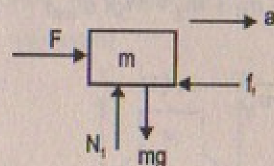
Figura P5.70

Resolución :

Datos: $\quad m = 2$ kg ; $\quad M = 8$ kg ;
$\quad L = 3$ m ; $\quad \mu_k = 0,3$;
$\quad F = 10$ N

Parte (a)

D.C.L. (m)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = mg = 20$ N

$\Sigma F_x = ma$

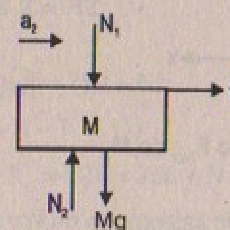
$F - f_1 = ma$

$F - \mu_k mg = ma$

$10 - \dfrac{3}{10}(20) = 2a$

$\therefore \quad a = 2$ m/s²

D.C.L. (M)



Cinemática:

$L = \dfrac{1}{2}(a)t^2$

$\Rightarrow \quad 3 = \dfrac{1}{2}(2)t^2 \qquad \therefore \; t = \sqrt{3} = 1,73$ s

Parte (b)

$$x = v_{ox}.t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

Pero: $\mu_k . N_1 = Ma_2$

$(0,3)(20) = 8.a_2 \quad \therefore \quad a_2 = 0,75 \text{ m/s}^2$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(0,75)(3) = 1,125 \text{ m}$$

71. Tres carros de equipaje cuyas masas son m_1, m_2 y m_3 son remolcados por un tractor de masa M a lo largo de la faja de estacionamiento de un aeropuerto. Las ruedas del tractor ejercen una fuerza de fricción total F sobre el suelo, como se muestra (figura P5.71). Para las preguntas siguientes, exprese sus respuestas en función de F, M, m_1, m_2, m_3 y g. a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza horizontal ejercida sobre el tractor por el suelo? b) ¿Cuál es el valor más pequeño del coeficiente de fricción estático que evita que las ruedas patinen? Suponga que cada una de las dos ruedas motrices en el tractor soportan 1/3 de su peso. c) ¿Cuál es la aceleración, a, del sistema (tractor más carros de equipaje)? d) ¿Cuáles son las tensiones T_1, T_2 y T_3 en los cables de conexión? y e) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el carro de masa m_2?

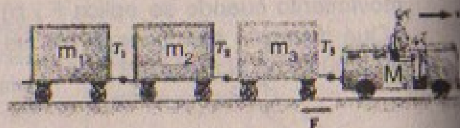
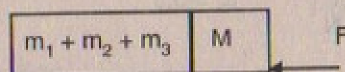
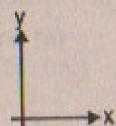


Figura P5.71

Resolución :

D.C.L.
SISTEMA:





$$\Sigma\vec{F} = \Sigma.\vec{a} \qquad -\vec{F} = (M + m_1 + m_2 + m_3)(\vec{a}_{sist})$$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{M+m_1+m_2+m_3} \quad ...(1)$$

Luego F_{hor} de M

F [M] → F_H

$$\Rightarrow \quad F_H = F + M(a) = F + M\left(\frac{F}{M+m_1+m_2+m_3}\right)$$

$$\therefore \quad F_H = F\left(\frac{2M+m_1+m_2+m_3}{M+m_1+m_2+m_3}\right) \text{N}$$

Parte (b)

$$F = \mu_e.N \quad \Rightarrow \quad F = \mu_e.(M + m_1 + m_2 + m_3).g$$

$$\therefore \quad \mu_e = \frac{F}{g(M+m_1+m_2+m_3)}$$

Parte (c) $\qquad |a| = \dfrac{F}{M+m_1+m_2+m_3} \text{ m/s}^2$

Parte (d)

$$T_1 = m_1.a \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{F.m_1}{M+m_1+m_2+m_3}$$

$$T_2 - T_1 = m_2.a \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{m_2.F}{M+m_1+m_2+m_3} + \frac{Fm_1}{M+m_1+m_2+m_3} = \frac{F(m_1+m_2)}{M+m_1+m_2+m_3} \text{ N}$$

$$T_3 - T_2 = m_3.a \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{F(m_1+m_2)}{M+m_1+m_2+m_3} + m_3\left(\frac{F}{M+m_1+m_2+m_3}\right) = \frac{F(m_1+m_2+m_3)}{M+m_1+m_2+m_3}$$

72. En la figura P5,72, el hombre y la plataforma pesan en conjunto 750 N. Determine qué tan fuerte debe jalar el hombre para mantenerse por sí mismo separado del suelo. (¿O acaso es imposible?) Si es así, explique por qué.



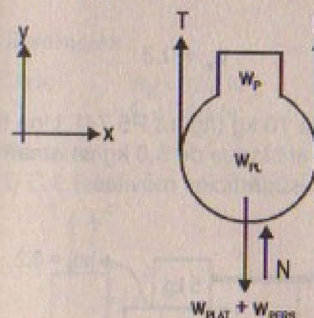
Figura P5.72

Resolución :

Dato: $w_{plat} - w_{per} = 750$ N

Para que el hombre se mantenga separado del suelo tendrá que estar encima de la plataforma, en consecuencia:

D.C.L. (sistema)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T - F = 750 + N$

$\therefore \quad F = 750 + N - T \quad ... (1)$

Pero como $F = T \quad \Rightarrow \quad 2F = 750 + N$ ...(2)

Asimismo: w_{sist} y N no son fuerzas de acción y reacción entonces:

F = 750 N, lo cual sería toda una contradicción, ya que la $\Sigma Mo = o$

Luego: es imposible.

73. Un bloque de 2,0 kg se sitúa sobre la parte superior de un bloque de 5,0 kg, como muestra la figura P5.73. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque de 5,0 kg y la superficie es 0,20. Una fuerza horizontal F se aplica al bloque de 5,0 kg.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. ¿Qué fuerza acelera al bloque de 2,0 kg? b) Calcule la magnitud de la fuerza necesaria para jalar ambos bloques hacia la derecha con una aceleración de 3,0 m/s². c) Encuentre el coeficiente mínimo de fricción estático entre los bloques tal que el de 2,0 kg no se deslice bajo una aceleración de 3,0 m/s².

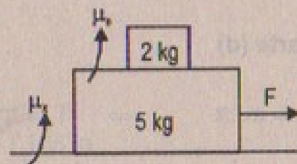
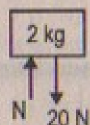


Figura P5.73

Resolución :

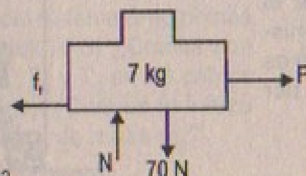
Datos: $\mu_k = 0{,}20$; $\mu_e = ?$

Parte (a)



20 N, f_k, F, N, 50 N

D.C.L (ambos)



Parte (b)

Dato: a = 3 m/s²

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 70\ N$

$\Sigma F_x = 7.a \quad \Rightarrow \quad F - \mu_k.N = 7a \quad \Rightarrow \quad F = (0{,}2)\,(70) + 7\,(3)$

$\therefore \quad F = 35\ N$

Parte (c)

$\Sigma F_x = 2a$

$f_{te} = 2a$

$\mu_e.N = 2(3)$

$\Rightarrow \quad \mu_e.20 = 6 \qquad \therefore \quad \mu_e = 0{,}3$

74. Un bloque de 5,0 kg se coloca sobre un bloque de 10 kg (figura P5.74). Una fuerza horizontal de 45 N se aplica al bloque de 10 kg, y el bloque de 5,0 kg se amarra a la pared. El coeficiente de fricción cinético entre las superficies móviles es 0,20. a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para cada bloque e identifique las fuerzas de acción-reacción entre los bloques. b) Determine la tensión en la cuerda y la magnitud de la aceleración del bloque de 10 kg.

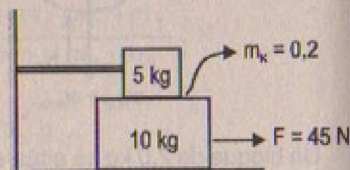
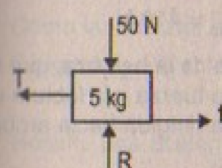
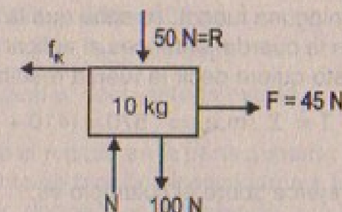


Figura P5.74

Resolución :

D.C.L.





Parte (a)

$\Sigma F_y = 0$

$N_1 = R = 50$

Parte (b)

del bloque (5 kg)

$\Sigma F_x = 0$

$f_{fk} - T = 0 \quad \dots (\ )$

Luego:

$(0{,}2)(50) - T = 0$

$\therefore \quad T = 10\ N$

del bloque (10 kg)

$\Sigma F_x = 10a$

$45 - f_{1x} = 10a$

$\Rightarrow \quad 45 - (0{,}2)(50) = 10a$

$\therefore \quad a = 3{,}5\ m/s^2$

75. Brian, un ingenioso niño, desea alcanzar una manzana en un árbol sin trepar por él. Sentado en un columpio conectado a una cuerda que pasa por una polea sin fricción (figura P5.75), jala el extremo suelto de la cuerda con una fuerza tal que la balanza de resorte lee 250 N. Su verdadero peso es 320 N y el columpio pesa 160 N. a) Dibuje diagramas de cuerpo libre para Brian y el columpio considerados como sistemas separados, y otro diagrama para Brian y el columpio considerados como un sistema. b) Muestre que la aceleración del sistema es hacia arriba y encuentre su magnitud. c) Determine la fuerza que Brian ejerce sobre el columpio.

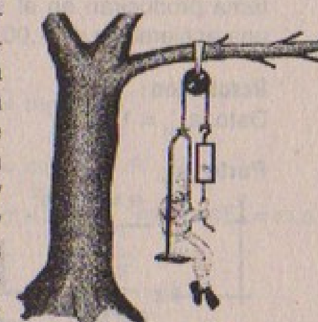


Figura P5.75

Resolución :

Dato: $w_B = 320\ N$; $w_{columpio} = 160\ N$

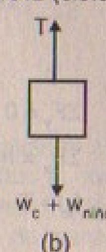
F = 250 N

Parte (a)

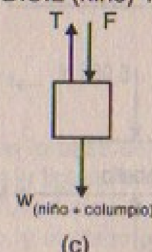
D.C.L (ala) D.C.L (sistema) D.C.L (niño) + (columpio)



(a)



(b)



(c)

en (a): $F + w_B = T \Rightarrow 250 + 320 = T \quad \therefore \quad T = 570\ N$

en (b): $T = w_{niño} + w_c \Rightarrow 570\ N = w_{niño} + 160\ N \therefore \quad w_{niño} = 410\ N$

Cuando no se aplica ninguna fuerza, se sabe que la lectura de la balanza, que es el peso, es la tensión en la cuerda; entonces al aplicar alguna fuerza y la lectura de la balanza disminuye esto quiere decir la fuerza resultante va dirigida hacia arriba.

$$\therefore \quad T = \Sigma . m.a \Rightarrow 570 = (410 + 160)(a)$$

Parte (c)

La fuerza que Bryan ejerce sobre el columpio es:

La reacción, que es el peso del niño = 410 N

76. En la figura P5.76 un caballo de 500 kg jala un trineo de 100 kg de masa. El sistema (caballo más trineo) tiene una aceleración hacia adelante de 1,00 m/s² cuando la fuerza friccionante sobre el trineo es 500 N. Determine: a) la tensión en la cuerda de conexión, y b) la magnitud y dirección de la fuerza de fricción ejercida sobre el caballo. c) Verifique que las fuerzas totales de fricción que la Tierra ejerce sobre el sistema producirán en el sistema total una aceleración de 1,00 m/s².

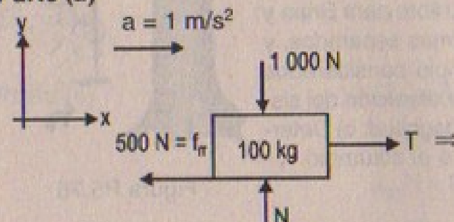


Figura P5.76

Resolución:

Dato: $a_{sist} = 1\ m/s^2$

Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 1\,000\ N$

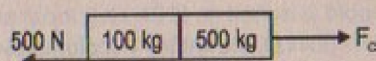
$T - f_t = 100.a \ ... (1)$

$\Rightarrow \quad T - 500 = 100(1)$

$\therefore \quad T = 600\ N$

Por dato

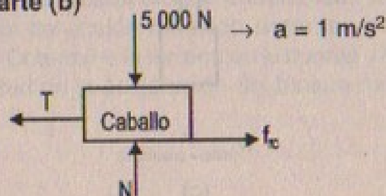
(caballo + trineo) $a = 1\ m/s^2$



$F - 500 = 600.(1)$

$\therefore \quad F_{fc} = 1\,100\ N \ ... (2)$

Parte (b)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow N = 5000\ N$

$\Sigma F_x = m_c.a$

$f_{fc} - T = 500(1)$

$\Rightarrow \quad f_{fc} = 500 + 600 \qquad \therefore \quad f_{fc} = 1\,100\ N$

Como las fuerzas de fricción totales:

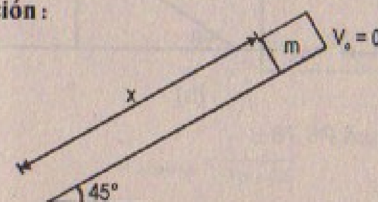
Es igual: $f_{fc} - f_{ft} = 1100 - 500 \Rightarrow 600 = 600.a$

$\therefore \quad a_{sist} = 1\ m/s^2$

Resulta una aceleración igual al dado anteriormente.

77. Un bloque se suelta desde el reposo en la parte superior de un plano inclinado a un ángulo de 45°. El coeficiente de fricción cinético varía a lo largo del plano de acuerdo con la relación $\mu_e = \sigma x$, donde x es la distancia a lo largo del plano medida en metros desde la parte superior y donde $\sigma = 0{,}50\ m^{-1}$. Determine: a) qué distancia desliza el bloque antes de detenerse, y b) la velocidad máxima que alcanza.

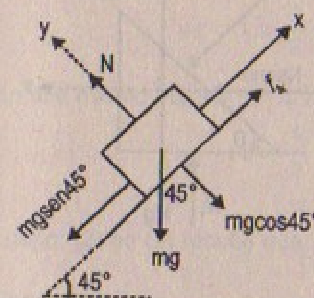
Resolución:



Datos: $\mu_k = \sigma . x$

$\sigma = \frac{1}{2} m^{-1}$

Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos 45°$

$\therefore \quad N = mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ N$

$\Sigma F_x = m.a \Rightarrow mg\text{sen}45° - \mu_k . mg\cos 45° = m.a$

$\Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}.5\frac{\sqrt{2}}{2} = a$

$\therefore \quad a = \frac{5\sqrt{2}}{2}(2 - x)\ m/s^2$

Parte (b)

Cinemática: $v_f^2 = v_o^2 + 2a.d$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = 2x\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}(2-x)\right)$$

$$\therefore \quad V_f = \sqrt{5\sqrt{2}x\,(2-x)}\ \ m/s$$

78. Un pequeño bloque de masa m está inicialmente en la base de una pendiente de masa M, ángulo θ y longitud A, como se muestra en la figura P5.78a. Suponga que todas las superficies son sin fricción y que se aplica una fuerza horizontal constante de magnitud F al bloque de manera que queda fijo, y el plano inclinado, en movi-

miento. a) Muestre que la masa m alcanzará la parte superior de la pendiente (figura P5.78b) en el tiempo.

$$t = \sqrt{\frac{2L\left[1+(m/M)\,\text{sen}^2\theta\right]}{(F/m)\cos\theta - g\,(1+m/M)\,\text{sen}\,\theta}}$$

(Sugerencia: El bloque debe estar siempre sobre la pendiente.) b) ¿Qué distancia recorre el plano inclinado en el proceso? c) ¿La expresión en el inciso a) se reduce al resultado esperado cuando M >> m? Explique.

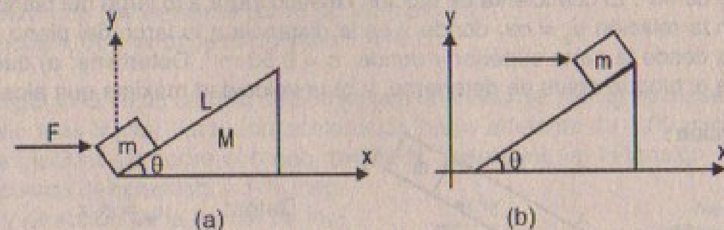
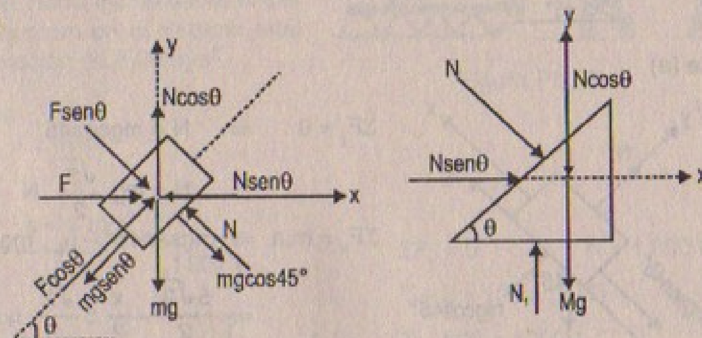


Figura P5.78

Resolución :

Parte (a)



En (a):

(1) $F - N\text{sen}\theta = m\,\vec{a}_{1x}$

(2) $N\cos\theta - mg = m\,\vec{a}_{1y}$

También:

(3) $N = F\text{sen}\theta + mg\cos\theta$

(4) $F\cos\theta - mg\text{sen}\theta = m.a_1 \Rightarrow |\vec{a}_1| = \frac{F\cos\theta}{m} - g\text{sen}\theta$

(3) en (2) $\Rightarrow$ $(F\text{sen}\theta + mg\cos\theta)\cos\theta - mg = m.\,\vec{a}_{1y}$

Luego: (3) en (1)

$F - (F\text{sen}\theta + mg\cos\theta)\text{sen}\theta = m\,\vec{a}_{1x}$

$\therefore\ \vec{a}_{1x} = \frac{F\cos^2\theta - mg\text{sen}\theta\,.\cos\theta}{m}$

$$\therefore\ \vec{a}_{1y} = \frac{F\,\text{sen}\theta.\cos\theta - mg\,\text{sen}^2\theta}{m}$$

En consecuencia: $\vec{a}_1 = (\vec{a}_{1x}\,;\,\vec{a}_{1y}) \Rightarrow |\vec{a}_1| = \frac{F\cos\theta}{m} - g\text{sen}\theta$

En (b)

$$N\text{sen}\theta = M.\,\vec{a}_{2x} \Rightarrow \vec{a}_{2x} = \frac{(F\text{sen}\theta + mg\cos\theta)\,\text{sen}\theta}{M}$$

$$\therefore\ \vec{a}_{2x} = \frac{F\,\text{sen}^2\theta + mg\,\text{sen}\theta.\cos\theta}{M}$$

$$\therefore\ \vec{a}_{2x} = \left(\frac{F\,\text{sen}^2\theta + mg\,\text{sen}\theta.\cos\theta}{M},\,0\right)$$

Luego: $\vec{a}_{\text{sistema}} = \frac{F}{m+M}$

En un tiempo «t» el sistema se trasladó «x» metros:

$$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\,a_{sist}\,.\,t^2 \qquad \text{... (1)}$$

En ese mismo tiempo «t» la masa «m» recorrió:

$$L = \frac{1}{2}\,a_1\,t^2 \qquad \text{... (2)}$$

Luego: (2) en (1) resulta que: $t = \sqrt{\frac{2La_{sist.}}{a_1}}$

Reemplazando:

$$t = \sqrt{\frac{2L\,(F/m+M)}{\frac{F\cos\theta}{m} - g\,\text{sen}\theta}} = \sqrt{\frac{2L\left[1+(m/M)\text{sen}^2\theta\right]}{\left(\frac{F}{m}\right)\cos\theta - g\left(1+\frac{m}{M}\right)\text{sen}\theta}} \qquad \text{l.q.q.d}$$

Parte (b)

Cinemática: $x = \frac{1}{2}\,a_2 t^2$

$$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{F\,\text{sen}^2\theta + mg\,\text{sen}\theta\,.\cos\theta}{M}\right)\left(\frac{2L\left[1+(m/M)\,\text{sen}^2\theta\right]}{(F/m)\cos\theta - g\left(1+\frac{m}{M}\right)\text{sen}\theta}\right)$$

Parte (c)

Si: $M \gg m \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2Lm}{F\cos\theta - mg\,\text{sen}\,\theta}}$

Es el tiempo que demora en llegar a la parte superior «m», si es que el plano inclinado permaneciera fijo.

79. En la figura P5.69 se muestra un alambre ABC que sostiene un cuerpo de peso w. El alambre pasa sobre una polea fija enB y se une firmemente a una pared vertical en A. La línea AB forma un ángulo ϕ con la vertical, y la polea en B ejerce sobre el alambre una fuerza de magnitud F inclinada un ángulo θ con la horizontal. a) Muestre que si el sistema está en equilibrio, $\theta = \phi/2$. b) Muestre que $F = 2w\,\text{sen}(\phi/2)$. c) Dibuje una gráfica de F cuando ϕ aumenta de 0° a 180°.

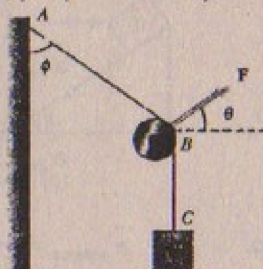


Figura P5.79

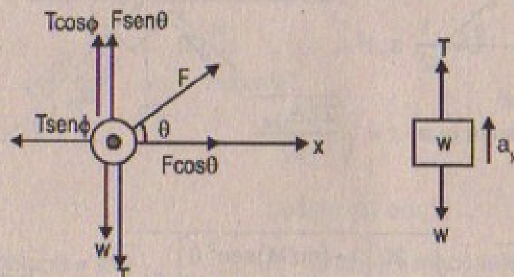
Resolución:

Dato: $\theta = \phi/2$

Parte (a)

Supongamos que el sistema no está en equilibrio

D.C.L.



$\Sigma F_x = m.a_x \Rightarrow \quad F\cos\theta - T\text{sen}\phi = m_{alambre} \cdot a_x \quad ...(1)$

$\Sigma F_y = m.a_y \Rightarrow \quad F\text{sen}\theta - T\cos\phi - T = m_{al} \cdot a_y \quad ...(2)$

También: $T - w = \dfrac{w}{g} \cdot a_y$

Si $\theta = 30° \Rightarrow \phi = 60°$

De (1)

$\Rightarrow \quad F\cos 30° - T\text{sen}60° = m_{alambre} \cdot a_x \quad ...(\beta)$

De (2)

$\Rightarrow \quad F\text{sen}30° + T\cos 60° - T = m_{alambre} \cdot a_y$

$\Rightarrow \quad F\text{sen}30° + \dfrac{T}{2} - T = \quad F\text{sen}30° - \dfrac{1}{2}T = F\text{sen}30° - T\text{sen}30° \; ... (\alpha)$

De (β):

$F\cos 30° - T\text{sen}60° = F\text{sen}60° - T\text{sen}60° \; ... (\theta)$

$\Rightarrow$ Que $\theta = \alpha \leftrightarrow$ Los $\angle$s sean complementarios

$\therefore$ El sistema está en equilibrio.

De (2) $\wedge$ (1): Resulta que $F = 2w\text{sen}(\phi/2)$ l.q.q.d.

80. Una escultura con partes móviles está formada por cuatro mariposas metálicas de igual masa m sostenidas por una cuerda de longitud l. Los puntos de soporte están igualmente espaciados por una distancia l, como se muestra en la figura P5.80. La cuerda forma un ángulo θ_1 con el techo en cada punto extremo. La sección central de la cuerda es horizontal. a) Encuentre la tensión en cada sección de la cuerda en función de θ_1, m y g. b) Determine el ángulo θ_2, en función de θ_1, que las secciones de cuerdas entre las mariposas exteriores y las interiores forman con la horizontal. c) Muestre que la distancia D entre los puntos extremos de la cuerda es:

$$D = \frac{L}{5}\left(2\cos\theta_1 + 2\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta_1\right)\right] + 1\right)$$

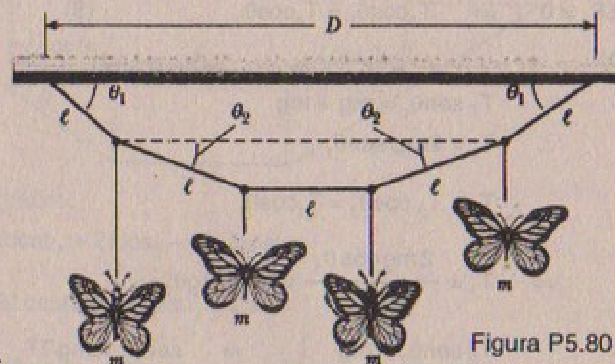
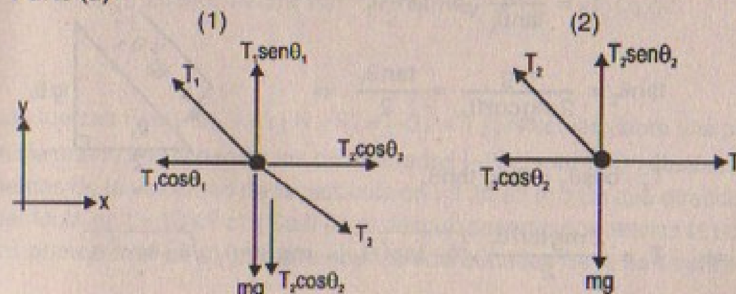


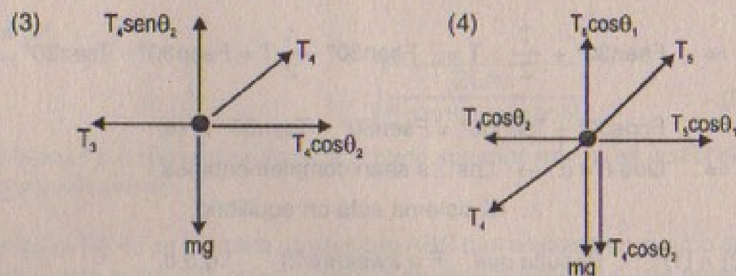
Figura P5.80

Resolución:

$L = 5\ell$ = longitud de la cuerda

Parte (a)





En (1) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 sen\theta_1 = mg + T_2 sen\theta_2$ ... (1)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 cos\theta_2 = T_1 cos\theta_1$ ... (2)

En (2) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_3 = T_2 cos\theta_2$ ... (3)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 sen\theta_2 = mg$ ... (4)

En (3) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_4 sen\theta_2 = mg$ ... (5)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_4 cos\theta_2 = T_3$ ... (6)

En (4) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_5 sen\theta_1 = mg + T_4 sen\theta_2$ ... (7)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_5 cos\theta_1 = T_4 cos\theta_2$ ... (8)

Resolviendo:

(4) y (1): $T_1\ sen\theta_1 = mg + mg$

$\therefore\ T_1 = 2mg/sen\theta_1$

(2) y (3): $T_3 = T_2\ cos\theta_2 = T_1 cos\theta_1$

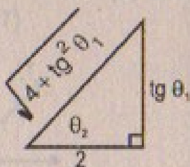
$$\Rightarrow\ T_3 = \frac{2\,mg\cos\theta_1}{sen\,\theta_1} = 2mg\ ctg\theta_1$$

(4) y (2): $T_2\ sen\theta_2 = mg \Rightarrow sen\theta_2 = mg/T^2$

$T_2\ cos\theta_2 = T_1\ cos\theta_1 \Rightarrow cos\theta_2 = 2mg\ cot\theta_1/T^2$

$$\therefore\ T_2 = \frac{mg}{\tan\theta_1}\sqrt{4+\tan^2\theta_1}$$

(5) y (6): $$\tan\theta_2 = \frac{mg}{2mg\cot\theta_1} = \frac{\tan\theta_1}{2} \Rightarrow$$



(6): $T_4 \cdot cos\theta_2 = 2mg\ tan\theta_1$

$$\Rightarrow\ T_4 = \frac{2\ mg\tan\theta_1}{2}\sqrt{4+\tan^2\theta_1} = mg\tan\theta_1\sqrt{4+\tan^2\theta_1}$$

(en 8) $T_5 = cos\theta_1 = T_4 cos\theta_2$

$$\Rightarrow\ T_5 = \frac{mg\tan\theta_1 \cdot \sqrt{4+\tan^2\theta_1}}{\cos\theta_1} \cdot \frac{2}{\sqrt{4+\tan^2\theta_1}} = \frac{2mg\ sen\,\theta_1}{\cos^2\theta_1}$$

Parte (b)

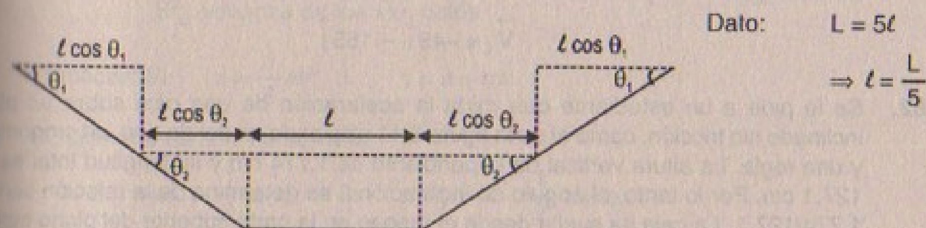
De la relación: (2) y (3); (5) y (6) tenemos:

$$T_3 = 2\ mg.\ \frac{\cos\theta_1}{sen\,\theta_1} \quad y \quad \tan\theta_2 = \frac{mg}{T_3} = \frac{mg\ sen\,\theta_1}{2\ mg\cos\theta_1}$$

$$\therefore\ \tan\theta_2 = \frac{\tan\theta_1}{2}$$

Luego: $$\theta_2 = arc\tan\left[\frac{1}{2}\tan\theta_1\right]$$

Parte (c)



Dato: $L = 5\ell$

$\Rightarrow \ell = \frac{L}{5}$

$\therefore$ Del gráfico:

$D = \ell cos\theta_1 + 2\ell cos_2 + \ell + \ell cos\theta_1$

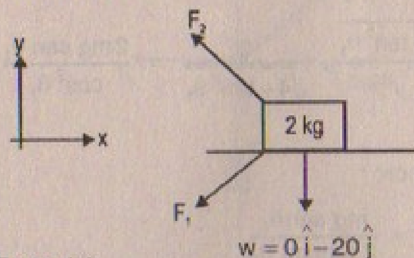
$\Rightarrow D = 2\ell\ cos\theta_1 + 2\ell\ cos\theta_2 + \ell$

$$D = \ell(2\ cos\theta_1 + 2cos\theta_2 + 1) = \frac{L}{5}\left[2cos\theta_1 + 2cos\left[arctan\left(\frac{1}{2}tan\theta_1\right)\right] + 1\right]$$

$$\therefore\ D = \frac{L}{5}\left[2cos\theta_1 + 2cos\left(tan^{-1}\left[\frac{1}{2}tan\theta_1\right]\right) + 1\right] \qquad l.q.qd$$

81. Las fuerzas $F_1 = (-6\hat{i} - 4\hat{j})$ N y $F_2 = (-3\hat{i} + 7\hat{j})$ N actúan sobre una partícula de 2 kg inicialmente en reposo en las coordenadas (-2m, + 4m). a) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la partícula en t = 10 s? b) ¿En qué dirección se mueve la partícula en t = 10 s? c) ¿Cuál es el desplazamiento que realiza la partícula durante los primeros 10 s? d) ¿Cuáles son las coordenadas de la partícula en t = 10 s?

Resolución :



Dato:

$F_1 = (-6\hat{i} - 4\hat{j})$

$F_2 = (-3\hat{i} + 7\hat{j})$

$v_o = 0$

$X(0) = (-2;4)$

$w = 0\hat{i} - 20\hat{j}$

Parte (a)

$\Sigma\vec{F}x = m.\vec{a}_x \Rightarrow -6\hat{i} - 3\hat{i} = 2.\vec{a}_x \quad \therefore \quad \vec{a}_x = -4{,}5\hat{i}$

$\Sigma\vec{F}y = m.\vec{a}_y \Rightarrow 7\hat{j} - 4\hat{j} - 20\hat{j} = 2.\vec{a}_y \therefore \quad \vec{a}_y = -15{,}5\hat{j}$

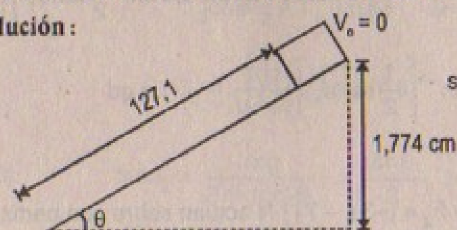
$\therefore \quad \vec{a} = (-4{,}5\hat{i} - 15{,}5\hat{j})$

Cinemática: $\vec{V}_f = \vec{V}_i + a.t \qquad \vec{V}_f = 0 - (4{,}5;\ 15{,}5)(10)$

$\therefore \quad \vec{V}_f = -45\hat{i} - 155\hat{j}$

82. Se le pide a un estudiante que mida la aceleración de una caja sobre un plano inclinado sin fricción, como el de la figura 5,11 utilizando un riel de aire, un cronómetro y una regla. La altura vertical de la pendiente es 1,774 cm y su longitud total es d = 127,1 cm. Por lo tanto, el ángulo de inclinación θ se determina de la relación sen θ = 1,774/127,1. La caja se suelta desde el reposo en la parte superior del plano inclinado, y su desplazamiento a lo largo de la pendiente, x, se mide contra el tiempo, donde x = 0 se refiere a la posición inicial de la caja. Para valores x de 10,0; 20,0; 35,0; 50,0; 75,0 y 100 cm; los tiempos medidos para recorrer estos desplazamientos (promediados en seis ensayos) son 1,02; 1,53; 2,01; 2,64; 3,30 y 3,75 s; respectivamente. Construya una gráfica de x contra t^2 y efectúe un ajuste de mínimos cuadrados de los datos. Determine la magnitud de la aceleración de la caja a partir de la pendiente de esta gráfica y compárela con el valor que obtendría si utilizara a' = gsenθ.

Resolución :

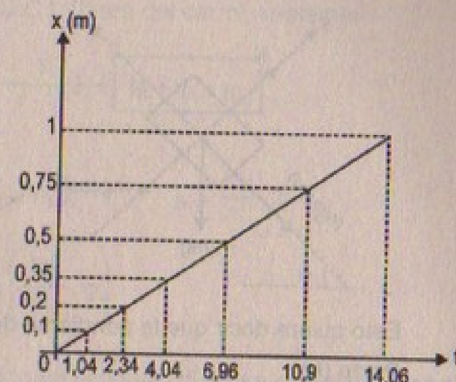


$$\text{sen}\theta = \frac{1{,}774}{127{,}1} = 0{,}014$$

x	0	0,10	0,20	0,35	0,5	0,75	1	m
x	0	10	20	35	50	75	100	cm
t	0	1,02	1,53	2,01	2,64	3,30	3,75	s

Sabemos que:

$$x = v_o.t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$



Y además: $y = a + bx$

(ecuación de una recta, donde b es la pendiente)

Por el método de mínimos cuadrados:

$$a = -b\bar{x} + \bar{y} \quad \wedge \quad b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

Donde: $\bar{x}$: promedio aritmético de los datos

$\bar{y}$: promedio aritmético de los datos

S_{xy}: covarianza

S^2_x: varianza de los «x» datos

Entonces: Si: $x = \frac{1}{2}at^2 \quad \wedge \quad y = a + bx$

Si hacemos cambio de variable:

$$x = y = 0 + \frac{1}{2}a(x) \Rightarrow x = y \quad \wedge \quad \frac{1}{2}a = b$$

$$t^2 = x$$

Luego:

Desarrollando: como «a» = 0 $\Rightarrow \bar{y} = b.\bar{x}$

$$\therefore \quad b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

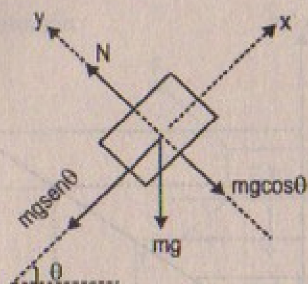
Pero: $$\bar{y} = \bar{x}\text{desp.} = \frac{\sum_1^7 x_i^2}{7} = \frac{0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}50 + 0{,}75 + 1}{7}$$

$$\therefore \quad \bar{y} = 0{,}4142$$

$$\bar{x} = t^2 = \sum_1^7 t_i^2 = \frac{0 + 1{,}04 + 4{,}04 + 6{,}96 + 10{,}9 + 14{,}06}{7}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = t^2 = 37$$

En consecuencia: $b = \dfrac{0{,}41}{37} = 0{,}011$ es la pendiente.



Sabemos que:

$\Sigma F_x = m.a$

$\Rightarrow \quad mgsen\theta = m.a$

$\therefore \quad a = gsen\theta = 10\left(\dfrac{1{,}774}{127{,}1}\right)$

$\therefore \quad a = 0{,}0139\ m/s^2$

Esto quiere decir que la pendiente de la curva $\approx a = 0{,}014\ m/s^2$

Parte (b)

$x(t) = x_o t + \dfrac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = (-2\hat{i})(10) + \dfrac{1}{2}(-4{,}5\hat{i})(100)$

$\therefore \quad \bar{x} = -245\hat{i}$

$y(t) = y_o t + \dfrac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4\hat{j}(10) + \dfrac{1}{2}(-15{,}5\hat{j})(100)$

$\therefore \quad \bar{y} = -735\hat{j}$

Luego la dirección: $\quad \dfrac{y}{x} = \tan\theta = \dfrac{-735\hat{j}}{-245} = 3$

$\therefore \quad \theta = \text{arc}\tan(3)$

Parte (c)

Las coordenadas son: $\bar{x} = -245\hat{i} - 735\hat{j}$ ó $\bar{x} = (-245; -735)$

83. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse al carro mostrado en la figura P5.83 con el propósito de que los bloques permanezcan estacionarios respecto del carro? Suponga que todas las superficies, las ruedas y la polea son sin fricción. (Sugerencia: Observe que la fuerza ejercida por la cuerda acelera a m_1.)

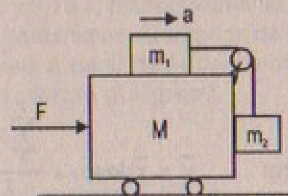
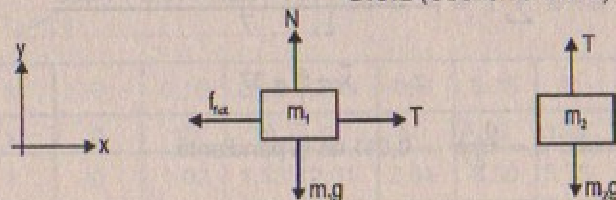


Figura P5.83

Resolución:

D.C.L (Obs. en el carro)



D.C.L (fuera del carro) «sistema»

$\Sigma F_x = \Sigma m.a$

$F = (M + m_1 + m_2)(a)$ ... (1)

F → $M + m_1 + m_2$

$T - m_1 g = 0 \Rightarrow T = m_1 g$

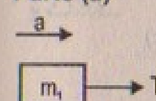
Pero también: $\quad T = m_1.a \Rightarrow m_2 g = m_1 a \quad \therefore \quad a = \dfrac{m_2}{m_1}.g$

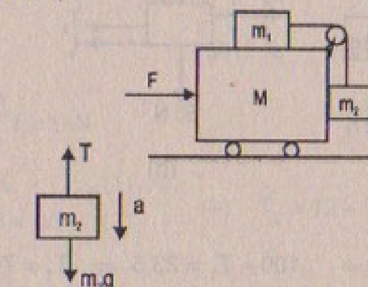
Luego: $\quad F = (M + m_1 + m_2)\left(\dfrac{m_2}{m_1}.g\right)$

84. Inicialmente el sistema de masas mostrado en la figura P5.83 se mantiene inmóvil. Todas las superficies, poleas y ruedas son sin fricción. Dejemos que la fuerza F sea cero y supongamos que m_2 puede moverse sólo verticalmente. En el instante ulterior en el que el sistema de masas se libera, encuentre: a) la tensión T en la cuerda, b) la aceleración de m_2, c) la aceleración de M, y d) la aceleración de m_1. (Nota: La polea acelera junto con el carro.)

Resolución:

Parte (a)





$T = m_1 a$ ... (1)

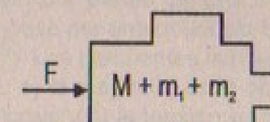
$m_2 g - T = m_2 a$ ... (2)

$\Rightarrow \quad m_2 g - m_1 a = m_2.a \quad \therefore \quad a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

Luego: $\quad T = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

Parte (b) $\quad a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

Parte (c)



$\Sigma F_x = \Sigma m.a$

$\Rightarrow \quad F = (M + m_1 + m_2)\dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

Parte (d) $\quad a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2}$

85. Los tres bloques de la figura P5.85 están conectados por medio de cuerdas sin masa que pasan por poleas sin fricción. La aceleración del sistema es 2,35 m/s² a la izquierda y las superficies son rugosas. Determine: a) las tensiones en las cuerdas y b) el coeficiente de fricción cinético entre los bloques y las superficies. (Suponga la misma para ambos bloques.)

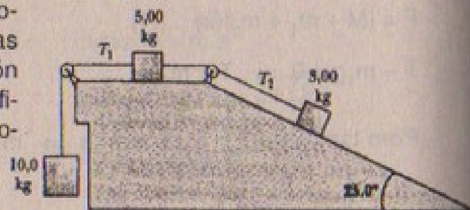
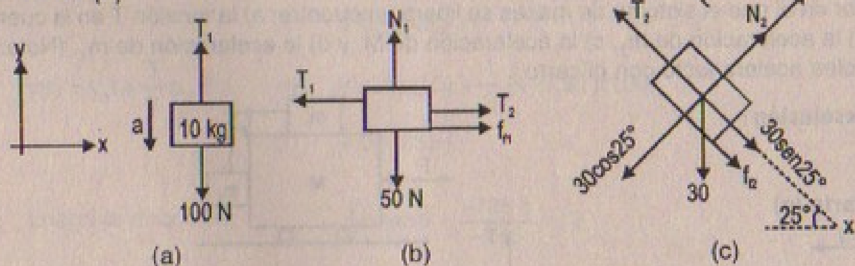


Figura P5.85

Resolución:

Datos: $a_{sist} = 2,35$ m/s²

Parte (a)



En (a)

$\Sigma F_y = 10(2,35) \Rightarrow 100 - T_1 = 23,5 \Rightarrow T_1 = 76,5$ N

En (b)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 50$ N

$\Sigma F_x = 5(2,35) \Rightarrow T_1 - T_2 - f_{f_1} = 11,75 \Rightarrow T_2 + f_{f_1} = 64,75$ N ...(1)

En (c)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = 30\cos 25° = 67$ N

$\Sigma F_x = 3(2,35) \Rightarrow T_2 - f_{f_2} - 30\text{sen}25° = 7,05 \Rightarrow T_2 - f_{f_2} = 16,05$ ...(2)

Parte (b)

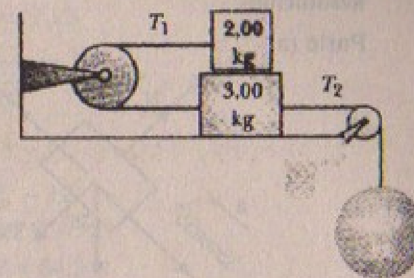
(2) – (1)

$f_{f_1} + f_{f_2} = 48,7 \text{ N} \Rightarrow \mu.N_1 + \mu.N_2 = 48,7$

$\Rightarrow \mu(50 + 67) = 48,7 \quad \therefore \boxed{\mu = 0,42}$

$\Rightarrow T_2 = 64,75 - (0,42)(50) = 43,75$ N

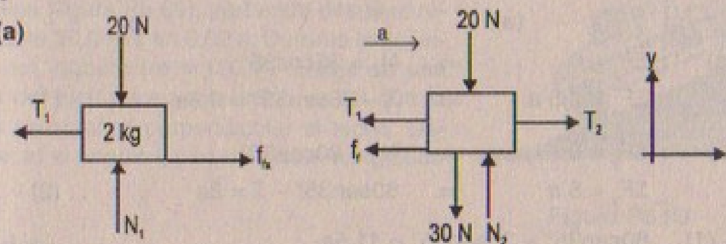
86. En la figura P5.86, el coeficiente de fricción cinético entre los bloques de 2,00 kg y 3,00 kg es 0,300. La superficie horizontal y las poleas son sin fricción y las masas se liberan desde el reposo. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. b) Determine la aceleración de cada bloque. c) Encuentre la tensión en las cuerdas.



Resolución:

$\mu_k = 0,3$

Parte (a)



Parte (b)

$(0,3)(20) = 6 = f_{f_k} \quad \therefore \quad f_f = 6$ N

$\Rightarrow T_1 - 6 = 2a$ ... (1)

$T_2 - T_1 - 6 = 3a$ ... (2)

(+) $T_2 = 12 + 5a$ ... (4)

Pero sabemos:

$2T_1$ ← [5 kg] → T_2 $\Rightarrow T_2 - 2T_1 = 5a$ ... (3)

(3) en (4) $\Rightarrow 5a + 2T_1 = 12 + 5a$

$\therefore T_1 = 6$ N

Luego: $T_2 = T_1 + f_f \Rightarrow T_2 = 12$ N

87. Dos bloques de 3,50 kg y 8,00 kg de masa se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción (figura P5.87). Las pendientes son sin fricción. Encuentre: a) la magnitud de la aceleración de cada bloque y b) la tensión en la cuerda.

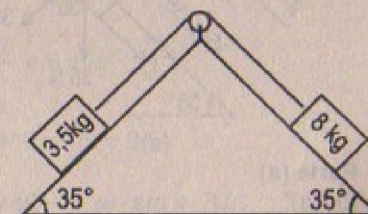
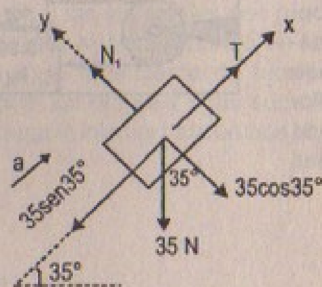
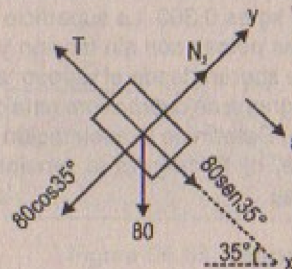


Figura P5.87

Resolución :

Parte (a)





(a) (b)

En (a) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = 35\cos 35°$

$\Sigma F_x = 3{,}5\,a \Rightarrow T - 35\text{sen}35° = 3{,}5a$ ... (1)

En (b) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = 80\cos 35°$

$\Sigma F_x = 8.a \Rightarrow 80\text{sen}35° - T = 8a$ ... (2)

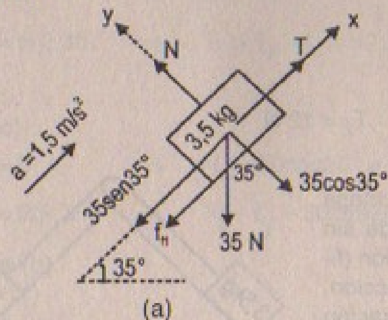
(2) + (1) $80\text{sen}35° - 35\text{sen}35° = 11{,}5a$

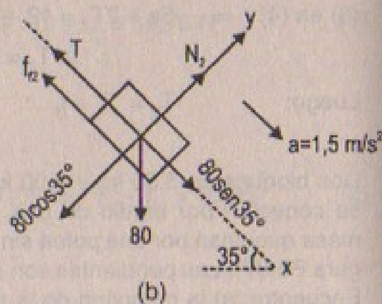
$\text{sen}35°(45) = 11{,}5a \qquad \therefore\ a = \dfrac{0{,}7 \times 45}{11{,}5} = 274\ m/s^2$

Parte (b) $T = 3{,}5(2{,}74) + 35(0{,}7) = 9{,}59 + 24{,}5 = 34\ N$

88. El sistema mostrado en la figura P5.87 tiene una aceleración de magnitud igual a 1,5 m/s². Suponga que el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente es el mismo en ambas pendientes. Determine: a) el coeficiente de fricción cinético y b) la tensión en la cuerda.

Resolución :





(a) (b)

Parte (a)

En (a)* $\Sigma F_x = ma \Rightarrow T - 35\text{sen}35° - \mu_k\,.\,35\cos 35° = 3{,}5(1{,}5) = 5{,}25$ ... (1)

En (b) $\Sigma F_x = 8.(1.5)$

$\Rightarrow 80\text{sen}35° - T - \mu_k\,.\,80\cos 35° = 12$ ... (2)

(2) + (1) $45\text{sen}35° - \mu_k\ 115\cos 35° = 17{,}25$

$\Rightarrow \dfrac{45\,(0{,}7) - 17{,}25}{115(0{,}71)} = \dfrac{31{,}5 - 17{,}25}{81{,}65} = 0{,}17 = \mu_k$

Parte (b)

De (2) $T = 80\text{sen}35° - \mu_k\ 80\cos 35° - 12$

$T = (80)(0{,}7) - (0{,}17)(80)(0{,}71) - 12$

$\therefore\ T = 56 - 12 - 9{,}7 = 34{,}3\ N$

89. Una camioneta acelera cuando desciende por una colina (figura P5.89), partiendo desde el reposo hasta 30,0 m/s en 6,00 s. Durante la aceleración, un juguete (m = 100 g) cuelga de una cuerda del techo. La aceleración es tal que la cuerda permanece perpendicular al techo. Determine: a) el ángulo θ y b) la tensión en la cuerda.

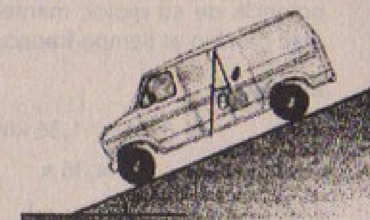
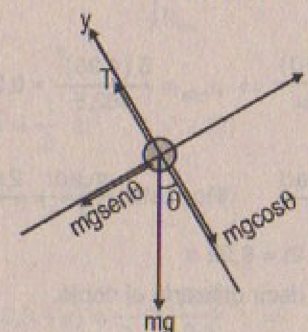


Figura P5.89

Resolución :

Datos: m = 0,1 kg

D.C.L.



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T - mg\cos\theta = 0 \quad \therefore \quad T = mg\cos\theta$ ... (1)

$\Sigma F_x = m.a \Rightarrow mg\text{sen}\theta = m.a \quad \therefore \quad a = g\text{sen}\theta$ ... (2)

Cinemática: $v_f = v_i + at \Rightarrow a = \dfrac{v_f}{t} = \dfrac{30}{6} = 5\ m/s^2$

De (2): $a = 10\text{sen}\theta \Rightarrow 5 = 10\text{sen}\theta \quad \therefore\ \text{sen}\theta = 1/2 = 0{,}5$

En consecuencia $\theta = \text{arc sen}(0{,}5) = 30°$

De (1): $T = mg\cos\theta \Rightarrow T = (0{,}1)kg\ (10\ m/s^2)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8650\ N$

90. Antes de 1960 se pensaba que el coeficiente máximo que podía alcanzarse de fricción estática de una llanta de automóvil era menor que 1. Más tarde, alrededor de 1962, tres compañías desarrollaron por separado llantas de carreras con coeficientes de 1,6. Desde entonces, las llantas han mejorado, como se ilustra en el siguiente problema. De acuerdo con el libro de récords de Guinness de 1990, el cuarto de milla más rápido cubierto por un auto de motor de pistons desde un inicio en reposo es de 4,96 s. Este tiempo récord fue establecido por Shirley Muldowney en septiembre de 1989. a) Suponiendo que las ruedas traseras casi levantan las ruedas delanteras del pavimento, ¿qué valor mínimo de μ es necesario para alcanzar el tiempo récord? b) Suponga que Muldowney hubiera sido capaz de duplicar la potencia de su motor, manteniendo los demás factores iguales. ¿Cómo afectaría este cambio al tiempo transcurrido?.

Resolución:

1 milla ≡ 1,35 km ≡ 1350 m ≡ 1/4 milla <> 462,5 m

Dato: $v_i = 0$; $t = 4{,}36$ s

Cinemática: $462{,}5 = \frac{1}{2}(a)(4{,}96)^2$ ... (1)

Pero: $\Rightarrow$ Como nos piden $\mu_{mínimo}$ $\Rightarrow \Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow$ $m.a = \mu mg$ $\therefore \mu = \frac{g}{a}$ ... (2)

(2) en (1)

Luego: $462{,}5 = \frac{1}{2}(4{,}96)^2 \frac{(10)}{\mu} \Rightarrow \mu_{mín} = \frac{5\,(4{,}96)^2}{462{,}5} = 0{,}26$ (parte A)

Parte (B) Potencia $= \frac{W}{t} = \frac{F.d}{t} = \frac{m.ad}{t}$ Por dato: $\frac{m.ad}{t} = \frac{2mad}{t}$

$\Rightarrow$ $t_1 = 2t = 9{,}92$ s

Lo duplicaría al tiempo es decir utilizaría el doble.

91. Un mago intenta jalar un mantel por debajo de un tarro de 200 g localizado a 30 cm del borde del mantel. Si hay una fuerza de fricción de 0,10 N ejercida en el tarro por el mantel, y éste se jala con una aceleración constante de magnitud 3,0 m/s², ¿qué distancia se mueve el tarro sobre el mantel antes de que éste se haya sacado completamente? (Sugerencia: el mantel se mueve más de 30 cm ¡antes de que se haya quitado de debajo del tarro!).

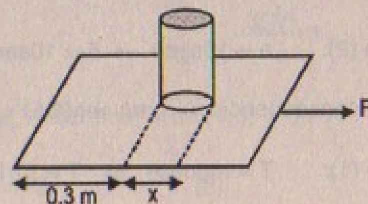
Resolución:

Dato: $m_{tarro} = 200\text{ g} = 0{,}2$ kg

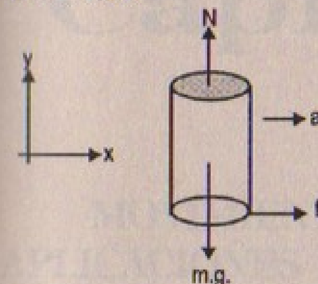
$d = 30\text{ cm} = 0{,}3$ m

$a_{mantel} = 3\text{ m/s}^2$

$f_t = 0{,}10$ kN



D.C.L. tarro



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m_T\, g$ ...(1)

$\Sigma F_x = m_T \vec{a}_1 \Rightarrow f_t = m_t\, a = \mu_s \,.\, m_t\, g$

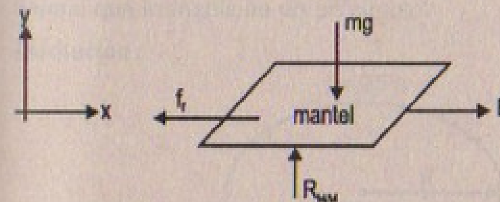
$\Rightarrow 0{,}10 = (0{,}2)(a_1)$ $\therefore a_1 = 0{,}5$ m/s²

Luego: $\mu_s = \frac{(0{,}5)}{10} = 0{,}05$

Cinemática: En un tiempo «t» el tarro recorre «x» metros:

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}a_1 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2x}{0{,}5}$ ... (1)

D.C.L. (mantel)



$\Sigma F_x = F - 0{,}1 = M(3)$

Cinemática:

En un tiempo «t» el mantel se moverá «x + 0,3»

$\Rightarrow 0{,}3 + x = \frac{1}{2}at^2$ ... (2)

$\Rightarrow 0{,}3 + x = \frac{1}{2}(3)t^2$ ... (3)

(1) en (3)

$\Rightarrow (0{,}3 + x) = \frac{1}{2}(3)\frac{(2x)}{0{,}5} \Rightarrow x = \frac{3}{50} = 0{,}06$ m

Luego: el tarro se moverá una distancia de 0,06 metros, osea 6 cm.

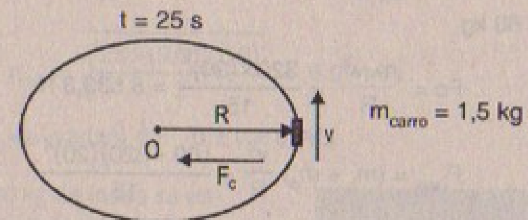
Capítulo 6

MOVIMIENTO CIRCULAR Y OTRAS APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

LA SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA AL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

1. Un carro de juguete que se mueve con rapidez constante completa una vuelta alrededor de una pista circular (una distancia de 200 m) en 25,0 s. a) ¿Cuál es la rapidez promedio? b) Si la masa del auto es de 1,50 kg, ¿cuál es la magnitud de la fuerza central que lo mantiene en un círculo?

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $2\pi R = 200$ m $\Rightarrow \frac{100}{\pi} = R$ $\therefore$ $R \approx 31,8$ m

Por otro lado: $v \times t = 200 \Rightarrow v(25) = 200$ $\therefore$ $v = 8$ m/s

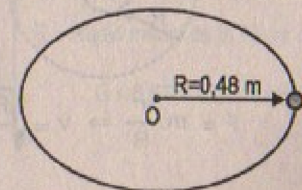
Parte (b) $F_{central} = m.\frac{v^2}{R} = \frac{(1,5)(8)^2}{31,8}$ $\therefore$ $F_c = 3,02$ N

2. En un ciclotrón (un tipo de acelerador de partículas), un deuterón (de masa atómica 2 u) alcanza una velocidad final de 10% la velocidad de la luz mientras se mueve en una trayectoria circular de 0.48 m de radio. El deuterón se mantiene en la trayectoria circular por medio de una fuerza magnética. ¿Qué magnitud de la fuerza se requiere?

Resolución :

1 deuterón = 2 μ

$v_f = \frac{10}{100}$ (3 × 10)8 m/s = 3 × 107 m/s



$1\mu = 1,66 \times 10^{-27}$ kg

R = 0,48 m

$$\Rightarrow \quad F_{magnética} = \frac{m.v^2}{R} = \frac{2\,(1{,}66\times10^{-27})(3\times10^{7})^2}{0{,}48}$$

$$\therefore \quad F_M = 62{,}25 \times 10^{-13}\ N$$

3. Las ruedas de una montaña rusa están ambas por encima y por debajo de los rieles, como se muestra en la figura P6.3, de manera que el carro no deje los rieles. Si la masa soportada por este particular sistema de ruedas es 320 kg y el radio de esta sección de la pista es 15 m, a) ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que la pista ejerce sobre la rueda cuando la velocidad del carro es 20 m/s? b) ¿Cuál sería la fuerza neta ejercida sobre una persona de 60 kg que viaje en el carro? c) ¿Qué suministra esta fuerza?

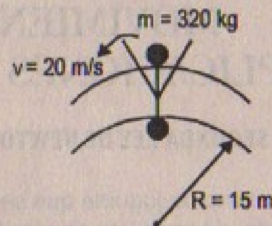


Figura P6.3

Resolución:

$m_{PERSONA} = 60$ kg

Parte (a) $\quad Fc = \dfrac{m.v^2}{R} = \dfrac{320\times(20)^2}{15} = 8\,533{,}3\ N$

Parte (b) $\quad F_{neta} = (m_c + m_p)\,\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(60+320)(20)^2}{15}$

$$\therefore \quad F_{neta} = 10\,133{,}3\ N$$

Parte (c) La fuerza suministrada es la fuerza de fricción.

4. En un átomo de hidrógeno el electrón en órbita alrededor del protón experimenta una fuerza atractiva de aproximadamente 8,20 × 20^{-8}N. Si el radio de la órbita es 5.30 × 10^{-11} m, ¿cuál es la frecuencia en revoluciones por segundo? Vea la segunda de forros para datos adicionales.

Resolución:

$R = 5{,}3 \times 10^{-11}$ m

$F = 8{,}20 \times 10^{-8}$ N

$m_{e^-} = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

$$F = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F.R}{m}} = \sqrt{\frac{(8{,}20\times10^{-8})(5{,}3\times10^{11})}{9{,}11\times10^{-31}}}$$

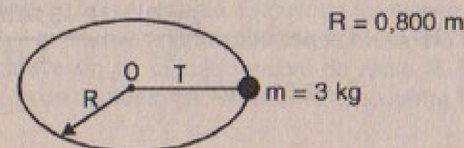
$$\therefore \quad v = 10^{11} \times 2{,}18\ m/s$$

como: $\quad v = \omega.R = 2\pi\,R.f \Rightarrow \quad Frecuencia = \dfrac{2{,}18\times10^{11}}{2\pi\times5{,}3\times10^{-11}}$

$$\therefore \quad Frecuencia = 65 \times 10^{19}\ rev/s$$

5. Una masa de 3,00 kg unida a una cuerda ligera gira sobre una mesa sin fricción horizontal. El radio del círculo es 0,800 m y la cuerda puede soportar una masa de 25,0 kg antes de romperse. ¿Qué intervalo de velocidades puede tener la masa antes de que se rompa la cuerda?

Resolución :5



$$T = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow (25)(9{,}81) = 3\,\frac{v^2}{(0{,}8)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = \sqrt{\frac{25\times(9{,}81)(0{,}8)}{3}} \approx 8{,}09\ m/s$$

Luego: «v» variará de: $0 < v < 8$ m/s

6. Un satélite de 300 kg de masa se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra a una altitud igual al radio medido de la tierra. (Véase el ejemplo 6.5). Encuentre: a) la velocidad orbital del satélite, b) el período de su revolución y c) la fuerza gravitacional que actúa sobre él.

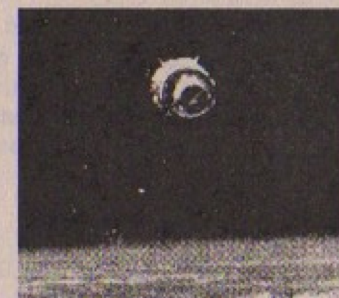


Figura P6.6

Resolución:

$m_{satélite} = 300$ kg

$m_{Tierra} = 6 \times 10^{24}$ kg

Satélite, V_s, r, Tierra

R = Radio medio de la Tierra = 10^7 m

G = 6,67 × 10^{-11} N.m²/kg²

Parte (a)

$$F_G = F_{atracción} \quad \Rightarrow \quad \frac{G.M_T.m_S}{r^2} = \frac{m_S.v_s^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v_s^2 = \frac{G.M_{Tierra}}{r} = \frac{G.M_{Tierra}}{2(RM_{Tierra})} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(6\times10^{24})}{2\times10^7}$$

$$\therefore \quad v_{satélite} = 4{,}47 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$$v = \omega.R = \frac{2\pi}{T}.R \Rightarrow T = \text{período} = \frac{2\pi.R}{v} = \frac{(2\times3{,}1416)(2\times10^7)}{4{,}47\times10^3}$$

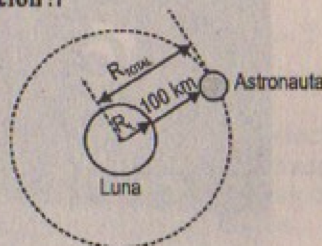
$$\therefore \quad T = 2.81 \times 10^4 \text{ s}$$

Parte (c)

$$F_{gravitacional} = \frac{G.M_T.M_S}{r^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(6\times10^{24})(3\times10^2)}{4\times10^{14}} = 3\times10^2\text{N}$$

7. Mientras dos astronautas estaban en la superficie de la Luna, un tercer astronauta la orbitaba. Suponga que la órbita es circular y se encuentra 100 km sobre la superficie de la Luna. Si la masa y el radio de la Luna son 7,40 x 1022 kg y 1,70 x 106 m, respectivamente, determine: a) la aceleración del astronauta en órbita, b) su velocidad orbital y c) el período de la órbita.

Resolución :7



$R_{Luna} = 1{,}70 \times 10^6$ m

$M_{Luna} = 7{,}4 \times 10^{22}$ kg

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N . m²/kg²

Parte (a)

$$F_{gravitacional} = \frac{M_{Luna}.m_{astron}}{(R_{total})^2} \times G = m_{astron} \times a_{astron}$$

$$\Rightarrow \quad a_{astron} = \frac{M_{Luna}.G}{(R_{total})^2} = \frac{(7{,}4\times10^{22})(6{,}67\times10^{-11})}{(1.7\times10^6+10^5)^2}$$

$$\therefore \quad a_{astron} = 1{,}5 \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

$$a_{astron} = \frac{v^2}{R_{total}} \Rightarrow v = \sqrt{a_{astron}\times R_{total}}$$

$$\therefore \quad V_{astron} = 16{,}4 \times 10^2 = 1\,640 \text{ m/s}$$

Parte (c)
$$v = \omega.R = \frac{2\pi}{T}.R \Rightarrow T = \text{período} = \frac{2\pi.R_{total}}{v}$$

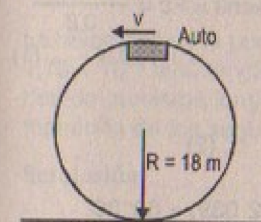
Reemplazando:

$$\Rightarrow \quad \text{Período} = \frac{2\times(3{,}1416)(18\times10^5)}{1640} = 6\,900 \text{ segundos}$$

8. Un automóvil se mueve a velocidad constante sobre la cima de una colina. La conductora se mueve en un círculo vertical de 18.0 m de radio. En la cima advierte que apenas permanece en contacto con el asiento. Encuentre la velocidad del vehículo.

8A. Un automóvil se mueve a velocidad constante sobre la cima de una colina. La conductora se mueve en un círculo vertical de radio R. En la cima advierte que apenas permanece en contacto con el asiento. Encuentre la velocidad del vehículo.

Resolución :



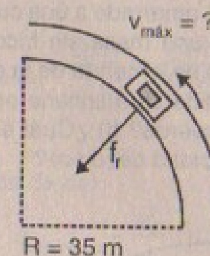
$g = 9{,}81$ m/s²

$$F = N + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}81)(18)}$$

$$\therefore \quad v = 13{,}29 \text{ m/s}$$

9. Una caja de huevos se localiza en la parte media de la plataforma plana de una camioneta en el momento en que ésta circula por una curva no peraltada. La curva puede considerarse como un arco de un círculo de 35 m de radio. Si el coeficiente de fricción estático entre la caja y la camioneta es 0,60, ¿cuál debe ser la velocidad máxima del vehículo para evitar que la caja se deslice?

Resolución :9



$\mu_e = 0{,}60$

$g = 9{,}81$ m/s²

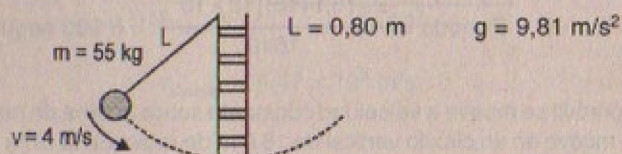
R = 35 m

$$f_r = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu_e.N = \mu_e.mg = \frac{m.v_{máx}^2}{R}$$

$$\therefore \quad v_{máx} = \sqrt{\mu_e.g(R)} = \sqrt{(0{,}6)(9{,}81)(35)} = 14{,}35 \text{ m/s}$$

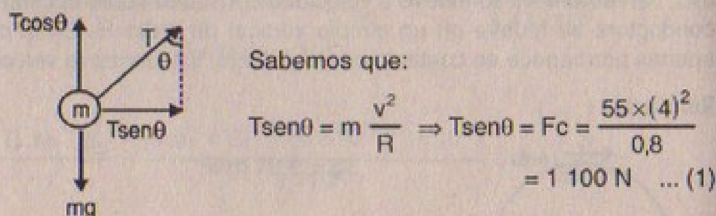
10. Una patinadora de hielo de 55 kg se mueve a 4,0 m/s cuando agarra el extremo suelto de una cuerda cuyo otro extremo está amarrado a un poste. Después se mueve en un círculo de 0,80 m de radio alrededor del poste, a) Determine la fuerza ejecida por la cuerda sobre sus brazos. b) Compare esta fuerza con su peso.

Resolución:



L = 0,80 m g = 9,81 m/s²

Parte (a)



Sabemos que:

$$T\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow T\text{sen}\theta = Fc = \frac{55\times(4)^2}{0{,}8} = 1\,100 \text{ N} \quad ...(1)$$

Además: $T\cos\theta = mg = 55 \times 9{,}81 = 539{,}6$ N ... (2)

$$(1)\div(2) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1100}{539{,}6} = 2{,}039 \quad \therefore\ \theta = \tan^{-1}(2{,}039) \approx 63°30'$$

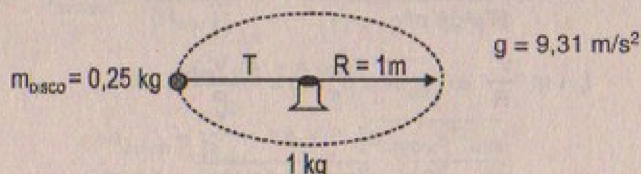
$$T = \text{Fuerza ejercida por la cuerda} = \frac{1100}{\text{sen}(63°30')} = \frac{1100\sqrt{5}}{2} = 550\sqrt{5} \approx 1\,230 \text{ N}$$

Parte (b) Peso = mg = 55(9,81) = 539,6 N

$T = 1\,230$ N $\Rightarrow T > mg$

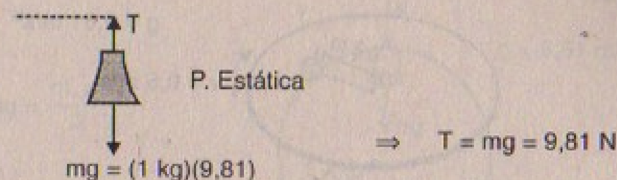
11. Un disco de aire de 0,250 kg de masa está amarrado a una cuerda y se deja que gire en un círculo de 1,00 m de radio sobre una mesa sin fricción horizontal. El otro extremo de la cuerda pasa por un agujero en el centro de la mesa y tiene una masa de 1,00 kg unida a él. La masa suspendida se mantiene en equilibrio mientras el disco gira. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? b) ¿Cuál es la fuerza central que actúa sobre el disco? c) ¿Cuál es la velocidad del disco?

Resolución :11



g = 9,31 m/s²

Parte (a)



$\Rightarrow T = mg = 9{,}81$ N

Parte (b) $T = m_{disco}\cdot\frac{v^2}{R} = F_{central} = 9{,}81$ N

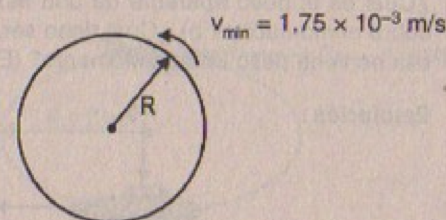
Parte (c) $T = 9{,}81 = (0{,}25)\frac{v^2}{(1\text{ m})}$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{9{,}81}{0{,}25} \quad \therefore\ v \approx 6{,}26 \text{ m/s}$$

12. La velocidad de la punta de la manecilla de los minutos en el reloj de un pueblo es $1{,}75\times10^{-3}$ m/s. a) ¿Cuál es la velocidad de la punta de la manecilla de los segundos de la misma longitud? b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la punta de la manecilla de los segundos?

Resolución:

Parte (a)



$v_{minutero} = 1{,}75\times10^{-3}$ m/s

$$\Rightarrow v_{minutero} = \frac{2\pi.R}{T}$$

$$\therefore\ T_{min} = \frac{2\times(3{,}14)R}{1{,}75\times10^{-3}} = 3590 \text{ L}$$

Por otro lado:

$$T_{segundos} = \frac{2\pi R}{v_s} = \frac{2\pi R}{60.v_M} \Rightarrow v_{segundos} = 60\,.\,v_{minutos}$$

$$\therefore\ v_{segundos} = 10{,}5\times10^{-2} \text{ m/s}$$

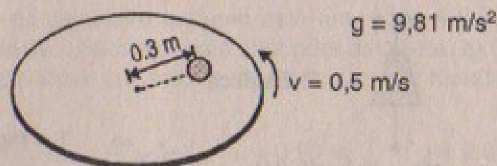
Parte (b)

Si R = 1 m (faltan datos)

$$\Rightarrow a_{centrípeta} = \frac{v_s^2}{1}\ (10{,}5\times10^{-2})^2 = 110{,}3\times10^{-4} \text{ m/s}^2$$

13. Una moneda situada a 30,0 cm del centro de una mesa giratoria horizontal que está en rotación se desliza cuando su velocidad es 50,0 cm/s. a) ¿Qué origina la fuerza central cuando la moneda está estacionaria en relación con la mesa giratoria? b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estático entre la moneda y la mesa giratoria?

Resolución :



Parte (a) $f_1 = m.\frac{v^2}{r} = \frac{m_{moneda} \cdot v^2}{0,3m}$ = Fuerza de fricción

Parte (b) $f_1 = \mu.N = \mu.mg = m.\frac{v^2}{r}$

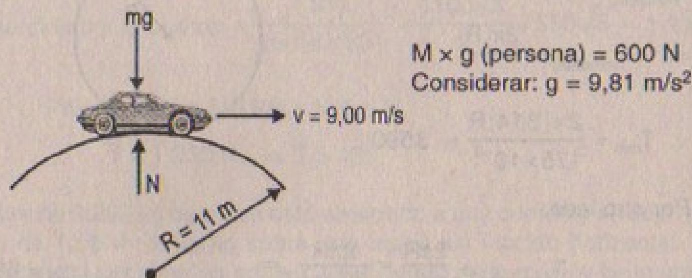
$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{v^2}{r.g} = \frac{(0,5)^2}{(0,3)(9,81)} = 0,085$$

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

14. Un carro que viaja sobre un camino recto a 9,00 m/s pasa sobre un montecillo en el camino. Éste puede considerarse como un arco de un círculo de 11,0 m de radio. a) ¿Cuál es el peso aparente de una mujer de 600 N en el carro cuando ella pasa sobre el montecillo? b) ¿Cuál debe ser la velocidad del carro sobre el montecillo si ella no tiene peso en ese momento? (Es decir, su peso aparente es cero.)

Resolución :

M × g (persona) = 600 N
Considerar: g = 9,81 m/s²



Parte (a)

$$mg - N = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = \text{peso aparente} = 600 - \frac{600}{(9,81)}\frac{(9)^2}{11}$$

$$\therefore \quad N = 149,6\ N$$

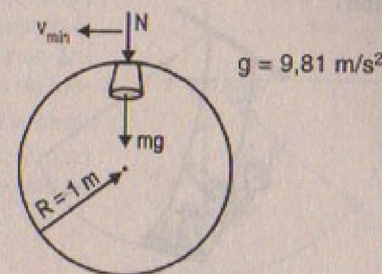
Parte (b)
Si N = 0

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{g.R} = \sqrt{(9,81)(11)} \approx \sqrt{107,91}\ m/s \approx 10,4\ m/s$$

15. Una cubeta de agua gira en un círculo vertical de 1,00 m de radio. ¿Cuál es la velocidad mínima de la cubeta en la parte superior del círculo si no se derrama el agua?

Resolución :15

$$N + mg = \frac{m.v^2}{R}$$



Como V es mínima $\Rightarrow$ N = 0 Luego:

$$mg = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow v_{min} = \sqrt{gR}$$

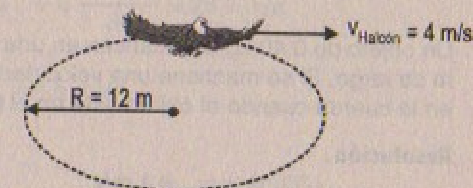
$$\therefore \quad v_{min} = \sqrt{(9,81)(1)} \approx 3,13\ m/s$$

16. Un halcón vuela en un arco horizontal de 12,0 m de radio a una velocidad constante de 4,00 m/s. a) Encuentre su aceleración centrípeta. b) El halcón continúa volando a lo largo del mismo arco horizontal pero aumenta su velocidad a la tasa de 1,20 m/s². Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) bajo estas condiciones.

Resolución :

Parte (a)

$$a_{centripeta} = \frac{v^2}{R} = \frac{(4)^2}{12} = 1,3\ m/s^2$$



Parte (b)

Sabemos: $a_{cp} = 1,3\ m/s^2$

Como: $a_{tangencial} = 1,2\ m/s^2$

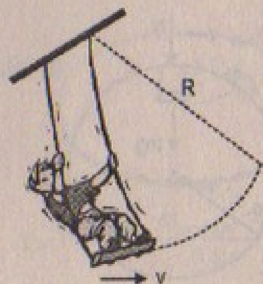
Luego: $a_{total} = \sqrt{(1,3)^2 + (1,2)^2} = 1,77\ m/s^2$

Entonces: Dirección: $\tan\theta = \frac{a_t}{a_r} = \frac{1,2}{1,3} = 0,92 \therefore \tan^{-1}(0,92) = \theta$

17. Un niño de 40,0 kg se mece en un columpio soportado por dos cadenas, cada una de 3,00 m de largo. Si la tensión en cada cadena en el punto más bajo es de 350 N, encuentre: a) la velocidad del niño en el punto más bajo, y b) la fuerza del asiento sobre el niño en ese mismo punto. (Ignore la masa del asiento.)

17A. Un niño de masa m se mece en un columpio soportado por dos cadenas, cada una de largo R. Si la tensión en cada cadena en el punto más bajo es T, encuentre: a) la velocidad del niño en el punto más bajo, y b) la fuerza del asiento sobre el niño en ese mismo punto. (Ignore la masa del asiento.)

Resolución :



$T = 350\ N$

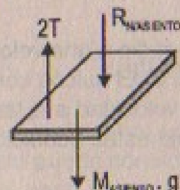
$M_{niño} = 40\ kg$

$R = 3\ m$

Parte (a) Por mov. circular: $2T - mg = \dfrac{mv^2}{R}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{R}{m}[2T - mg] = v^2 \quad \Rightarrow \quad v = 4{,}8\ m/s$

Parte (b)



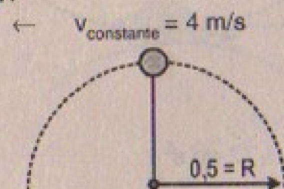
Dato $M_{asiento} = 0$

$\Rightarrow \quad 2T - R_{N/asiento} = 0$

$\therefore \quad R_{normal\ del\ niño/asiento} = 700\ N$

18. Un objeto de 0,40 kg se balancea en una trayectoria circular en una cuerda de 0.50 m de largo. Si se mantiene una velocidad constante de 4,0 m/s, ¿cuál es la tensión en la cuerda cuando el objeto está en el punto más alto del círculo?

Resolución :



$m = 0{,}4\ kg$

$g = 9{,}81\ m/s^2$



$\Rightarrow \quad T + mg = \dfrac{m.v^2}{R} \Rightarrow T = m\left[\dfrac{v^2}{R} - g\right]$

Reemplazando: $T = (0{,}4)\left[\dfrac{(4)^2}{0.5} - 9{,}81\right] \quad \therefore \quad T = 8{,}88\ N$

19. Un carro que viaja inicialmente hacia el este vira hacia el norte en una trayectoria circular a velocidad uniforme, como en la figura P6.19. La longitud del arco ABC

es 235 m y el carro completa la vuelta en 36,0 s. a) ¿Cuál es la aceleración cuando el carro se encuentra en B localizado a un ángulo de 35,0°? Exprese su respuesta en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Determine, b) la velocidad promedio del carro y c) su aceleración promedio durante el intervalo de 36.0 s.

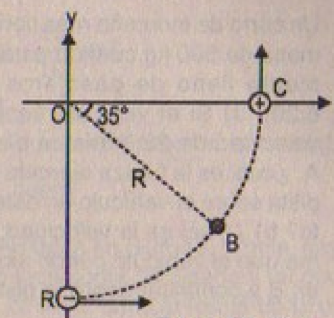


Figura P6.19

Resolución :

Considerar:

sen35° ≈ 0,568 ; $\widehat{ABC} = 235\ m$

cos35° ≈ 0,323 ; $T = 36\ s$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

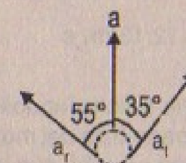
Parte (a)

$a_{centrípeta} = \dfrac{v^2}{R}$, Además: $4(235) = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad R = 149{,}6\ m$

Pero: $v_T = 4(\widehat{ABC}) = 4(235) \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{4(235)}{36} = 26{,}1\ m/s$

Luego: $a_{cp} = \dfrac{(26{,}1)^2}{149{,}6} \quad \therefore \quad a_{cp} = 4{,}6\ m/s^2$

Por otro lado:



$\Rightarrow \quad a_{cp} = a\,sen35°$

$\Rightarrow \quad 4{,}6 = a(0{,}568)$

$\therefore \quad a_{total} = 8{,}099\ m/s^2$

Además: $a_t = a\cos 35°$

$\Rightarrow \quad a_t = (8{,}099)(0{,}823) \quad \therefore \quad a_t = 6{,}67\ m/s^2$

La aceleración total es: $a_{total} = 3{,}099\ m/s^2$ ó

$\vec{a}_{total} = (4{,}6\,\hat{i} - 6{,}67\,\hat{j})\ m/s^2$

Parte (b)

Lo hallado en (a) $\quad v_{prom} = 26{,}1\ m/s$

Parte (c)

Lo hallado en (a) $\quad |\vec{a}| = 8{,}099\ m/s^2$

20. Un carro de montaña rusa tiene una masa de 500 kg cuando está totalmente lleno de pasajeros (Fig. 6,20). a) Si el vehículo tiene una velocidad de 20,0 m/s en el punto A, ¿cuál es la fuerza ejercida por la pista sobre el vehículo en este punto? b) ¿Cuál es la velocidad máxima que el vehículo puede alcanzar en B y continuar sobre la pista?

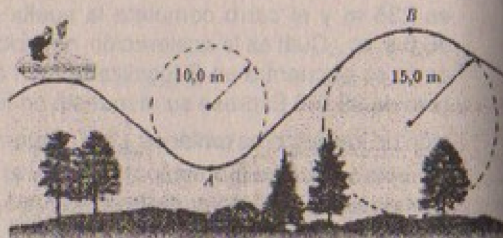


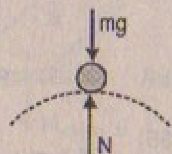
Figura P6.20

Resolución :

Parte (a) $F_{pista/v} = N \Rightarrow \quad N - mg = m.\dfrac{v_A^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad N = 500(9,81) + \frac{500}{10}(20)^2 \qquad \therefore \quad N = 24\,905\ N$$

Parte (b)



$$mg - N = \frac{m}{R}v_B^2$$

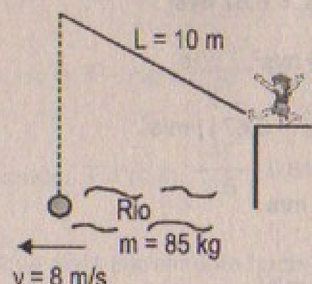
Como el vehículo continúa $\Rightarrow$ N = 0 y por lo tanto v_B es máxima

Luego $\quad mg = \dfrac{m.v_B^2}{R} \qquad \therefore \quad v_{B\,máx} = \sqrt{gR} = \sqrt{(9,81)(15)}$

$$\therefore \quad v_{B\,máx} \approx 12,13\ m/s$$

21. Tarzán (m = 85,0 kg) trata de cruzar un río balanceándose en una liana. La liana tiene 10,0 m de largo y su velocidad en la parte baja del movimiento (cuando Tarzán apenas libra el agua) es de 8,00 m/s. Tarzán no sabe que la resistencia a la ruptura de la liana es de 1 000 N. ¿Cruzará con seguridad el río?

Resolución :



Por mov. circular



$$\Rightarrow \quad T - mg = \frac{m.v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = (85)(9,81) + \frac{85}{10}(8)^2$$

$$\therefore \quad T = 1\,377,9\ N$$

como 1 377,9 > 1 000 N (que es la máxima fuerza que puede soportar la cuerda)

Por consiguiente tarzán no cruzará el río $\quad \therefore$ caerá

22. En el parque de diversiones en Six Flags Great America en Gurnee, Illinois, hay una montaña rusa que incorpora algo de lo último en tecnología de diseño y un poco de física básica. Cada giro vertical, en lugar de ser circular, tiene la forma de una gota de agua (Fig. P6.22). Los carros se mueven sobre el interior del rizo en la parte superior, y las velocidades son lo suficientemente altas para asegurar que se mantengan sobre la pista. El rizo más grande tiene 40,0 m de altura, con una velocidad máxima de 31,0 m/s (casi 70 mph) en la parte inferior. Suponga que la velocidad en el punto superior es 13,0 m/s y que la aceleración centrípeta correspondiente es 2 g. a) ¿Cuál es el radio del arco de la gota de agua en el punto más alto? b) Si la masa total de los carros más la gente es M, ¿qué fuerza debe ejercer el riel sobre ella en el punto más alto? c) Suponga que la montaña rusa tiene un rizo de 20,0 m de radio. Si los carros tienen la misma velocidad, 13,0 m/s en el punto más alto, ¿cuál es la aceleración centrípeta en ese mismo punto? Comente acerca de la fuerza normal en el punto más alto en estas condiciones.

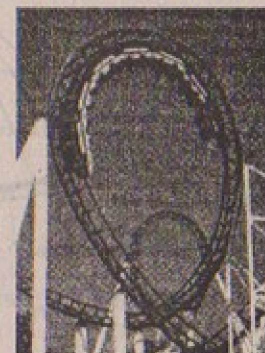
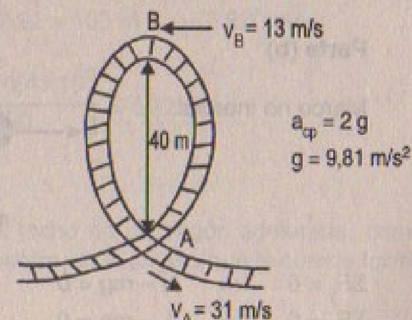


Figura P6.22 (Frank Cezus/FPG International)

Resolución :

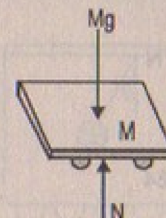
Parte (a)



$$\text{Aceleración centrípeta} = \frac{v_B^2}{R} = 2\,g$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{(13)^2}{2(9,81)} = 8,614\ m$$

Parte (b)



$$Mg - N = M\,.\,\frac{v_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad Mg - M\frac{v_B^2}{R} = N$$

$$\therefore \quad N = Mg - 2Mg = -Mg$$

Parte (c) $a_{centrípeta} = \frac{v_B^2}{R} = \frac{(13)^2}{20} = 8,45 \text{ m/s}^2$

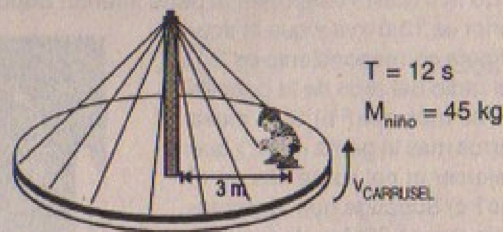
La fuerza normal en el punto más alto es negativa porque apunta en contra de la aceleración centrípeta que señala en todo momento al centro de la montaña rusa.

MOVIMIENTO EN MARCOS ACELERADOS

23. Un carrusel completa una revolución en 12,0 s. Si un niño de 45,0 kg está sentado sobre el piso horizontal del carrusel a 3,00 m del centro, encuentre a) la aceleración del niño y b) la fuerza horizontal de fricción que actúa sobre él. c) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estático es necesario para evitar que el niño se deslice?

Resolución:

Considerar: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$



$T = 12$ s

$M_{niño} = 45$ kg

Parte (a)

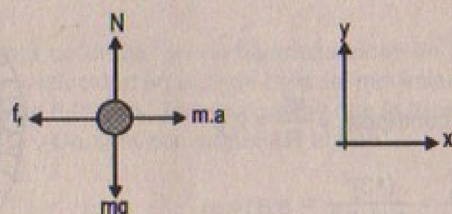
Marco referencial: $v_{niño} \times T = 2\pi(3)$

$\Rightarrow v_{niño} = \frac{6\pi}{12} \quad \therefore v_{niño} = 1,57 \text{ m/s}$

Luego: $a_{niño} = a_{centrípeta} = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,57)^2}{3} = 0,822 \text{ m/s}^2$

Parte (b)

Marco no inercial:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \quad \therefore N = mg = (45)(9,81) = 441,45 \text{ N}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_r - ma = 0 \Rightarrow f_r = m(a)$

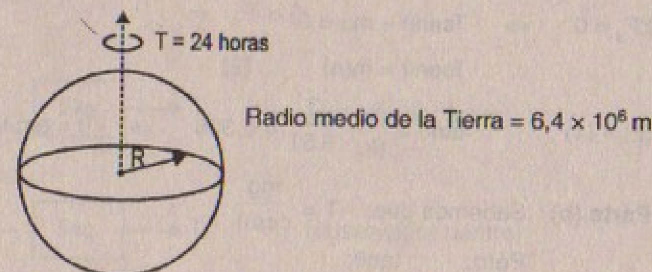
$\therefore f_r = (45)(0,822) = 37 \text{ N}$

Parte (c) $f_{fe} = \mu_e . N \Rightarrow 37 = \mu_e (441,45)$

$\therefore \mu_e = \frac{37}{441,45} \approx 0,084$

24. La Tierra gira alrededor de su eje en un período de 24 h. Imagine que la velocidad rotacional puede incrementarse. Si un objeto en el ecuador va a tener peso aparente igual a cero, a) ¿cuál debe ser el nuevo periodo? b) ¿En qué factor se incrementaría la velocidad del objeto cuando el planeta esté girando a la velocidad más alta? (Sugerencia: Vea el problema 39 y advierta que el peso aparente del objeto se vuelve cero cuando la fuerza normal ejercida sobre él es cero. También, que la distancia recorrida durante un periodo de rotación es $2\pi R$, donde R es el radio de la Tierra.)

Resolución:



Parte (a)

mg

$\Rightarrow \Sigma F_R = \frac{m.v^2}{R} \Rightarrow mg = \frac{m.v^2}{R}$

$\Rightarrow v = \sqrt{gR} = \frac{2\pi.R}{T}$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi R}{\sqrt{g.R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\times 3,1416\sqrt{\frac{6,4\times10^6}{9,81}} \approx 5,1\times10^3 \text{ s}$

Parte (b)

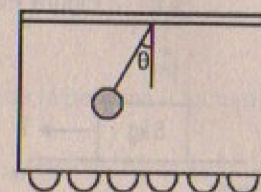
Sabemos que $V_{objeto} = \sqrt{(9,81)(6,4\times10^6)} = 7,92 \times 103$ m/s $\approx 7\,920$ m/s

$v_{planeta} = \frac{2\pi.R}{T} \Rightarrow v_{planeta} = \frac{2\times(3,1416)\times6,4\times10^6}{24\times3\,600} = 500 \text{ m/s}$

Se incrementará en un factor de 16.

25. Un objeto de 0,500 kg está suspendido del techo de un vagón acelerado, como muestra la figura 6.11. Si $a = 3,00 \text{ m/s}^2$, encuentre, a) el ángulo que la cuerda forma con la vertical y b) la tensión de la cuerda.

Resolución:



→ $a = 3,00 \text{ m/s}^2$ Considerar:

$m = 0,500$ kg $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Parte (a)

Marco no inercial
(observador dentro)

Tcosθ, T, –ma, Tsenθ, mg

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta - mg = 0$

$\therefore \quad T\cos\theta = mg \quad \ldots (1)$

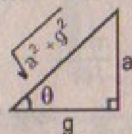
$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T\operatorname{sen}\theta - ma = 0$

$\therefore \quad T\operatorname{sen}\theta = m(a) \quad \ldots (2)$

$(2) \div (1) \qquad \tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{3}{9{,}81} = 0{,}306 \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{arc tan } (0{,}306)$

Parte (b) Sabemos que: $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

Pero: tanθ:



$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}$

Reemplazando: $T = \dfrac{mg}{\dfrac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}} \Rightarrow T = m\,.\sqrt{a^2+g^2} = (0{,}5)\left[\sqrt{(9)^2+(9{,}81)^2}\right]$

$\therefore \quad T = 5{,}13 \text{ N}$

26. Una masa de 5,00 kg unida a una balanza de resorte descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura P6.26. La balanza de resorte, unida al lado frontal del vagón, registra 18,0 N cuando el vagón está en movimiento. a) Si la balanza de resorte marca cero cuando el vagón está en reposo, determine la aceleración del vagón mientras está en movimiento. b) ¿Cuál será la lectura de la balana de resorte si el vagón se mueve con velocidad constante? c) Describa las fuerzas sobre la masa según las observa alguien ubicado en el vagón y por alguien en reposo fuera de éste.

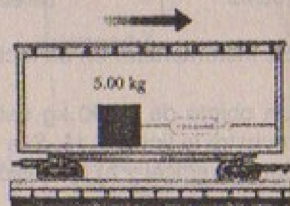


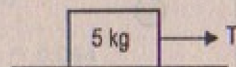
Figura P6.26

Resolución:

T = 18 N

Parte (a)

Marco inercial: (observador fuera)

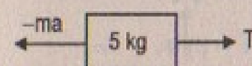


$\Sigma F_x = M.a \quad \Rightarrow \quad T = M.a$

$\Rightarrow \quad 18 = 5a \quad \therefore \quad a_{vagón} = 3{,}6 \text{ m/s}^2$

Parte (b)

Marco no inercial (observador dentro)



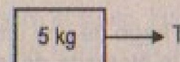
$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad T - m(a) = 0 \qquad v = \text{cte}$

$\Rightarrow \quad T = 0$

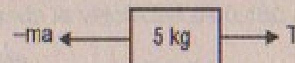
Parte (c)

Marco inercial:



(observador fuera)

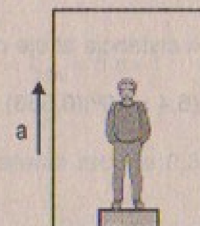
Marco no inercial:



(observador dentro)

27. Una persona está sobre una balanza en un elevador. Las lecturas máxima y mínima de la balanza son 591 N y 391 N, respectivamente. Suponga que la magnitud de la aceleración es la misma cuando arranca y cuando se detiene, especifique: a) el peso de la persona, b) la masa de la persona, y c) la aceleración del elevador.

Resolución:



Lectura máxima = 591

Lectura mínima = 391

Considerar: $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

Parte (a)

Marco referencial inercial (observador fuera)

Cuando la lectura es mínima el ascensor está en reposo entonces:



$N - mg = 0$

$\Rightarrow \quad 391 = M(9{,}81)$

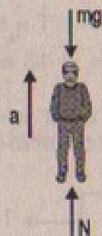
$\therefore \quad M = 39{,}86 \text{ kg}$

$\Rightarrow$ Peso de la persona = lectura mínima = 391 N

Parte (b)

Lo hallado en (a) $\qquad M_{persona} = 39{,}86 \text{ kg}$

Parte (c)
Marco referencial inercial
(observador fuera)



La lectura de la balanza será máxima cuando el ascensor suba, en consecuencia:

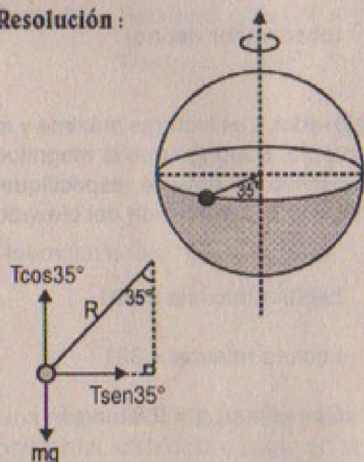
$$N - mg = m(a)$$

$$\Rightarrow \quad N = m(g + a)$$

$$\Rightarrow \quad 591 = 39{,}86\,[9{,}81 + a] \qquad \therefore\ a = 5{,}02\ \text{m/s}^2$$

28. Una plomada no cuelga exactamente a lo largo de una línea dirigida al centro de la rotación de la Tierra. ¿Cuánto se desvía la plomada de la línea radial a 35° latitud norte? Suponga que la Tierra es esférica.

Resolución :



$$R_{Tierra} = 6{,}4 \times 10^6\ \text{m}$$

$$\text{sen}35° \approx 0{,}568$$

Por proporcionalidad:

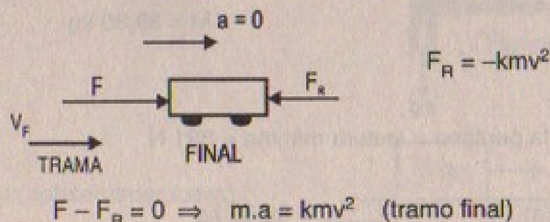
Rsen35° = distancia al eje de rotación

$$\Rightarrow \quad d = (6{,}4 \times 10^6)(0{,}568) = 3{,}64 \times 10^6\ \text{m}$$

MOVIMIENTO EN PRESENCIA DE FUERZAS RESISTIVAS

29. Suponga que la fuerza resistiva ejercida sobre un patinador de velocidad es $f_R = -kmv^2$, donde k es una constante y m es la masa del patinador. Muestre que, después de terminar la carrera, la velocidad del patinador como función del tiempo es $v(t) = v_f/(1 + ktv_f)$ donde v_f es la velocidad al cruzar la meta.

Resolución :



$$F_R = -kmv^2$$

$$F - F_R = 0 \Rightarrow \quad m.a = kmv^2 \quad \text{(tramo final)}$$

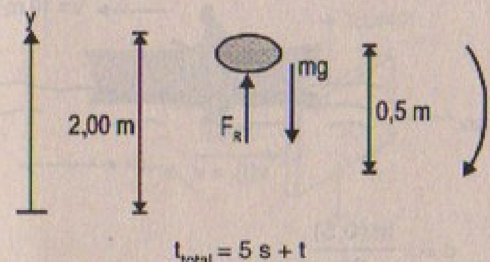
$$\Rightarrow \quad m \, . \, \frac{dv}{dt} = k.m.v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2} \, . \, dv = k.dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_f}^{t} \frac{1}{v^2} . dv = \int_{t_i}^{t} k\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}\Big|_{v_f}^{t} = kt\Big|_{0}^{t}$$

$$\Rightarrow \quad v^{-1}(t) - v_f^{-1} = kt \quad \therefore\ v(t) = \frac{v_f}{1 + kt\, v_f}$$

30. Un pedazo pequeño de material de empaque de estirofoam se deja caer desde una altura de 2,00 m sobre el suelo. Hasta que se alcanza la velocidad terminal, la aceleración está dada por a = g – cv. Después de caer 0,500 m, alcanza su velocidad terminal, y el estirofoam tarda 5,00 s adicionales para llegar al suelo. a) ¿Cuál es el valor de la constante c? b) ¿Cuál es la aceleración en t = 0? c) ¿Cuál es la aceleración cuando la velocidad es 0,150 m/s?

Resolución :



Dato:
a = g – cv

Considerar: $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

$$t_{total} = 5\ \text{s} + t$$

Parte (a)

Cuando: El material recorre 0,5 m el material alcanza su velocidad terminal (vt) entonces:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = g - cv \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{c} = vt$$

Pero: $\quad vt = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{g}{c}$

Integrando $\quad \displaystyle\int_{0{,}5}^{2{,}00} dy = \left(\frac{g}{c}\right)\int_{t}^{(t+5)} dt$

$$\Rightarrow \quad 2{,}00 - 0{,}5 = \frac{g}{c}(t + 5) - \frac{g}{c}(t)$$

$$1{,}5 = \frac{g}{c}(5\ \text{s}) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{(9{,}81)(5)}{1{,}5}$$

$$\therefore\ c = 32{,}7\ \text{s}$$

Parte (b)

$t = 0 \qquad a = g - cv(0) = g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (c)

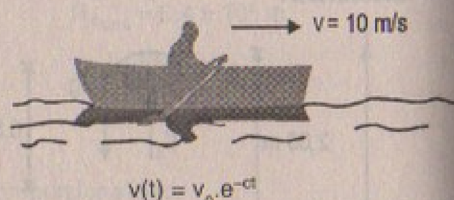
Sabemos que: Si $v = 0{,}150\ m/s$

$$a = g - c.v \quad \Rightarrow \quad a = (9{,}81) - (32{,}7)(0{,}15)$$

$$\therefore \quad a = 4{,}9\ m/s^2$$

31. Un bote de motor apaga su máquina cuando su velocidad es 10,0 m/s y navega hasta detenerse. La ecuación que gobierna el movimiento del bote durante este período es $v = v_o e^{-ct}$, donde v es la velocidad en el tiempo t, v_o es la velocidad inicial, y c es una constante. En t = 20,0 s la velocidad es 5,00 m/s. a) Encuentre la constante c. b) ¿Cuál es la velocidad en t = 40,0 s? c) Diferencie la expresión para v(t) y muestre de esa manera que la aceleración del bote es proporcional a la velocidad en cualquier tiempo.

Resolución:



Parte (a)

$$\Rightarrow \quad v(20\ s) = 5{,}00\ m/s = 10.e^{-20c}$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}5) = e^{-20c}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(0{,}5) = -20c \qquad \therefore \quad c = -\frac{\ln(0{,}5)}{20}$$

Parte (b)

$v(40{,}0\ s) = ?$

Sabemos que: $v(40\ s) = 10\ .\ e^{-40\left[-\frac{\ln(0{,}5)}{20}\right]}$

$$\Rightarrow \quad v(40\ s) = 10\ .\ \exp\ [\ln\ (0{,}5)^2]$$

$$\therefore \quad v(40\ s) = 2{,}5\ m/s$$

Parte (c)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\ (v_o e^{-ct}) \Rightarrow \quad a = \frac{d}{dt}\ (v_o)e^{-ct} + v_o\frac{d}{dt}(e^{-ct})$$

$$\therefore \quad a = -cv_o e^{-ct}$$

32. Un helicóptero contra incendios transporta un recipiente de 620 kg en el extremo de un cable de 20,0 m de largo, como en la figura P6.32. Cuando el helicóptero vuela hacia un incendio a una velocidad constante de 40,0 m/s, el cable forma un ángulo

de 40,0° respecto de la vertical. El recipiente presenta un área de sección transversal de 3,80 m² en un plano perpendicular al aire que pasa por él. Determine el coeficiente de arrastre pero suponga que la fuerza resistiva es proporcional al cuadrado de la velocidad del recipiente.

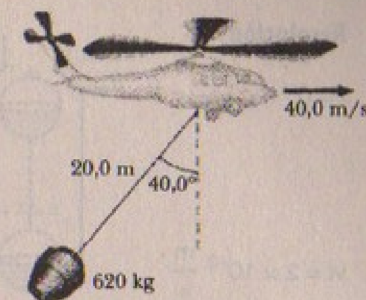


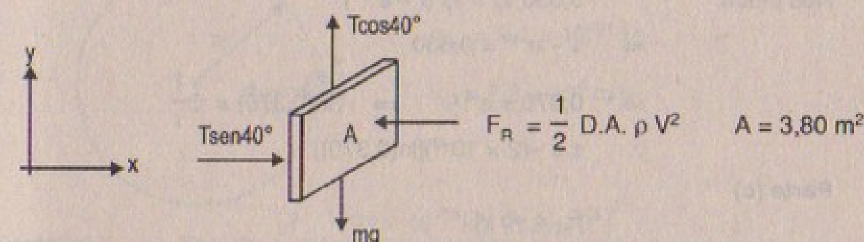
Figura P6.32

Resolución:

Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$ $\qquad \text{sen}40° \approx 0{,}646$

$\cos 40° \approx 0{,}763$ $\qquad \rho_{aire} = 0{,}0012 \times 10^3\ kg/m^3$

$D = ?$



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}40 = \frac{1}{2}D.A.\rho.V^2 \quad ...\ (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos 40 = mg$$

$$\Rightarrow \quad T(0{,}763) = (620)(9{,}81) \qquad \therefore \qquad T = 7\,971{,}43\ N$$

Luego en (1): $(7\,971{,}43)(0{,}646) = \frac{1}{2}(3{,}80)D(0{,}0012 \times 10^3\ kg/m^3)(40)^2$

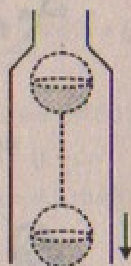
Entonces: $$D = \frac{2(7\,971{,}43)(0{,}646)}{(3{,}80)(40)^2\left(0{,}0012\times10^3\right)}$$

$$\therefore \quad D = \text{coeficiente de arrastre} \approx 1{,}412$$

33. Una pequeña cuenta esférica de 3,00 g de masa se suelta desde el reposo en t = 0 en una botella de champú. Se observa que la velocidad terminal es de 2,00 cm/s. Determine: a) el valor de la constante b en la ecuación 6,4, b) el tiempo, τ, necesario para alcanzar 0,630 v_t, y c) el valor de la fuerza resistiva cuando la cuenta alcanza la velocidad terminal.

Resolución :

t = 0



$m_{esfera} = 3 \times 10^{-3}$ kg

g = 9,81 m/s²

$vt = 2 \times 10^{-2}\ \frac{m}{s}$

Parte (a) $b = \frac{mg}{vt} = \frac{(3\times10^{-3})(9{,}81)}{2\times10^{-2}} = 1{,}47$ kg/s

Parte (b) Tiempo $= \tau = \frac{m}{b} = \frac{3\times10^{-3}}{1{,}47} = 0{,}002 \cong 2 \times 10^{-3}$ s

Nos piden: $0{,}630\ v_t t = v_t t\,(1 - e^{-t/\tau})$

$\Rightarrow\ 1 - e^{-t/\tau} = 0{,}630$

$\Rightarrow\ 0{,}370 = e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln(0{,}370) = -\frac{t}{\tau}$

$\therefore\ \tau = -(2 \times 10^{-3})[\ln(0{,}370)]$

Parte (c)

$F_R = -b\ vt$

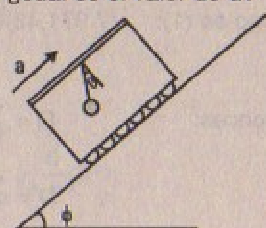
$\Rightarrow\ F_R = (-1{,}47)(2 \times 10)^{-2} = -0{,}0294$ N

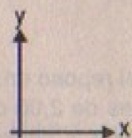
PROBLEMAS ADICIONALES

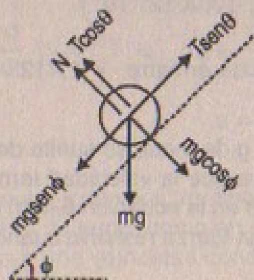
34. Suponga que el vagón de la figura 6.11 se mueve con aceleración constante *a* al ascender por una colina que forma un ángulo ϕ con la horizontal. Si la plomada forma un ángulo θ, con la perpendicular al techo, ¿cuál es el valor de *a*?

Resolución :

Diagrama de cuerpo libre de la plomada en un marco referencial inercial (observador fuera)







N = 0

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N + T\cos\theta = mg\cos\phi$

$\Rightarrow \quad T\cos\theta = mg\cos\phi \qquad \therefore \quad T = \frac{mg\cos\phi}{\cos\theta}$

$\Sigma F_x = m.a$

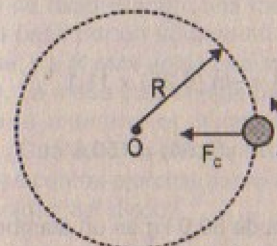
$\Rightarrow \quad T\operatorname{sen}\theta - mg\operatorname{sen}\phi = ma$

$\Rightarrow \quad mg\frac{\cos\phi}{\cos\theta}\,.\operatorname{sen}\theta - mg\operatorname{sen}\phi = m.a$

$\Rightarrow \quad g(\tan\theta\,.\cos\phi - \operatorname{sen}\phi) = a$

35. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la velocidad del electrón es aproximadamente 2,2 × 10⁶ m/s. Encuentre: a) la fuerza central que actúa sobre el electrón cuando éste gira en una órbita circular de radio 0,53 × 10⁻¹⁰ m, y b) la aceleración centrípeta del electrón.

Resolución :



$R = 0{,}53 \times 10^{-10}$ m

$m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

$v_{e^-} = 2{,}2 \times 10^{6}$ m/s

Parte (a) $F_c = m\,.\frac{v^2}{R} = \frac{(9{,}1\times10^{-31}\text{kg})(2{,}2\times10^{6})^2}{(0{,}53)\times10^{-10}}$

$\therefore\ F_c = 83{,}10 \times 10^{-9}$ N

Parte (b) $a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2{,}2\times10^{6})^2}{0{,}53\times10^{-10}}$

$\therefore\ a_{cp} = 9.13 \times 10^{22}$ m/s²

36. Un objeto de 9,00 kg que parte del reposo se mueve por un medio viscoso y experimenta una fuerza resistiva R = –bv, donde v es la velocidad del objeto. Si ésta alcanza la mitad de la velocidad terminal en 5,54 s, a) determine la velocidad terminal. b) ¿En qué tiempo la velocidad del objeto es igual a 3/4 de la velocidad terminal? c) ¿Qué distancia recorre el objeto en los primeros 5,54 s de movimiento?

Resolución :

$\vec{v}_o = 0$

m = 9,00 kg



← R = –bv

Dato: En $t = 5{,}54\ s$ $v = \frac{1}{2}v_T$

Parte (a)

$$F - bv = m.a \Rightarrow mg - bv = ma$$

La velocidad terminal tendrá un valor cuando $a = 0$

$$\Rightarrow mg - bv = 0 \Rightarrow m.g = b.v_T \quad ...(1)$$

Por otro lado: $mg - bv = m.\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) = v_T\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$$\frac{v_T}{2} = v_o + g(t) = 0 + (9{,}81)(5{,}54) \quad \therefore V_{terminal} = 108{,}7\ m/s$$

Parte (b) $v_T = \frac{mg}{b} \Rightarrow b = \frac{9 \times 9{,}81}{108{,}7} = 0{,}81\ kg/s$

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{9}{0{,}81} = 11{,}1\ s$$

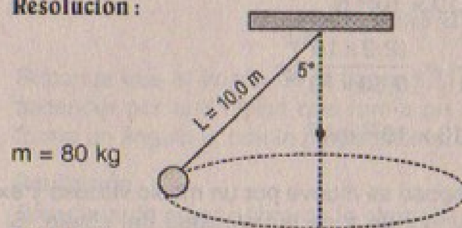
$$(0{,}75)vt = vt(1 - e^{-t/11{,}1}) \Rightarrow t = -\ln(0{,}25) \times 11{,}1$$

Parte (c) $y(t) = y(5{,}54) = \frac{1}{2}(9{,}81)(5{,}54)^2 \quad \therefore y(5{,}54) = 150{,}5\ m$

37. Considere un péndulo cónico con una plomada de 80,0 kg en un alambre de 10,0 m formando un ángulo de 5,00° con la vertical (Fig. 6.3). Determine, a) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el alambre sobre el péndulo y b) la aceleración radial de la plomada.

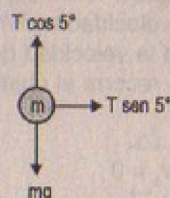
Resolución :

m = 80 kg



Considerar:
$g = 9{,}81\ m/s^2$
$sen5° \approx 0{,}0805$
$cos5° \approx 0{,}997$

Parte (a)



$$Tcos5° = mg \Rightarrow Tcos5° = (80)(9{,}81) = 784{,}8\ N$$

Como $Tcos5° = 784{,}8 \Rightarrow T = \frac{784{,}8}{0{,}997} \approx 787{,}16\ N$

Luego: $Tsen5° = (787{,}16)(0{,}0805) \approx 63{,}37\ N$

En consecuencia: $F_x = 63{,}37\ N$; $F_y = 784{,}8\ N$

Parte (b) $Tsen5° = m.a_{cp} \Rightarrow a_{centripeta} = \frac{Tsen5°}{m} = \frac{63{,}37}{80}$

$$\therefore a_{cp} = 0{,}79\ m/s^2$$

38. Un disco de aire de 0,25 kg de masa se amarra a una cuerda y se deja que gire en un círculo de 1,0 m de radio sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa por un agujero en el centro de la mesa, y a él está unida una masa de 1,0 kg (Fig. P6.38). La masa suspendida permanece en equilibrio mientras el disco gira sobre la mesa. ¿Cuáles son: a) la tensión en la cuerda, b) la fuerza central ejercida sobre el disco y c) la velocidad del disco?

38A. Un disco de aire de masa m, se amarra a una cuerda y se deja que gire en un círculo de radio R sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa por un agujero en el centro de la mesa, y a él está unida una masa m_2 (Fig. P6.38). La masa suspendida permanece en equilibrio mientras el disco gira sobre la mesa. ¿Cuál es a) la tensión en la cuerda, b) la fuerza central ejercida sobre el disco, y c) la velocidad del disco?

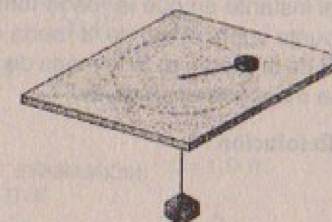


Figura P6.38

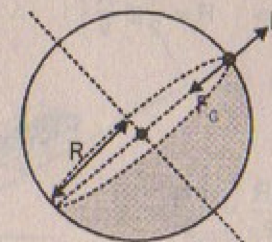
Resolución :

Nota:
El problema 38 se repite con el problema # 11 de este mismo capítulo.

39. Debido a que la Tierra gira en torno a su eje, un punto sobre el ecuador experimenta una aceleración centrípeta de 0,0340 m/s^2, en tanto que un punto en los polos no experimenta aceleración centrípeta. a) Demuestre que en el ecuador la fuerza gravitacional sobre un objeto (el verdadero peso) debe exceder al peso aparente del objeto. b) ¿Cuál es el peso aparente en el ecuador y en los polos de una persona que tiene una masa de 75,0 kg? (Suponga que la Tierra es una esfera uniforme y considere g = 9,800 N/kg.)

Resolución :

$g = 9{,}81\ m/s^2$



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$
$Mtierra = 6 \times 10^{24}\ kg$
Radio medio de la tierra = $6{,}4 \times 10^6\ m$
$a_{cp} = 0{,}0340\ m/s^2$

Parte (a)

Sabemos que: $F_G = \frac{M.m.G}{R^2} = \frac{6\times10^{24}\times(6,67\times10^{-11})}{(6,4\times10^6)^2}.m = 9,8\ m$

Por otro lado: $F_G - N = m \cdot a_{cp} = 0,0340\ m$

$\Rightarrow\ mg - m.a_{cp} = N \quad \therefore \quad N = 9,776\ m$

$\therefore\ F_G > N$ en: 0,029

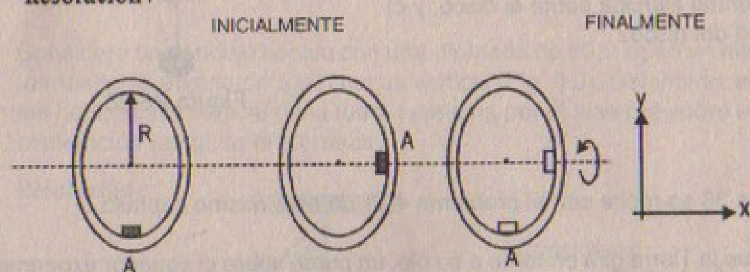
Parte (b)

En el ecuador: peso aparente = N = 9,776 (75) = 733,2 N

En los polos: peso aparente = peso = 75 × (9,81) = 735,75 N

40. Un pedazo de masilla se coloca en el punto A sobre el aro de una rueda que gira alrededor de un eje horizontal. La masilla se desprende del punto A cuando el diámetro a través de A es horizontal. Después se eleva verticalmente y regresa a A en el instante en que la rueda termina una revolución. a) Encuentre la velocidad de un punto sobre el aro de la rueda en función de la aceleración de caída libre y del radio R de la rueda. b) Si la masa de la masilla es m, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la mantiene en la rueda?

Resolución:



Parte (a)

$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$

$R = v.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{R}{v}$

$\Rightarrow\ R = \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v}\right)^2 \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{gR}{2}}$

Parte (b)

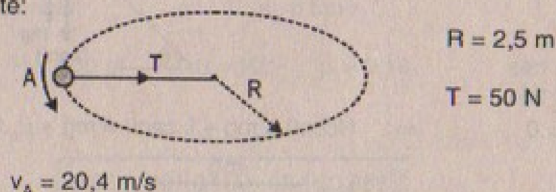
$\Sigma F_R = m.a_{cp}$

$F_c = N - mg \quad \Rightarrow \quad F_c = \frac{m}{R}\cdot\frac{gR}{2} = \frac{mg}{2}$

41. Una cuerda bajo una tensión de 50,0 N se usa para hacer girar una roca en un círculo horizontal de 2,50 m de radio a una velocidad de 20,4 m/s. La cuerda se jala hacia adentro y la velocidad de la roca aumenta. Cuando la cuerda tiene 1,00 m de longitud y la velocidad de la roca es de 51,0 m/s, la cuerda se revienta. ¿Cuál es la resistencia a la ruptura (en newtons) de la cuerda?

Resolución:

Inicialmente:



R = 2,5 m

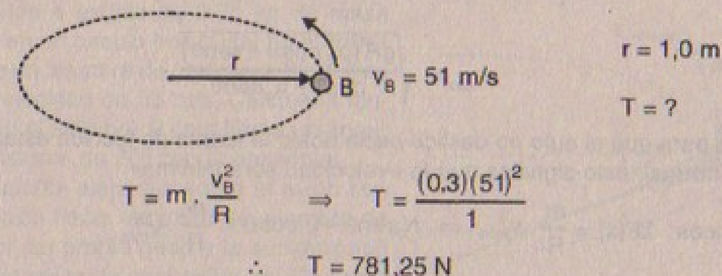
T = 50 N

$v_A = 20,4$ m/s

Tenemos que: $T = \frac{mv_A^2}{R} \quad \Rightarrow \quad Masa = \frac{T.R}{v_A^2} = \frac{50\times(2,5)}{(20,4)^2}$

$\therefore\ Masa = 0,3$ kg

Finalmente:



r = 1,0 m

T = ?

$T = m.\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(0,3)(51)^2}{1}$

$\therefore\ T = 781,25$ N

42. La figura 6.5 muestra un carro que recorre una curva peraltada. El radio de curvatura del camino es R, el ángulo de peralte es θ y el coeficiente de fricción estático es μ. a) Determine el intervalo de velocidades que el carro puede alcanzar sin deslizarse hacia arriba o hacia abajo del camino. b) Determine el valor mínimo para μ de modo que la velocidad mínima sea cero. c) ¿Cuál es el intervalo de velocidades posible si R = 100 m, θ = 10° y μ = 0,10 (condiciones resbalosas)?

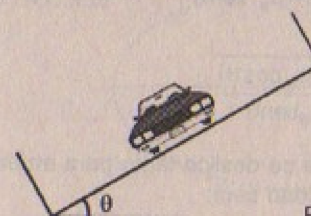


Figura 6.5

Dato: Radio = R

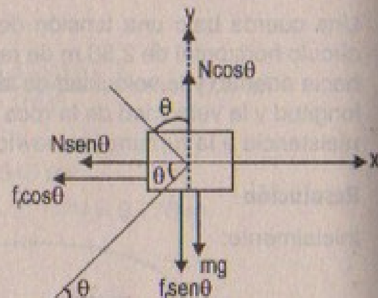
μ_e : coeficiente de fricción

g: aceleracion de la gravedad

Resolución :

Parte (a)

Si el auto no desliza hacia arriba entonces la f_t estará a favor de la normal, esto quiere decir: «tendrá una velocidad máxima»



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N\cos\theta = mg + f_t\,\text{sen}\theta = mg + \mu_e.N\text{sen}\theta$$

$$\therefore \quad N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_e \text{sen}\theta}$$

$$\Sigma F_x = \frac{m}{R} \cdot v^2_{máx} \quad \Rightarrow \quad N\text{sen}\theta + f_t\cos\theta = \frac{m}{R} v^2_{máx}$$

$$\text{Entonces: } \mu_e \cos\theta \left[\frac{mg}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right] + \left[\frac{mg}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right] \text{sen}\theta = \frac{m}{R} v^2_{máx}$$

$$\therefore \quad v_{máx} = \sqrt{\frac{gR(\mu_e \cos\theta + \text{sen}\theta)}{\cos\theta - \mu_e \text{sen}\theta}}$$

Ahora para que el auto no deslice hacia abajo la fuerza de fricción estará en contra de la normal, esto significa que la «velocidad será mínima».

$$\text{Entonces: } \Sigma F(x) = \frac{m}{R} \cdot v^2_{min} \Rightarrow N\text{sen}\theta - f_t \cos\theta = \frac{m}{R} \cdot v^2_{min}$$

$$\Rightarrow \quad N\text{sen}\theta - \mu_e.N\cos\theta = \frac{m}{R} \cdot v^2_{min} \qquad \dots(1)$$

$$\text{Además: } \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N\cos\theta + f_t\,\text{sen}\theta = mg$$

$$\Rightarrow \quad N\cos\theta + \mu_e\,N\text{sen}\theta = mg \quad \therefore N = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_e\,\text{sen}\theta}$$

$$\text{Luego: } \left[\frac{mg}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right]\text{sen}\theta - \left[\frac{mg}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right]\mu_e \cos\theta = \frac{m}{R} v^2_{min}$$

$$\therefore \quad V_{min} = \sqrt{\frac{gR(\text{sen}\theta - \mu_e \cos\theta)}{\cos\theta - \mu_e \text{sen}\theta}}$$

En consecuencia para evitar que el bloque se deslice tanto para arriba como para abajo, el intervalo de variación de la velocidad será:

$$\sqrt{\frac{gR(\text{sen}\theta - \mu_e \cos\theta)}{\cos\theta + \mu_e \text{sen}\theta}} < v < \sqrt{\frac{gR(\mu_e \cos\theta + \text{sen}\theta)}{\cos\theta - \mu_e \text{sen}\theta}}$$

Parte (b) $v_{mínima} = 0$

$$\Rightarrow \quad gR\,\text{sen}\theta - 0R\,\mu_e \cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad \mu_e = \tan\theta$$

En consecuencia: $\mu_e = \tan\theta$

Parte (c) $R = 100$ m $\quad \theta = 10° \quad \mu = 0{,}10 \quad$ sen 10° ≈ 0,160; cos 10° ≈ 0,988

$$\Rightarrow \quad v_{mínimo} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(100)[0{,}160 - (0{,}1)(0{,}988)]}{0{,}988 + (0{,}1)(0{,}160)}} \approx 7{,}733 \text{ m/s}$$

$$v_{máximo} = \sqrt{\frac{(9{,}81)(100)[(0{,}1)(0{,}988) + 0{,}160]}{0{,}988 - (0{,}1)(0{,}160)}} = 16{,}16 \text{ m/s}$$

43. Un avión a escala de 0,75 kg de masa vuela en un círculo horizontal en el extremo de un alambre de control de 60 m, con una velocidad de 35 m/s. Calcule la tensión en el alambre si éste forma un ángulo constante de 20° con la horizontal. Las fuerzas ejercidas sobre el avión son la tensión hacia el centro del alambre de control, su propio peso y la sustentación aerodinámica, la cual actúa en 20° hacia adentro desde la vertical, como se muestra en la figura P6.43.

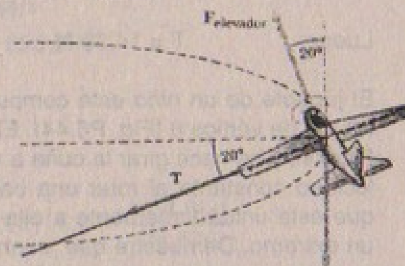
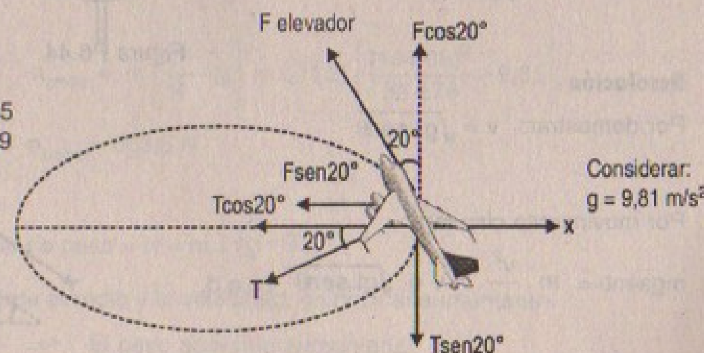


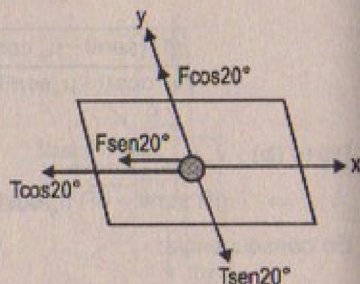
Figura P6.43

Resolución :

sen20° ≈ 0,345
cos20° ≈ 0,939



Considerar: $g = 9{,}81$ m/s²



Datos: Masa del avión = 0,75 kg
Velocidad del avión = 35 m/s
Longitud del alambre = 60 m

Según el plano horizontal

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F\cos 20° = T\operatorname{sen}20° \quad \therefore \quad F = T\tan 20°$

$\Sigma F_x = m.\dfrac{v^2}{R} \Rightarrow T\cos 20° + F\operatorname{sen}20° = \dfrac{m}{R}\cdot v^2_{avión}$

$\Rightarrow T\cos 20° + T\tan 20° \cdot \operatorname{sen}20° = \dfrac{m}{R} v^2_{avión}$

$\Rightarrow T = \left[\cos 20° + \dfrac{\operatorname{sen}^2 20°}{\cos 20°}\right] = \dfrac{m}{R} v^2_{avión}$

$\therefore \quad T = \dfrac{M_{avión} \times v^2_{avión} \times \cos 20°}{R} = \dfrac{(0.75)(35)^2(0.939)}{60}$

Luego: $T = 14{,}38$ N

44. El juguete de un niño está compuesto de una pequeña cuña que tiene un ángulo agudo de vértice θ (Fig. P6.44). El lado de la pendiente de la cuña no presenta fricción, y se hace girar la cuña a velocidad constante al rotar una barra que está unida firmemente a ella en un extremo. Demuestre que, cuando la masa m asciende por la cuña una distancia L, la velocidad de la masa es

$$v = \sqrt{gL\operatorname{sen}\theta}$$

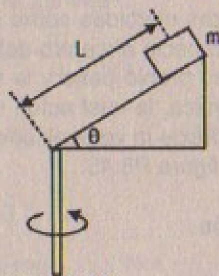
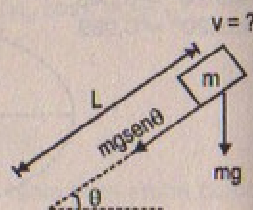


Figura P6.44

Resolución:

Por demostrar: $v = \sqrt{gL\operatorname{sen}\theta}$

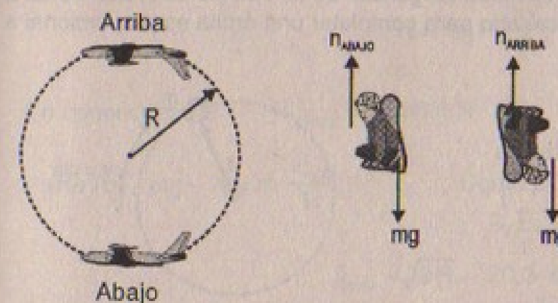


Por movimiento circular:

$mg\operatorname{sen}\theta = m.\dfrac{v^2}{L} \quad \therefore v = \sqrt{gL\operatorname{sen}\theta}$ l.q.q.d.

45. El piloto de un avión ejecuta una pirueta de giro completo a velocidad constante en un plano vertical. La velocidad del avión es de 300 mi/h y el radio del círculo es de 1 200 pies. a) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo si su peso real es 160 lb? b) ¿Cuál es su peso aparente en el punto más alto? c) Describa cómo podría experimentar falta de peso el piloto si se variara tanto el radio como la velocidad. (Nota: Su peso aparente es igual a la fuerza que el asiento ejerce sobre su cuerpo.)

Resolución:



Considerar:
$g = 9{,}81$ m/s²

Sabemos: $R = 1\ 200$ pies $= 36\ 576$ m
$v_{avión} = 300$ m/h $= 134{,}08$ m/s
Peso $= 71{,}2$ kg × (9,81) = 698,5 N

Parte (a) $n_{abajo} - mg = \dfrac{m.v^2}{R}$

$\Rightarrow n_{abajo} = m\left[g + \dfrac{v^2}{R}\right] = (71{,}2)\left[9{,}81 + \dfrac{(134{,}08)^2}{36\ 576}\right]$

$n_{abajo} = 733{,}5$ N

Parte (b) $n_{arriba} + mg = m.\dfrac{v^2}{R}$

$\Rightarrow n_{arriba} = m\left[\dfrac{v^2}{R} - g\right] = (71{,}2)\left[\dfrac{(134{,}08)^2}{36\ 576} - 9{,}81\right]$

$\therefore \quad n_{arriba} = 663{,}5$ N

Parte (c) Falta de peso $= N = m\left[\dfrac{v^2}{R} - g\right]$

- Si se variara el radio y la velocidad, es decir si aumentaran.

$\Rightarrow$ El peso aparente aumentaría.

- Si se variara el radio y la velocidad, es decir si disminuirían.

$\Rightarrow$ El peso aparente disminuiría

En conclusión: Si el peso aparente aumenta

$\Rightarrow$ Peso del piloto disminuye, sería menor.

46. Para que un satélite se mueva en una órbita circular estable a velocidad constante, su aceleración centrípeta debe ser inversamente proporcional al cuadrado del radio r de la órbita. a) Muestre que la velocidad tangencial de un satélite es proporcional a $r^{-1/2}$. b) Muestre que el tiempo necesario para completar una órbita es proporcional a $r^{3/2}$.

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que

$$F_c = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow a_{cp} = \left(\frac{1}{r}\right)\underbrace{(k)}_{\text{constante}} = \frac{1}{r}v^2$$

Por dato: $a_{cp} = \frac{1}{r^2}.v^2$

$$v_T = |v| \Rightarrow \frac{1}{r^2}.k = \frac{1}{r}.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{k} \times r^{-1/2}$$

Parte (b)

Sabemos que: $vT = 2\pi r \Rightarrow T = \frac{2\pi . r}{v} = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right).\frac{r}{r^{-1/2}}$

$\therefore \quad T = cte \times r^{3/2}$

47. Un carro de 1 800 kg pasa sobre un montículo en un camino que sigue el arco de un círculo de radio de 42 m, como muestra la figura P6.47. a) ¿Qué fuerza debe ejercer el camino sobre el carro para que éste pase el punto más alto del montículo si viaja a 16 m/s? b) ¿Cuál es la velocidad máxima que el carro puede alcanzar cuando pasa por el punto más alto antes de perder contacto con el camino?

47A. Un carro de masa m pasa sobre un montículo en un camino que sigue el arco de un círculo de radio R, como muestra la figura P6.47. a) ¿Qué fuerza debe ejercer el camino sobre el carro para que éste pase el punto más alto del montículo si viaja a una velocidad v? b) ¿Cuál es la velocidad máxima que el carro puede alcanzar cuando pasa por el punto más alto antes de perder contacto con el camino?

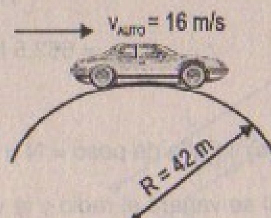


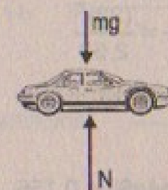
Figura P6-47

Resolución:

M_{carro} = 1 800 kg

Considerar: g = 9,81 m/s²

Parte (a)



$$\Sigma F_R = m.a_{cp}$$

$$\Rightarrow \quad mg - N = m.\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore \quad N = mg - \frac{mv^2}{R} = (1\,800)(9{,}81) - \frac{(1800)(16)^2}{42}$$

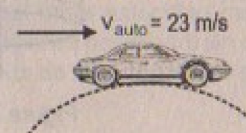
En consecuencia: F_{normal} = 6 686,6 N

Parte (b) $mg - N = m\frac{v^2_{máx}}{R}$ Como pierde contacto con el piso $\Rightarrow N = 0$

$$\therefore \quad v_{máx} = \sqrt{9R} \approx 20{,}3 \text{ m/s}$$

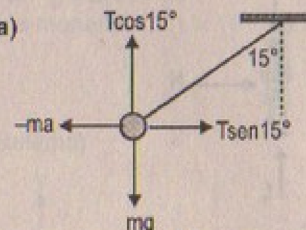
48. Una estudiante construye y calibra un acelerómetro con el cual determina la velocidad de su carro alrededor de cierta curva de una autopista. El acelerómetro es una plomada con un transportador que la estudiante une al techo del carro. Un amigo que viaja en el carro con ella observa que la plomada cuelga a un ángulo de 15,0° respecto de la vertical cuando el carro tiene una velocidad de 23,0 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del carro al recorrer la curva? b) ¿Cuál es el radio de la curva? c) ¿Cuál es la velocidad del carro si la desviación de la plomada es de 9,0° mientras recorre la misma curva?

Resolución:



Considerar: g = 9,81 m/s²
sen15° = 0,259
cos15° = 0,966
tan15° ≈ 0,268
tan9° = 0,1579

Parte (a)



(Para un observador dentro del auto) observador no inercial.

$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos 15° = mg \quad \ldots (1)$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}15° - ma = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}15° = ma \ldots (2)$

(2) ÷ (1) $a_{cp} = g\tan 15°$

$\therefore$ $a_{cp} = (9,81)(0,268) = 2,63\ m/s^2$

Parte (b)

Sabemos que: $a_{cp} = \dfrac{v^2}{R} \Rightarrow$ Radio $= \dfrac{v^2}{a_{cp}} = \dfrac{(23)^2}{2,63}$

$\therefore$ Radio = 201,14 m

Parte (c)

Sabemos que: $a_{cp} = g\tan\theta$ $\quad$ $\text{sen}9° \approx 0,156$

$\Rightarrow a_{cp} = \dfrac{v^2}{R} = g\tan 9°$ $\quad$ $\cos 9° \approx 0,988$

$\tan 9° \approx 0,1579$

$$\Rightarrow v = \sqrt{(R)(g)\tan 9°} = \sqrt{(201,14)(9,81)(0,1579)}$$

$\therefore$ v = 17,65 m/s

49. Un juego de un parque de diversiones se compone de un gran cilindro vertical que gira en torno a su eje lo suficientemente rápido para que cualquier persona en su interior se mantenga contra la pared cuando se quita el piso (Fig. P6.49). El coeficiente de fricción estático entre la persona y la pared es μ_e, y el radio del cilindro es R. a) Muestre que el periodo de revolución máximo para evitar que la persona caiga es $T = (4\pi^2 R\mu_e/g)^{1/2}$. b) Obtenga un valor numérico para T si R = 4,00 m y μ_e = 0,400. ¿Cuántas revoluciones por minuto efectúa el cilindro?

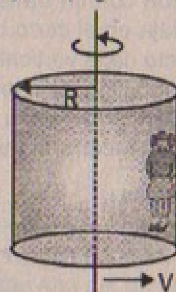
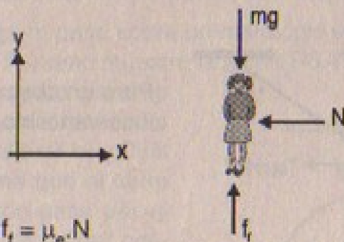


Figura P6.49

Resolución:

Parte (a)

$$N = \frac{m.v^2}{R}$$



Además: $mg = f_f = \mu_e.N$

$$\Rightarrow \mu_e\left(\frac{mv^2}{R}\right) = mg \ \therefore\ v = \sqrt{gR/\mu_e}$$

Por otro lado: $v = \omega.R \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R\sqrt{\mu_e}}{\sqrt{gR}}$$

Haciendo artificios: $\dfrac{2\pi R\,.\,\mu_e^{1/2}(gR)^{1/2}}{gR} = \dfrac{(4\pi^2)^{1/2}\,.\,\mu_e^{1/2}\,.\,R^{1/2}}{g}$

$$\Rightarrow T = (4\pi^2\mu_e.R/g)^{1/2}$$

Parte (b)

Si: R = 4,00 m $\quad \mu_e = 0,400 \quad g = 9,81\ m/s^2$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4(3{,}1416)^2(4)(0{,}4)}{(9{,}81)}} = 2{,}54\ s$$

$$\frac{\text{Revoluciones}}{\text{Minuto}} = \frac{1}{T} = f = \frac{1}{2{,}54\ s} \times \frac{1\ m}{60\ s}$$

$\therefore$ f = 23,62 rev/min

50. Una moneda de 3,1 g descansa sobre un pequeño bloque de 20,0 g soportado por un disco giratorio (Fig. P6.50). Si los coeficientes de fricción entre el bloque y el disco son 0,75 (estático) y 0,64 (cinético), en tanto que para la moneda y el bloque son 0,45 (cinético) y 0,52 (estático), ¿cuál es la velocidad máxima del disco en revoluciones por minuto sin que el bloque o la moneda se deslicen sobre el disco?

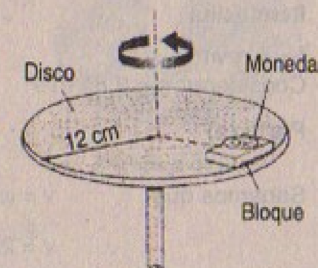


Figura P6.50

Resolución:

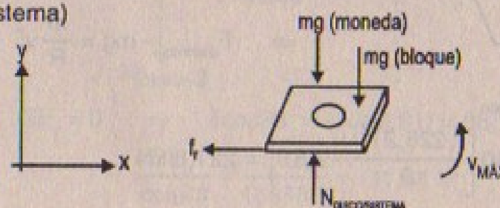
Considerar: $g = 9,81\ m/s^2$

Masa de la moneda = $3,1 \times 10^{-3}$ kg ; Masa del bloque = 20×10^{-3} kg

$f_r = \mu_e.N$; $\mu_e = 0,74$; $\mu_k = 0,64$

$\mu_e = 0,52$; $\mu_k = 0,45$ moneda y bloque

D.C.L. (sistema)



$$\Sigma F_x = M_{total}\frac{v_{máx}^2}{R} \Rightarrow f_{fmáx} = \mu_e . N = \frac{(M_{mon.} + M_{bloque})\ v_{máx}^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{disco/s} = (M_{mon} + M_{bloque})\ g$$

Luego: $$\mu_e(M_{mon} + M_{bloque})\ (g) = \frac{(M_{mon.} + M_{bloque})\ v_{máx}^2}{R}$$

$$\Rightarrow V_{máx} = \sqrt{\mu_e . gR} \qquad \therefore\ v_{máx} = 0{,}93\ m/s$$

51. La figura P6.51 muestra una rueda de la fortuna que gira cuatro veces cada minuto y tiene un diámetro de 18,0 m. a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un pasajero? ¿Qué fuerza ejerce el asiento sobre un pasajero de 40,0 kg, b) en el punto más bajo del viaje, y c) en el punto más alto? d) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el asiento sobre un viajero cuando éste se encuentra la mitad entre los puntos más alto y más bajo?

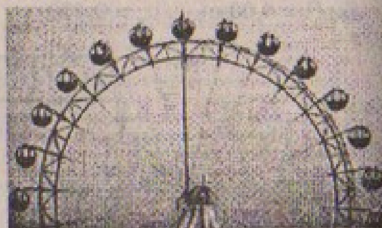


Figura P6.51 (Color Box/FP6)

Resolución:

f = 4 rev/min
Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (a)

Sabemos que $$v = \omega.R = \frac{2\pi}{T}.R = 2\pi R.f \Rightarrow v = 2\pi\left(\frac{18}{2}\right)(4)$$

$$\therefore\ v = 226{,}2\ m/s$$

Luego: $$a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R} = \frac{(226{,}2)^2}{9} = 5\ 685{,}16\ m/s^2$$

Parte (b)
Pasajero de 40 kg en el punto más bajo

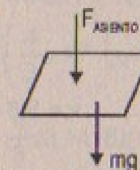
mg, $F_{ASIENTO}$

$$\Sigma F_R = m . \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow F_{asiento} - mg = \frac{m}{R}v^2$$

$$\therefore\ F_{asiento} = 40\left[\frac{(226{,}2)^2}{9} + 9{,}81\right] = 227{,}8\ kN$$

Parte (c)

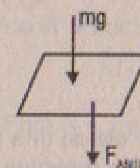


$$\Sigma F_R = F_{asiento} + mg = m . \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow F_{asiento} = m\left[\frac{v^2}{R} - g\right]$$

$$\therefore\ F_{asiento} \approx 227\ kN$$

Parte (d)



$$\Rightarrow F_{asiento} = mg = 40(9{,}81) = 392{,}4\ N$$

52. Un juego de un parque de diversiones se compone de una plataforma circular giratoria de 8,00 m de diámetro desde la cual se suspenden asientos de 10,0 kg en el extremo de cadenas de 2,50 m sin masa (Fig. P6.52). Cuando el sistema gira, las cadenas forman un ángulo $\theta = 28{,}0°$ con la vertical. a) ¿Cuál es la velocidad de cada asiento? b) Si un niño de 40 kg de masa ocupa un asiento, ¿cuál es la tensión en la cadena?

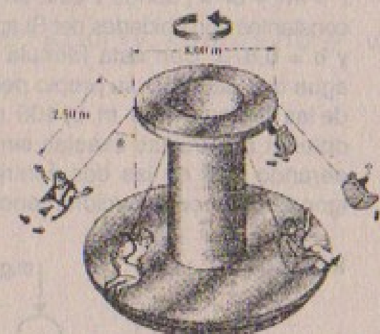
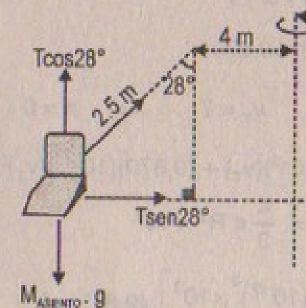


Figura P6.52

Resolución:

$g = 9{,}81\ m/s^2$; $M_{asiento} = 10\ kg$; $\theta = 28°$
sen28 = 0,4634
cos28 = 0,8885

Parte (a)



R = (2,5 + 4) = 6,5 m

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos 28° = (10)(9{,}81) = 98{,}1\ N$$

$$\therefore\ T = \frac{98{,}1}{\cos 28} = \frac{98{,}1}{0{,}8885} = 111{,}04\ N$$

Por otro lado: $T\text{sen}28° = M_{asiento} \cdot \frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow \frac{(111{,}04)(0{,}4684)(6{,}5)}{10} = v^2 \qquad \therefore v = 5.8 \text{ m/s}$$

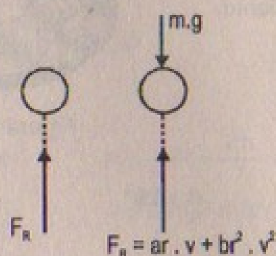
Parte (b)
Ahora se incluye la masa del niño = 40 kg

$$\Rightarrow \quad T\cos 28° = (M_{niño} + M_{asiento})\, g$$

$$\therefore \quad T = \frac{(40+10)(9{,}81)}{0{,}8835} \quad \Rightarrow \quad T = 555{,}18 \text{ N}$$

53. Una corriente de aire que se mueve a una velocidad v ejerce una fuerza resistiva sobre una esfera de radio r. La magnitud de la fuerza resistiva (en newtons) es $F = arv + br^2v^2$, donde v está en metros por segundo, r se mide en metros, a y b son constantes con unidades del SI apropiadas. Sus valores numéricos son $a = 3{,}10 \times 10^{-4}$ y b = 0,870. Con esta fórmula encuentre la velocidad terminal para las gotas de agua que caen por su propio peso en el aire, tomando estos valores para los radios de las gotas: a) 10,0 m, b) 100 m, y c) 1,00 mm. Advierta que para a) y c) se pueden obtener respuestas exactas sin tener que resolver una ecuación cuadrática considerando cuál de las dos contribuciones a la resistencia del aire es dominante e ignorando la contribución menor.

Resolución :



Considerar: $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$
$1\ u = 10^{-6}$
$\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Datos $a = 3{,}10 \times 10^{-4}$; $b = 0{,}870$

Parte (a) Para R = 10 m $\quad v_T = ? \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Luego: $mg = (3{,}1 \times 10^{-4})(10^{-5})(v_T) + (0{,}870)(10^{-10})(v_T)^2 = A$

Pero: $m_{gota} = V_{gota} \times \rho_{gota} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 10^3$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{4}{3}(3{,}1416)\left(10^{-5}\right)^3 \times 10^3\right](9{,}81) = A$$

Entonces: $41{,}1 \times 10^{-12} = 87 \times 10^{-12} \cdot V_T^2$

$$\therefore \quad v_T = \sqrt{(41{,}1)/87} \approx 0{,}47 \text{ m/s}$$

Parte (b) Para $R = 10^2$ um $= 10^{-4}$ m

Luego: $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \times 10^3 \times 9{,}81 = (3{,}1 \times 10^{-4})(10^{-4})v_T + 0{,}870 \times (10^{-4})^2\, v_T^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}(3{,}1416)(10^{-4})^3 \times [10^3 \times 9{,}81] = 3.1 \times 10^{-8}\, v_T + 0{,}870 \times 10^{-8}\, v_T^2$$

$$411 \times 10^{-8} = 3{,}1 \times 10^{-8}\, v_T + 0{,}870 \times 10^{-8}\, v_T^2$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}870\, v_T^2 + 3{,}1\, v_T - 411 = 0$$

Desarrollando la ecuación cuadrática resulta que:

$$v_T = 20{,}06 \text{ m/s}$$

Parte (c) Para R = 1 mm = 10^{-1} cm = 10^{-3} m

Luego:

$$\frac{4}{3}(3{,}1416)(10^{-3})^3 \times 10^3 \times 9{,}81 = 3{,}1 \times 10^{-4} \times (10)^{-3}\, v_T + 0{,}870 \times (10^{-3})^2 \cdot v_T^2$$

$$\Rightarrow \quad 41 \times 10^{-6} = 0{,}8 \times 10^{-6}\, v_T^2$$

$$\therefore \quad v_T = \sqrt{\frac{41}{0{,}8}} \approx 7{,}16 \text{ m/s}$$

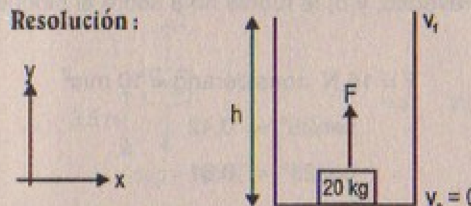
Capítulo 7

TRABAJO Y ENERGÍA

TRABAJO HECHO POR UNA FUERZA CONSTANTE

1. Si una persona saca de un pozo una cubeta de 20 kg y realiza 6,00 kJ de trabajo, ¿cuál es la profundidad del pozo? Suponga que la velocidad de la cubeta permanece constante cuando se levanta.

Resolución :



Considerar $g = 9{,}81\ m/s^2$

Por dato: $W_F = 6{,}00\ kJ$

Sabemos que $W_F = \Delta E_k = \frac{1}{2}\,m(v_f^2 - v_i^2)$

$$\Rightarrow \quad 6{,}00\ kJ = \frac{1}{2}(20\ kg)\,(v_f^2 - v_i^2) \qquad \ldots (1)$$

Por caída libre:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh \ \Rightarrow \quad v_f^2 - v_i^2 = 2gh \qquad \ldots (2)$$

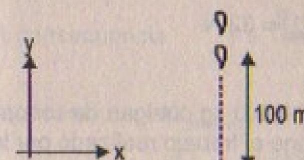
(2) en (1)

Resulta que: $6 \times 10^3\ J = \frac{1}{2}(20\ kg)\,(2 \times 9{,}81\ m/s^2)(h)$

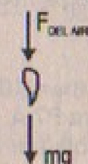
$$\therefore \quad h = 30{,}6\ m$$

2. Una gota de lluvia ($m = 3{,}35 \times 10^{-5}$ kg) cae verticalmente a velocidad constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Después de que la gota ha descendido 100 m, ¿cuál es a) el trabajo realizado por la gravedad y b) la energía disipada por la resistencia del aire?

Resolución :



D.C.L. (gota)



$m_{gota} = 3{,}35 \times 10^{-5}$ kg

$g = 10\ m/s^2$

Parte (a)

$$Wg = mgh = (3{,}35 \times 10^{-5}\ kg)(9{,}81\ m/s^2)(100\ m)$$

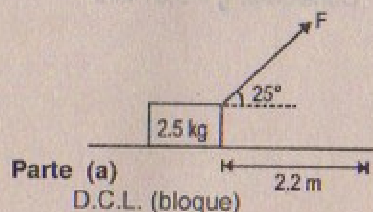
$$\therefore \quad Wg = 32{,}8635\ mJ$$

Parte (b)

$$\text{Energía disipada} = -Wg = -32{,}8635\ mJ$$

3. Un bloque de 2,5 kg de masa es empujado 2,2 m a lo largo de una mesa horizontal sin fricción por una fuerza constante de 16,0 N dirigida a 25° debajo de la horizontal. Encuentre el trabajo efectuado por: a) la fuerza aplicada, b) la fuerza normal ejercida por la mesa, c) la fuerza de la gravedad, y d) la fuerza neta sobre el bloque.

Resolución:

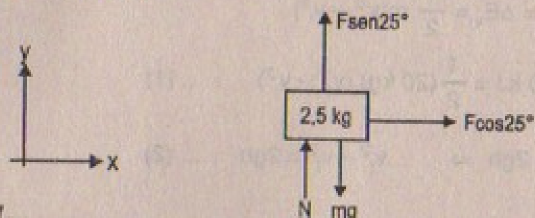


F = 16 N considerar g = 10 m/s²

$\text{sen}25° = 0{,}42$

$\cos 25° = 0{,}91$

Parte (a)
D.C.L. (bloque)



- W_{Fx}
$F\cos 25° \times (d) = 16\cos 25° \times (2{,}2) = 16\,(0{,}91)(2{,}2) = 32\ N$
- W_{Fy}
$F\text{sen}25° \times (d) = 0$

$$\therefore \quad W_F = 32\ N$$

Parte (b) Sabemos que: N ⊥ desplazamiento ∴ $W_N = 0$

Parte (c) Sabemos que: mg ⊥ desplazamiento ∴ $W_P = 0$

Parte (d) El trabajo de la fuerza neta será $W_{total} = 32\ N$

4. Dos bolas que tienen masas $m_1 = 10{,}0$ kg y $m_2 = 8{,}0$ kg cuelgan de una polea sin fricción, como muestra la figura P7.4. a) Determine el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre cada bola por separado cuando la de 10,0 kg de masa se desplaza 0,50 m hacia abajo. b) ¿Cuál es el trabajo total realizado por cada bola, incluido el efectuado por la fuerza de la cuerda? c) Redacte un comentario acerca de cualquier relación que haya descubierto entre estas cantidades.

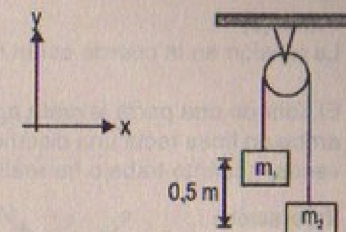
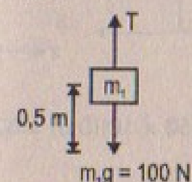


Figura P7.4

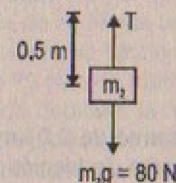
Resolución:

Considerar g = 10 m/s² ; $m_1 = 10$ kg
$m_2 = 8$ kg

Parte (a)



$$\Rightarrow \quad W_{P_1} = m_1 \cdot g\,(d) = (10)(10)(0{,}5) = 50\ J$$



$$\Rightarrow \quad W_{P_2} = m_2 \cdot g\,(d) = -(0{,}5)(8)(10) = -40\ J$$

Parte (b)

Como $m_1 > m_2$

$$\Rightarrow \quad T - m_2 g = m_2 a \ \dots (1)$$

$$m_1 g - T = m_1 a \ \dots (2)$$

Sumando (1) + (2)

Resulta que $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$ ... (3)

(3) en (1)

$$\Rightarrow \quad T = m_2\left[\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}g + g\right] \qquad \therefore \quad T = \frac{2\,m_1 m_2\,g}{m_1 + m_2}$$

En consecuencia $\quad T = \dfrac{2 \times (10)(8)(10)}{18} = 88{,}9\ N$

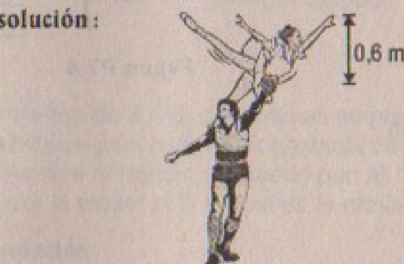
Entonces: $\quad W_{total\ m_1} = (100 - 88{,}9)(0{,}5) = 5{,}55\ J$

$$W_{total\ m_2} = (88{,}9 - 80)(0{,}5) = 4{,}45\ J$$

Parte (c)
La tensión en la cuerda están netamente relacionado con las masas.

5. El líder de una porra levanta a su compañera quien tiene un peso de 50,0 kg hacia arriba en línea recta una distancia de 0,60 m antes de soltarla. Si hace lo anterior 20 veces, ¿cuánto trabajo ha realizado?

Resolución:



Considerar $g = 10\ m/s^2$

$m_c = 50\ kg$

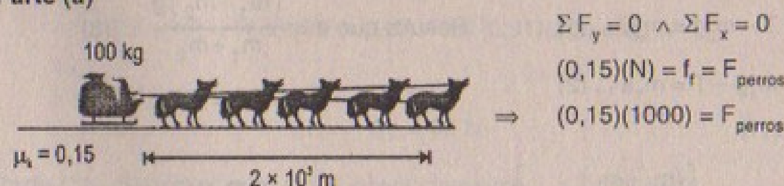
$\Rightarrow\ W_N = N \times (d) = (50 \times 10)(0,6) = 300\ J$

Luego si realiza esto por 20 veces entonces

$$W_{total} = 20\ (300) = 6\ 000\ J = 6\ kJ$$

6. Un grupo de perros arrastra un trineo de 100 kg en un tramo de 2,0 km sobre una superficie horizontal a velocidad constante. Si el coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es 0,15, determine a) el trabajo efectuado por los perros y b) la energía perdida debido a la fricción.

Resolución:
Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \wedge \Sigma F_x = 0$

$(0,15)(N) = f_r = F_{perros}$

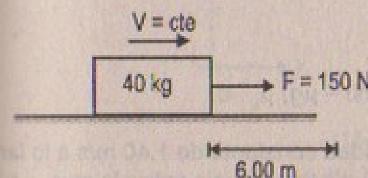
$\Rightarrow\ (0,15)(1000) = F_{perros}$

Luego: $W_F = (0,15)(10^3)(2 \times 10^3) = 3 \times 10^5\ J$

Parte (b) ΔE_k (fricción) $= -3 \times 10^5\ J$

7. Con una fuerza horizontal de 150 N se empuja una caja de 40,0 kg, 6,00 m sobre una superficie horizontal rugosa. Si la caja se mueve a velocidad constante, encuentre a) el trabajo realizado por la fuerza de 150 N, b) la energía cinética perdida debido a la fricción, y c) el coeficiente de fricción cinética.

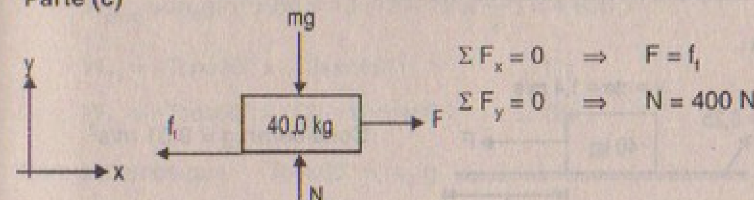
Resolución:



Parte (a)
$W_F = (150)(6) = 900\ J$

Parte (b)
$f_r = F = 150\ N$
$Wf_r = (-150)(6) = -900\ J = \Delta E_k =$ Energía perdida

Parte (c)



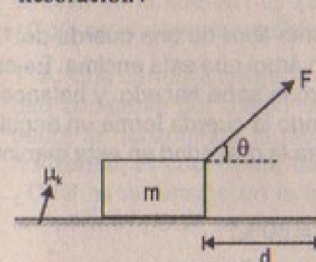
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = f_r$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = 400\ N$

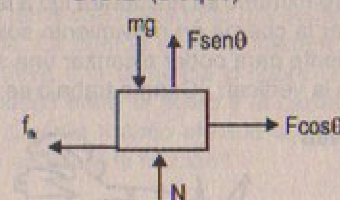
Luego $f_r = \mu_k \cdot N = 150$ $\quad\therefore\quad \mu_k = \dfrac{150}{400} = 0,38$

8. Un bloque de 15 kg es arrastrado sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza de 70 N que actúa a 20° sobre la horizontal. El bloque se desplaza 5,0 m y el coeficiente de fricción cinético es 0,30. Determine el trabajo realizado por a) la fuerza de 70 N, b) la fuerza normal, y c) la fuerza de la gravedad. d) ¿Cuál es la energía perdida debido a la fricción?
8A. Un bloque de masa *m* es arrastrado sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza *F* que actúa a un ángulo θ sobre la horizontal. El bloque se desplaza una distancia *d* y el coeficiente de fricción cinético es μ_k determine el trabajo realizado por: a) la fuerza *F*, b) la fuerza normal, y c) la fuerza de la gravedad. d) ¿Cuál es la energía perdida debido a la fricción?

Resolución:



Parte (a)
D.C.L. (bloque)



$\Rightarrow\ W_{F_x} = F\cos\theta \times d$

$W_{F_y} = F\operatorname{sen}\theta \times d = 0$

$\therefore\ W_F = F\cos\theta \times d$

Parte (b) Como N es ⊥ d $\Rightarrow\ W_N = 0$

Parte (c) Como mg es ⊥ d ⇒ $W_{PESO} = 0$

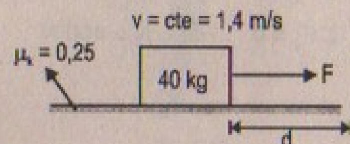
Parte (d) $W_{f_f} = -f_{fk} \times (d) = \Delta E_k$

Pero: $f_f = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot (mg \cdot F\text{sen}\theta)$

$\therefore \quad \Delta E_k$ = energía perdida = $(F\text{sen}\theta - \mu g)\,\mu_k \cdot d$

9. Si usted empuja una caja de 40 kg a una velocidad constante de 1,40 m/s a lo largo de un piso horizontal ($\mu_k = 0,25$), ¿a qué tasa a) efectúa trabajo sobre la caja, y b) la energía es disipada por la fuerza de fricción?

Resolución :



Considerar: $g = 9,81\ m/s^2$

Parte (a)

f_f [40 kg] → F

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad F = f_f = \mu_k\ N = (0,25)(40)(9,81)$$

$$\therefore \quad F = 98,1\ N$$

Luego: $W = F \cdot d = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2}(40)(1,4)^2$

$\therefore \quad W_F = W_{\text{fricción}} = 39,2$ joules

Entonces: Potencia = $98,1 \times (1,4) = 137$ watts

Parte (b) $W = \Delta E_k = \frac{1}{2}(40)\,(1,4)^2 = 39,2$ joules

10. Batman, cuya masa es de 80 kg, cuelga del extremo libre de una cuerda de 12 m, cuyo otro extremo se encuentra fijo a la rama de un árbol que está encima. Es capaz de poner la cuerda en movimiento sólo como Batman sabe hacerlo, y balancearse lo suficiente para poder alcanzar una saliente cuando la cuerda forma un ángulo de 60° con la vertical. ¿Cuánto trabajo se realizó contra la gravedad en esta maniobra?

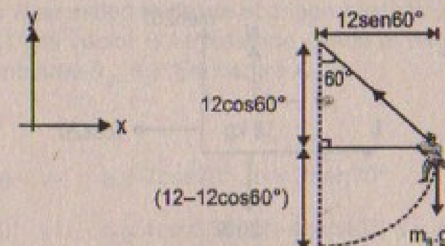
Resolución :



$m_{bat} = 80$ kg

$L_{cuerda} = 12$ m

$g = 10\ m/s^2$



$$W_{peso} = m_B g(h) = 80 \times 10\,(12 - 12 \times \frac{1}{2}) = 4\,800\ J$$

$$W_{T_x} = -T\cos 30° \times (12\text{sen}60°) \quad \ldots (1)$$

$$W_{T_y} = -T\cos 60° \times (12 - 12\cos 60°) \quad \ldots (2)$$

Pero sabemos que: $T\cos 60° = m_B\, g$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{800}{\frac{1}{2}} = 1\,600\ N$$

Luego: $W_{T_x} = -1\,600 = -14\,400\ J$

$W_{T_y} = -1\,600 = -4\,800\ J$

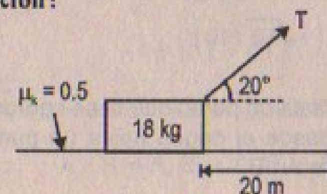
$$\therefore \quad W_{total} = W_{\text{en contra de g}} = \sqrt{(-14\,400)^2 + (-4\,800)^2}$$

$$\therefore \quad W_{total}\,(T) = 4\,800\sqrt{10} \approx 15\,179\ J$$

11. Una carretilla cargada con ladrillos tiene una masa total de 18 kg y se jala con velocidad constante por medio de una cuerda. La cuerda está inclinada a 20,0° sobre la horizontal y la carretilla se mueve 20,0 m sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el suelo y la carretilla es 0,500. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? b) ¿Cuánto trabajo efectúa la cuerda sobre la carretilla? c) ¿Cuál es la energía perdida debido a la fricción?

11A. Una carretilla cargada con ladrillos tiene una masa total *m* y se jala con velocidad constante por medio de una cuerda. La cuerda está inclinada a un ángulo θ sobre la horizontal y la carretilla se mueve una distancia *d* sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el suelo y la carretilla es μ_c. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? b) ¿Cuánto trabajo efectúa la cuerda sobre la carretilla c) ¿Cuál es la energía perdida debido a la fricción?

Resolución :



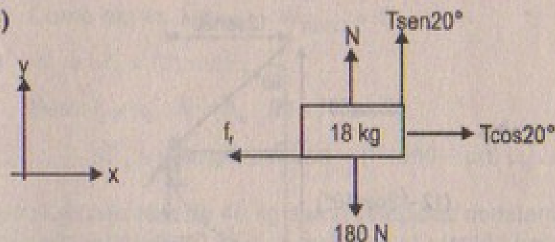
Considerar:

$g = 10\ m/s^2$

$\text{sen}20° \approx 0,354$

$\cos 20° \approx 0,935$

Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Tsen20° + N - 180 = 0 \quad \therefore \quad N = 180 - Tsen20°$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Tcos20° - f_r = 0 \quad \Rightarrow \quad Tcos20° = (0,5)(180 - Tsen20°)$

$$\therefore \quad T = \frac{90}{\left[\cos 20° + \frac{sen\ 20°}{2}\right]} = \frac{90}{\left(0,935 + \frac{0,354}{2}\right)} = 80,94\ N$$

Parte (b)

Luego: $\quad W_{TENSIÓN} = W_{CUERDA} = 80,94 \times (0,935)(20) = 1\ 513,5\ j$

Parte (c) $\quad \Delta E_k$ = Energía disipada = (–80,94)(20) = –1 513,5 J

EL PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

12. Para $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j}$, encuentre a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$, y b) el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Resolución:

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} \qquad \vec{B} = -1\hat{i} + 3\hat{j}$$

Parte (a) $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$

Además: $\quad (4\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + 3\hat{j}) = +5$

Parte (b) $\quad -5 = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$

$$|\vec{A}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad +5 = 5 \times \sqrt{10} \cos\theta \quad \therefore \quad \cos\theta = +\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \quad \theta = \text{arc cos}\left(+\sqrt{10}/10\right)$$

13. El vector A se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (7; 70°) y el vector B se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (4; 130°). Encuentre A . B.

13A. El vector A se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (r_1, θ_1) y el vector B se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares (r_2, θ_2). Encuentre A . B.

Resolución: 13

Sea $\vec{A} = (a; b) \quad \Rightarrow \quad a = 7\cos70°,\ b = 7sen70°$

Sea $\vec{B} = (c; d) \quad \Rightarrow \quad c = 4\cos130° = -4sen40°,\ d = 4\cos40°$

Entonces: $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = (7\cos70°\ \hat{i} + 7sen70°\ \hat{j}) \cdot (-4sen40°\hat{i} + 4\cos40°\hat{j})$

$$28sen40° \cdot \cos70° - 28sen70° \cdot \cos40° = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

luego: $\quad +28\,[sen70° \cdot \cos40° - \cos70° \cdot sen40°] = +28\,[sen(70° - 40°)]$

$$\therefore \quad -28sen30° = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Luego: $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = +28 \times \frac{1}{2} = +14$

14. El vector A tiene una magnitud de 5,00 unidades y B tiene una magnitud de 9,00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50,0° entre sí. Determine A . B.

Resolución:

$|\vec{A}| = 5\ u \quad ; \quad |\vec{B}| = 9\ u \quad ; \quad sen40° \approx 0,661$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos50° = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|\ sen40°$$

Luego: $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \times 9 \times 0,661 = 29,75\ u$

15. Muestre que $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. (*Sugerencia*: Escriba $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en forma de vectores unitarios y utilice las ecuaciones 7.4 y 7.5).

Resolución:

Por demostrar que: $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$

Sea: $\quad \vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k},\ \vec{B} = d\hat{i} + e\hat{j} + f\hat{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) \cdot (d\hat{i} + e\hat{j} + f\hat{k})$$

$$= ad\hat{i}^2 + ae\,\hat{i}\,\hat{j} + af\,\hat{i}\,\hat{k} + bd\,\hat{i}\,\hat{j} + be\,\hat{j}^2 + bf\,\hat{j}\,\hat{k} + cd\,\hat{i}\,\hat{k}$$

$$+ ce\,\hat{k}\,\hat{j} + cf\,\hat{k}^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ad\,\hat{i}\,\hat{j} + be\,\hat{i}\,\hat{j} + cf\,\hat{k}.\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \text{l.q.q.d.}$$

16. Para $A = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$, y $\vec{C} = 2\hat{j} - 3\hat{k}$, encuentre $\vec{C} \cdot (\vec{A} - \vec{B})$.

Resolución:

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ $\quad\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ $\quad\vec{C} = 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$

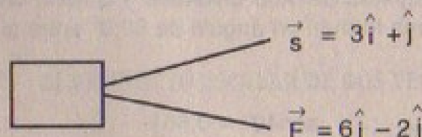
Luego: $\vec{C} \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = (0\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})(2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k})$

$= 0 - 2 + 18 = 16$

$\therefore \quad C \cdot (A - B) = 16$

17. Una fuerza $\vec{F} = (6\hat{i} - 2\hat{j})$ N actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $\vec{s} = (3\hat{i} + \hat{j})$ m. Encuentre a) el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, y b) el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$.

Resolución:



Parte (a) $\quad W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = (6\hat{i} - 2\hat{j})(3\hat{i} + \hat{j}) = 18 - 2 = 16\,J$

Parte (b) $\quad \vec{F} \cdot \vec{d} = |F||d|\cos\theta$

$|\vec{F}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad 16 = (2\sqrt{10})(\sqrt{10})\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = 4/5$

Luego $\quad \theta = \cos^{-1}(+4/5) = 37°$

18. El vector A tiene 2,0 unidades de largo y apunta en la dirección y positiva. El vector B tiene una componente x negativa de 5,0 unidades de largo, una componente y positiva de 3 unidades de largo y no tiene componente z. Encuentre A . B y el ángulo entre los dos vectores.

Resolución:

$|\vec{A}| = 20$ u. $\quad \Rightarrow \quad \vec{A} = 0\hat{i} + a\hat{j}$

$\vec{B} = -5\hat{i} + 3\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$

$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos\theta$

$\Rightarrow \quad (0\hat{i} + a\hat{j})(-5\hat{j} + 3\hat{j}) = 20 \times \sqrt{34}\cos\theta$

pero $\quad \sqrt{a^2} = 20 \quad \therefore \quad a = 20$

luego: $\quad (0\hat{i} + 20\hat{j})(-5\hat{i} + 3\hat{j}) = 20\sqrt{34}\cos\theta$

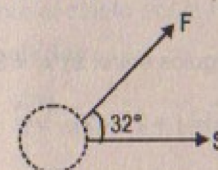
$\Rightarrow \quad \dfrac{60}{20\sqrt{34}} = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(3\sqrt{34}/34\right)$

19. Una fuerza $\vec{F} = (3{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j})$ N actúa sobre una partícula. El ángulo entre $\vec{F}$ y el vector desplazamiento s es 32,0°, y $\vec{F}$ efectúa 100,0 J de trabajo. Determine s.

Resolución:

$\vec{F} = 3\hat{i} + 4\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| = 5\,N$



Sea: $\vec{S} = a\hat{i} + b\hat{j}$

$\text{sen}32° \approx 0{,}538$

$\cos 32° \approx 0{,}846$

Sabemos que: $\quad \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}||\vec{S}|\cos 32°$

$\Rightarrow \quad (3\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (a\hat{i} + b\hat{j}) = 5|\vec{S}|\,0{,}846 \quad \ldots (1)$

Además: $\quad \dfrac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \text{vector unitario} \Rightarrow \dfrac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

De (1) $\quad 3a + 4b = 4{,}23|\vec{S}| \Rightarrow 3a + 4b = 4{,}23\sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots (2)$

Por dato: $\quad \vec{F} \cdot \vec{S} = 100{,}0\,J \Rightarrow 3a + 4b = 100 \quad \ldots (3)$

(3) en (2) resulta: $\quad a^2 + b^2 = (23{,}6)^2 \approx 24^2$

$\Rightarrow \quad |\vec{S}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2} = 24$ m ó 23,6 m

Desarrollando las ecuaciones (3) y (2)

Resulta que $a \approx 22{,}6 \wedge b \approx 8$

$\therefore \quad \vec{S} = 22{,}6\hat{i} + 8\hat{j} \wedge |\vec{S}| \approx 23{,}6 = 24$

20. Encuentre el ángulo entre $\vec{A} = -5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, y $\vec{B} = -2\hat{j} - 2\hat{k}$

Resolución :

$$\vec{A} = -5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \qquad \vec{B} = 0\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$A \,.\, B = (-5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \,.\, (0\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0 + 6 - 4 = 2$$

$$\Rightarrow \quad A.B = |A|\,|B| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2 = \sqrt{38}\,.\,2\sqrt{2}\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{19}}{38}$$

luego: $\theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{19}/38\right)$

21. Con la definición del producto escalar encuentre los ángulos entre: a) $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$, y $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$; b) $\vec{A} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$, y $\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$; c) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$, y $\vec{B} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

Resolución :

Parte (a)

$$\vec{A} = -5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{A}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

$$\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad A \,.\, B = |A| \,.\, |B| \,.\, \cos\theta \Rightarrow (-5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})(4\hat{i} - 4\hat{j} + 0\hat{k}) = 4\sqrt{2}\,.\sqrt{38}\,\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{-8}{8\sqrt{19}} = \frac{-\sqrt{19}}{19} \qquad \therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\sqrt{19}/19\right) \approx 11{,}3^\circ$$

Parte (b)

$$\vec{A} = -2\hat{i} + 4\hat{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow A.B = |A| \,.\, |B| \cos\alpha \quad \Rightarrow (-2\hat{i} + 4j)(3\hat{i} - 4\hat{j} + 2k) = 2\sqrt{5}\,.\sqrt{29}\,\cos\alpha$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{-22}{2\sqrt{145}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(-11/\sqrt{145}\right) \approx 156^\circ$$

Parte (c)

$$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{A}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{B} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \quad \Rightarrow \quad |\vec{B}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Luego: $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})(0\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -6 + 8 = 2$

Por lo tanto: $\vec{A}.\vec{B} = |A| \,.\, |B|\cos\theta$

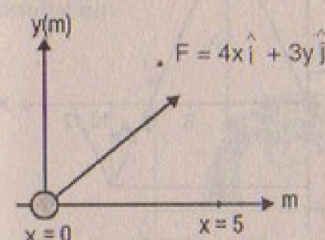
$$\Rightarrow \quad 2 = 3 \times 5\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2}{15}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(2/15) \approx 82{,}3^\circ$$

TRABAJO HECHO POR UNA FUERZA VARIABLE

22. Una fuerza $F = (4x\hat{i} + 3y\hat{j})$ N actúa sobre una partícula conforme el objeto se mueve en la dirección x desde el origen hasta x = 5,0 m. Encuentre el trabajo efectuado sobre el objeto por la fuerza.

Resolución :



$$W_x = \int F_x dx = \int_0^5 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^5 = 50 \text{ J}$$

$$W_y = \int F_y dy = \int_0^0 3y\,dy = 0$$

$$\therefore \quad W_{total} = 50 \text{ J}$$

23. Una partícula se somete a una fuerza F_x que varía con la posición, como se ve en la figura P7.23. Determine el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo cuando éste se mueve: a) de x = 0 a x = 5,0 m, b) de x = 5,0 m a x = 10 m, y c) de x = 10 m a x = 15 m. d) ¿Cuál es el trabajo total realizado por la fuerza a lo largo de una distancia x = 0 a x = 15 m?

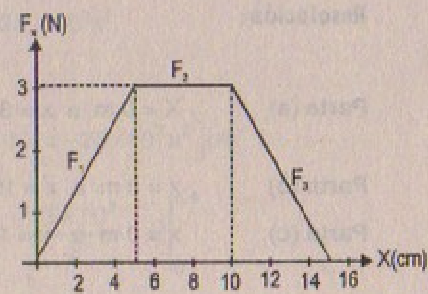


Figura P7.23

Resolución :

$$\frac{F_1 - 3}{x - 5} = \frac{3}{5} \Rightarrow F_1(x) = \frac{3x}{5} \quad ; \quad F_2(x) = 3 \quad ; \quad F_3(x) = -\frac{3x}{5}$$

Parte (a)
Trabajo de: x = 0 a x = 5 m

$$\int dW = \int F.dx = \int_0^5 \frac{3x}{5}\,dx \Rightarrow W_1 = \frac{3}{10}x^2\Big|_0^5 = 7{,}5\ J$$

Parte (b) x = 5 m a x = 10 m

$W_2 = 5 \times (3) = 15\ J$

Parte (c)

$$W_3 = \int dW_3 = \int F\,.\,dx = -\int_{10}^{15}\frac{3x}{5}\,dx = +\frac{3x^2}{10}\Big|_{15}^{10} = 7{,}50\ J$$

Parte (d) x = 0 m a x = 15 m

$W_1 + W_2 + W_3 = 7{,}5\ J + 15\ J + 7{,}50\ J = +30\ J$

24. La fuerza que actúa sobre una partícula varía, como muestra la figura P7.24. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza cuando la partícula se mueve a) de x = 0 a x = 8,0 m, b) de x = 8,0 m a x = 10 m, y c) de x = 0 a x = 10 m.

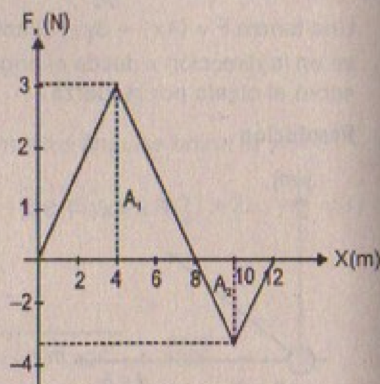


Figura P7.24

Resolución:

Parte (a) X = 0 m a x = 8 m $\quad W_1 = A_1 = \frac{8\times 6}{2} = 24\ J$

Parte (b) x = 8 m a x = 10 m $\quad W_2 = A_2 = \frac{2\times(-3)}{2} = -3\ J$

Parte (c) x = 0 m a x = 10 m $\quad W_{TOTAL} = W_1 + W_2 = 24 - 3 = 21\ J$

25. Un arquero jala la cuerda de su arco 0,400 m ejerciendo una fuerza que aumenta de manera uniforme de cero a 230 N. a) ¿Cuál es la constante de resorte equivalente del arco? b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar el arco?

25A. Un arquero jala la cuerda de su arco una distancia *d* ejerciendo una fuerza que aumenta de manera uniforme de cero a *F*. a) ¿Cuál es la constante de resorte equivalente del arco? b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar el arco?

Resolución :

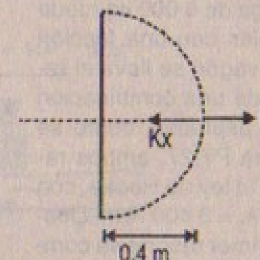
Parte (a)

$F = +kx$

Cuando $F = 230\ N$

$\Rightarrow\ 230 = 0{,}4k$

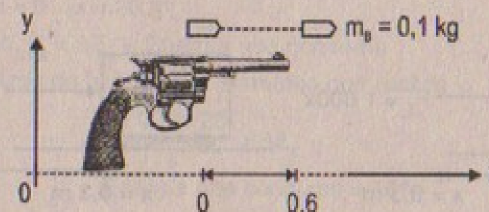
$\therefore\ k = 575\ N/m$



Parte (b)
$$W = +\int_0^{0.4} k.x\,dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0.4} = \frac{575}{2}(0{,}4)^2 = 46\ J$$

26. Una bala de 100 g se dispara de un rifle que tiene un cañón de 0,60 m de largo. Se considera que el origen se sitúa donde la bala empieza a moverse, la fuerza (en newton) ejercida sobre la bala por la expansión del gas es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$ donde x está en metros. a) Determine el trabajo hecho por el gas sobre la bala cuando ésta recorre la longitud del cañón. b) Si éste tiene una longitud de 1,00 m, ¿cuánto trabajo se realiza y cómo se compara este valor con el trabajo calculado en a)?

Resolución :



$$F_B(x) = 15\times 10^3 + 10^4x - 25\times 10^3x^2$$

Parte (a)

$$\int dW = \int F dx = \int_0^{0,6}\left[15\times10^3 + 10^4x - 25\times10^3x^2\right]dx$$

$$\Rightarrow\quad W = 15\times10^3x + \frac{10^4}{2}x^2 - \frac{25\times10^3}{3}\,.\,x^3\Big|_0^{0.6}$$

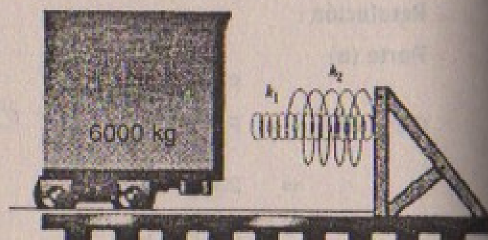
$\therefore\ W = 9\,000\ J$

Parte (b)

$$\int dW = \int F.dx = \int_0^1\left[15\times10^3 + 10^4x - 25\times10^3x^2\right]dx$$

$$\Rightarrow\quad W = 15\times10^3x + \frac{10^4}{2}x^2 - \frac{25}{3}\times10^3x^3\Big|_0^1 = 11\,666{,}6$$

27. Un vagón de carga de 6 000 kg rueda a lo largo de rieles con una fricción despreciable. El vagón se lleva al reposo por medio de una combinación de dos resortes espirales, como se ilustra en la figura P7.27. ambos resortes obedecen la ley de Hooke, con k_1 = 1 600 N/m y k_2 = 3 400 N/m. Después de que el primer resorte se comprime una distancia de 30,0 cm, el segundo resorte (que actúa con el primero) aumenta la fuerza de modo que hay una compresión adicional, como se indica en la gráfica. Si el vagón se lleva al reposo 50,0 cm más allá del primero contacto con el sistema de dos resortes, encuentre la velocidad inicial del vagón.



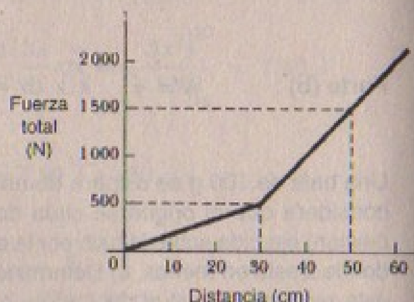
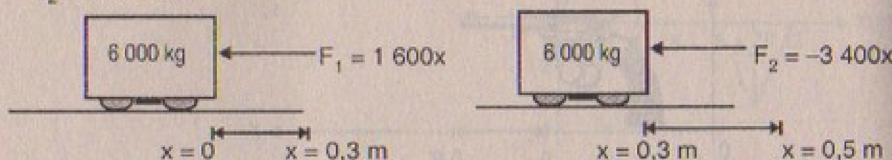


Figura P7.27

Resolución :

k_1 = 1 600 N/m

k_2 = 3 400 N/m



$W_{total} = \Delta E_k$

$$-\int_0^{0,3} 1\,600\,x dx - \int_{0,3}^{0,5} 3\,400\,x dx = \Delta E_k$$

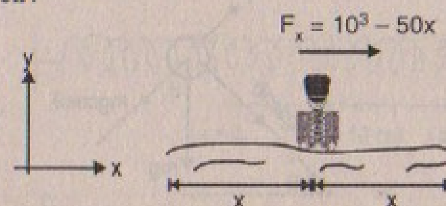
$$-800\,x^2\Big|_0^{0,3} - 1\,700\,x^2\Big|_{0,3}^{0,5} = \frac{1}{2}(6\,000)v_F^2 - v_i^2$$

$$-800(0,3)^2 - 1\,700\,(0,5)^2 + 1\,700\,(0,3)^2 = -3\,000\ v_i^2$$

$$-344\text{ J} = -3\,000\ v_i^2 \quad \therefore \quad v_i = \sqrt{\frac{344}{3\,000}} \approx 0,339\text{ m/s}$$

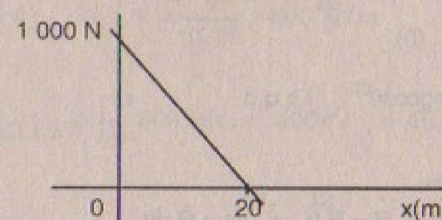
28. Un marino en la selva se encuentra a la mitad de un pantano. La fuerza F_x que el debe ejercer en la dirección x cuando lucha por salir es F_x = (1 000 − 50,0 x) N, donde x está en metros. a) Dibuje la gráfica de F_x contra x. b) ¿Cuál es la fuerza promedio que él ejerce al moverse de 0 a x? c) Si recorre x = 20,0 m para salir por completo del pantano, ¿cuánta energía consume contra el pantano?

Resolución :



Parte (a)

F(x) = (1 000 N − 50x) N



Parte (b)

De x = 0 a x = x ; $F_{promedio}$ = (1 000 − 50x) N

Parte (c)

x = 0 x = 20 m

$W_{total} = \Delta E_k$ = Energía que consume

Área de la gráfica = El trabajo que realiza

$$\frac{1\,000 \times 20}{2} = \Delta E_k$$

∴ Energía que consume = 10^4 J

29. Una pequeña masa *m* se jala hasta la parte superior de un medio cilindro (de radio *R*) por una cuerda que pasa sobre esa misma parte, como se ilustra en la figura P7.29. a) Si la masa se mueve a una velocidad constante, demuestre que F = mg cos θ. (*Sugerencia*: Si la masa se mueve a velocidad constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero todo el tiempo.) b) Por integración directa de W = ∫F ds, determine el trabajo realizado al mover la masa a velocidad constante desde la base hasta la parte superior del medio cilindro.

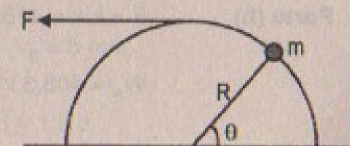
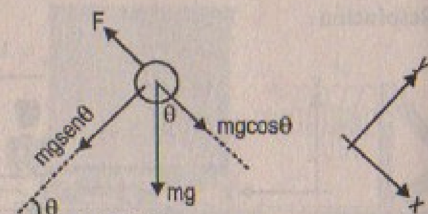


Figura P7.29

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar   F = mgcosθ



$\Sigma F_y = m \cdot a_{cp}$

$\Rightarrow \quad mgsen\theta = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{gRsen\theta} = v$

$\Sigma F_x = m \cdot a_T \quad$ ya que $\quad a_T = \dfrac{d|v|}{dt} \quad v = cte \quad \therefore \; a_T = 0$

$\Rightarrow \quad F - mgcos\theta = m \cdot (0)$

$\therefore \quad F = mgcos\theta \qquad$ l.q.q.d.

Parte (b)

$W = \int F \cdot ds$

Pero $\quad F = mgcos\theta \;\wedge\; S = R.\theta \Rightarrow ds = R.d\theta$

Reemplazando: $\quad W = \int mgcos\theta R d\theta = R\,mg \int_0^{\pi/2} cos\theta \cdot d\theta$

$\therefore \quad W = Rmgsen\theta \Big|_0^{\pi/2} = mRg$

30. La fuerza requerida para alargar un resorte que cumple la ley de Hooke varía de cero a 50,0 N cuando lo extendemos moviendo un extremo 12,0 cm desde su posición no deformada. a) Encuentre la fuerza constante del resorte. b) Determine el trabajo realizado en extender el resorte.

Resolución :

Parte (a) $\quad F = 50{,}0$ N

K
x = 0 x = 0,12 m
F

$\Rightarrow \quad 50 = k\,(0{,}12)$

$\therefore \quad k = 416{,}6$ N/m

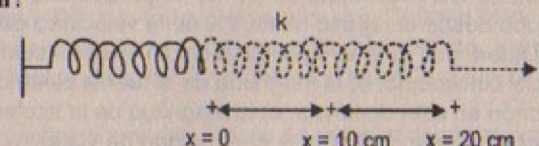
Parte (b) $\quad F = k.x = 416{,}6\,x \quad \Rightarrow \quad W_F = \int_0^{0,12} 416{,}6x dx$

$\therefore \quad W_F = 408{,}3\,x^2 \Big|_0^{0,12} = 5{,}88$ J

31. Si se necesitan 4,00 J de trabajo para alargar 10,0 cm un resorte que cumple la ley de Hooke a partir de su longitud no deformada, determine el trabajo extra necesario para extenderlo 10,0 cm adicionales.

31A. Si se necesita un trabajo W para alargar una distancia *d* un resorte que cumple la ley de Hooke a partir de su longitud no deformada, determine el trabajo extra necesario para extenderlo una distancia *d* adicional.

Resolución :



$F = kx$

$\Rightarrow \quad W_F = \int_0^{0.1} kxdx = 4{,}00$ J

$\Rightarrow \quad \dfrac{kx^2}{2}\Big|_0^{0,1} = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{8}{(0,1)^2} = 800$ N/m

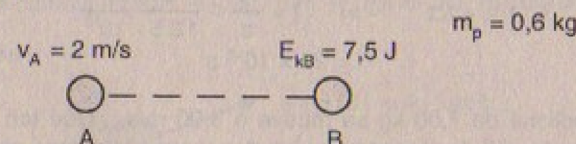
Luego: $\quad W_{F(0,1-0,2)} = \int_{0,1}^{0,2} 800\,x\,dx = 400x^2 \Big|_{0,1}^{0,2} = 16 - 4 = 12$

$\therefore \quad W_F = 12$ J

ENERGÍA CINÉTICA Y EL TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

32. Una partícula de 0,600 kg tiene una velocidad de 2,00 m/s en el punto *A* y una energía cinética de 7,50 J en *B*. ¿Cuál es a) su energía cinética en A? b) ¿su velocidad en B? c) ¿el trabajo total realizado sobre la partícula cuando se mueve de A a B?

Resolución :



Parte (a)

$W_{total} = \Delta E_K = E_{KB} - E_{KA}$

$\Rightarrow \quad E_{KB} = \dfrac{1}{2}(0{,}6)\,v_B^2 = 7{,}5 \qquad \therefore \; v_B = 5$ m/s

$E_{KA} = \dfrac{1}{2}(0{,}6)\,v_A^2 = \dfrac{1}{2}(0{,}6)(2)^2 = 1{,}2$ J

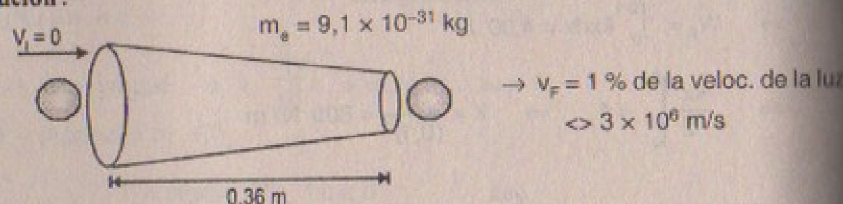
Parte (b) $\quad v_B = 5$ m/s

Parte (c) $\quad W_{total} = \Delta E_K = E_{KB} - E_{KA}$

$\Rightarrow \quad W_{total} = 7{,}5 - 1{,}2 = 6{,}3$ joules

33. Un cinescopio de cierto televisor mide 36 cm de largo. La fuerza eléctrica acelera un electrón en el tubo desde el reposo hasta 1% de la velocidad de la luz a lo largo de esta distancia. Determine: a) la energía cinética del electrón cuando incide sobre la pantalla al final del cinescopio, b) la magnitud de la fuerza eléctrica promedio que actúa sobre el electrón en esta distancia, c) la magnitud de la aceleración promedio del electrón a lo largo de esta distancia, y d) el tiempo de vuelo.

Resolución :



$\rightarrow v_F = 1$ % de la veloc. de la luz
$<> 3 \times 10^6$ m/s

Parte (a)

$$E_{KF} = \frac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^6)^2 = 40,95 \times 10^{-19} \text{ J} = 4,1 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Parte (b) $v_F^2 = v_i^2 + 2(a_{prom})(d) \Rightarrow a_{prom} = \dfrac{v_F^2}{2d} = \dfrac{9\times10^{12}}{2(0,36)} = 12,5 \times 10^{12}$ m/s²

$\Rightarrow$ $F_{prom} = m_e \times a_{prom} = (9,1 \times 10^{-31})(12,5 \times 10^{12})$

$F_{prom} = 114 \times 10^{-19}$ N $= 1,14 \times 10^{-17}$ N

Parte (c) $a_{prom} = 12,5 \times 10^{12}$ m/s²

Parte (d) $v_F = v_i + a.t \Rightarrow t = \dfrac{v_F}{a} = \dfrac{3\times10^6}{12.5\times10^{12}}$

$\therefore$ $t = 24 \times 10^{-8}$ s

34. Una bola de boliche de 7,00 kg se mueve a 3,00 m/s. ¿Qué tan rápido se debe mover una bola de golf de manera que las dos tengan la misma energía cinética?

Resolución :

Boliche (7 kg) $\rightarrow$ $v_B = 3,00$ m/s

Golf (m) $\rightarrow$ $v_G = ?$

$$E_{KB} = \frac{1}{2}(7)(3)^2 = 31,5 \text{ J}$$

Sea la masa de la bola de golf = 0,1 kg

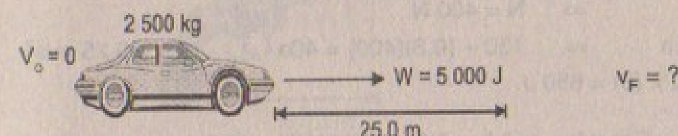
$\Rightarrow$ $E_{KG} = E_{KB} = 31,5$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(0,1)v_G^2 = 31,5$ $\therefore$ $v_G = 25,1$ m/s

35. Un mecánico empuja un auto de 2 500 kg desde el reposo hasta una velocidad *v*, efectuando 5 000 J de trabajo en el proceso. Durante este tiempo, el auto se mueve 25,0 m. Ignore la fricción entre el auto y el camino, y encuentre: a) ¿cuál es la velocidad final, v, del auto? b) ¿Cuál es el valor de la fuerza horizontal ejercida sobre el auto?

35A. Un mecánico empuja un auto de masa *m* desde el reposo hasta una velocidad *v*, efectuando un trabajo *W* en el proceso. Durante este tiempo, el auto se mueve una distancia *d*. Ignore la fricción entre el auto y el camino, y encuentre a) ¿cuál es la velocidad final, *v*, del auto? b) ¿Cuál es el valor de la fuerza horizontal ejercida sobre el auto?

Resolución :



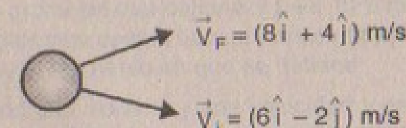
Parte (a) $5\,000 = \frac{1}{2}(2\,500)\,v_F^2 \Rightarrow v_F = 2$ m/s

Parte (b) $v_F^2 = vi^2 + 2(a)(d) \Rightarrow a = \dfrac{2}{2(25)} = 0,04$ m/s²

Por lo tanto: $W = F \times (d) \Rightarrow 5\,000 \text{ J} = F\,(25,0 \text{ m}) \therefore F = 200$ N

36. Un masa de 3,0 kg tiene una velocidad inicial $v_0 = (6,0\hat{i} - 2,0\hat{j})$ m/s. a) ¿Cuál es la energía cinética en este tiempo? b) Determine el cambio en su energía cinética si su velocidad cambia a $(8,0\hat{i} + 4,0\hat{j})$ m/s. (*Sugerencia*: Recuerde que $v^2 = v \cdot v$)

Resolución :

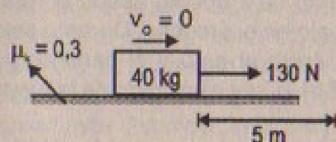


Parte (a) $E_{Ki} = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(3)(6\hat{i} - 2\hat{j})(6\hat{i} - 2\hat{j}) = 60$ J

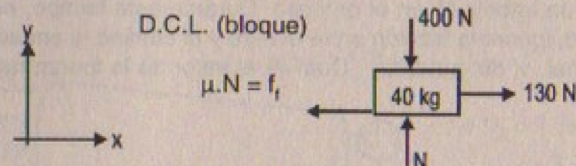
Parte (b) $E_{Kf} = \frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{1}{2}(3)(8\hat{i} + 4\hat{j})(8\hat{i} + 4\hat{j}) = 120$ J

37. Una caja de 40 kg inicialmente en reposo se empuja 5,0 m por un piso rugoso horizontal con una fuerza aplicada constante horizontal de 130 N. si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso es 0,30, encuentre: a) el trabajo realizado por la fuerza aplicada, b) la energía cinética perdida debido a la fricción, c) el cambio en la energía cinética de la caja, y d) la velocidad final de la caja.

Resolución :37



Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 400\ N$

$\Sigma F_x = m.a \quad \Rightarrow \quad 130 - (0,3)(400) = 40a \quad \therefore \quad a = 0,25\ m/s^2$

$W_F = 130 \times (5) = 650\ J$

Parte (b) Energía perdida $= W_{Ff} = (-120)(5) - 600\ J$

Parte (c) $W_{total} = \Delta E_K \quad \Rightarrow \quad 650 - 600 = 5\ J = W_{total}$

Parte (d) $v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d)$

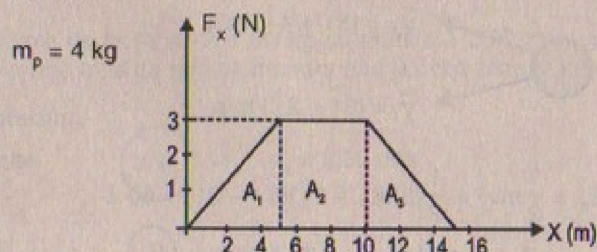
$\Rightarrow \quad v_f^2 = 2(0,25)(5) = \sqrt{2,5}$

$\therefore \quad v_f = 1,58\ m/s$

38. Una partícula de 4,0 kg se somete a una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la figura P723. La partícula parte del reposo en x = 0. ¿Cuál es su velocidad en: a) x = 5,0 m, b) x = 10 m, y c) x = 15 m?

Resolución :

$m_p = 4\ kg$



Parte (a) $W_{(x=0 \to x=5)} = A_1 = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad \dfrac{5 \times 3}{2} = \dfrac{1}{2}(4)v_F^2 \qquad \therefore \quad v_{F1} = 1,94\ m/s$

Parte (b) $W_{(x=5 \to x=10)} = A_2 = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad 5 \times 3 = \dfrac{1}{2}(4)[v_F^2 - (1,94)^2] \qquad \therefore \quad v_{F2} = 3,36\ m/s$

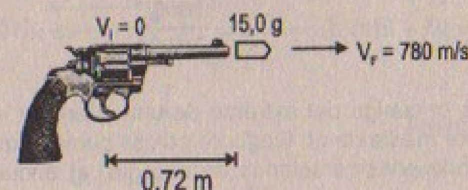
Parte (c) $W_{(x=10 \to x=15)} = A_3 = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad \dfrac{5 \times 3}{2} = \dfrac{1}{2}(4)\ [v_F^2 - (3,36)^2]$

$\therefore \quad v_{F3} = 3,88\ m/s$

39. Una bala de 15,0 g se acelera en el cañón de un rifle de 72,0 cm de largo hasta una velocidad de 780 m/s. Emplee el teorema del trabajo y la energía para encontrar la fuerza ejercida sobre la bala mientras se acelera.

Resolución :



Solución: $\quad W = \int F\,dx = \int m\dfrac{dv}{dt}dx = m\int_0^{780} v\,dv \qquad ...(1)$

Cinemática: $\quad v_f^2 = v_i^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{(780)^2}{2\,(0,72)} \quad ...(2)$

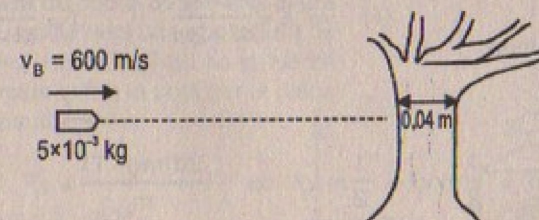
$\Rightarrow \quad W = \dfrac{0,015}{2}v^2\Big|_0^{780} = \dfrac{0,015}{2} \times (780)^2 = 4\ 563\ J$

Pero: $\quad F\,.\,(0,72) = 4,563 \quad \Rightarrow \quad F = 6\ 337,5\ N$

40. Una bala con una masa de 5,00 g y una velocidad de 600 m/s penetra un árbol hasta una distancia de 4,00 cm. a) Utilice consideraciones de energía para encontrar la fuerza de fricción promedio que detiene la bala. b) Suponga que la fuerza de fricción es constante y determine cuánto tiempo transcurre entre el momento en que la bala entra en el árbol y el momento en que se detiene.

40A. Una bala con una masa *m* y una velocidad *v* penetra un árbol hasta una distancia *d*. a) Utilice consideraciones de energía para encontrar la fuerza de fricción promedio que detiene la bala. b) Suponga que la fuerza de fricción es constante y determine cuánto tiempo transcurre entre el momento en que la bala entra en el árbol y el momento en que se detiene.

Resolución :



Parte (a) $W_f = \Delta E_K$

$$\Rightarrow \quad -f_f\,(0{,}04) = \frac{1}{2}(5\times10^{-3})\,[v_f^2-(600)^2]$$

$$\therefore \quad F_f = 22\,500 \text{ N}$$

Parte (b) $F_f = \text{cte} \Rightarrow a = \text{constante}$

Cinemática $v_f = v_i + at \Rightarrow 0 = 600 + (-45\times10^5)\,.\,t \quad \therefore \quad t = 0{,}13\times10^{-3}$ s

Pero: $v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d) \Rightarrow a = \dfrac{(600)^2}{2(0{,}04)} = -45\times10^5$ m/s²

41. Un bloque de masa *m* cuelga del extremo de una cuerda y está conectado a un bloque de masa *M* por medio de un juego de poleas como el que se presenta en la figura P7.41. Utilizando consideraciones de energía, a) encuentre una expresión para la velocidad de *m* como una función de la distancia que ha descendido. Suponga que el bloque se encuentra inicialmente en reposo y que no hay fricción. b) Repita a) suponiendo fricción de deslizamiento (coeficiente μ_c) entre *M* y la mesa. c) Muestre que el resultado obtenido en b) se reduce en relación con el encontrado en a) en el límite cuando μ_c, tiende a cero.

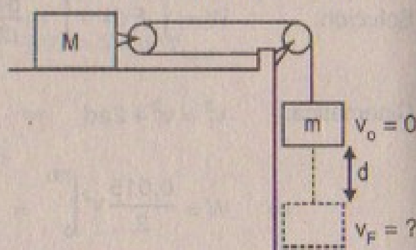
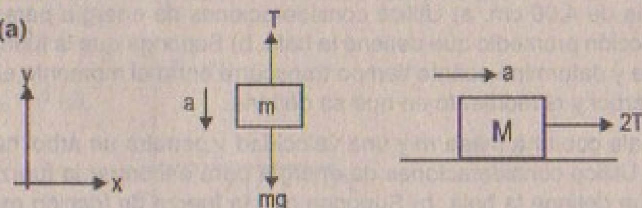


Figura P7.41

Resolución :

Parte (a)



Por segunda ley:

$$\left.\begin{array}{l} 2T = M.a \\ mg - T = m(a) \end{array}\right\} \quad (+) \quad \Rightarrow a = \frac{2mg}{M+2m} \quad \therefore \quad T = \frac{M\,.\,mg}{M+2m}$$

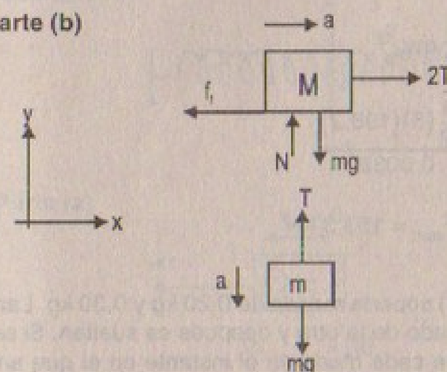
$$W_{(m)} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad (mg - T)(d) = \frac{1}{2}m\,v_f^2 - \frac{1}{2}m\,v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2d(mg-T)}{m} = v_f^2 \;\; \ldots (1)$$

pero: $T = \dfrac{Mmg}{M+2m}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2d}{m}\left[mg - \frac{Mmg}{M+2m}\right] = v_F^2 \qquad \therefore \quad v_F = \sqrt[2]{\frac{mgd}{M+2m}} \text{ m/s}$$

Parte (b)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg$

$\Sigma F_x = M(a) \Rightarrow 2T - f_f = M(a)$

$\therefore \quad 2T = \mu\,.\,mg + M(a) \quad \ldots (1)$

Además:

$mg - T = m(a)$

$\Rightarrow \quad T = mg - ma \quad \ldots (2)$

(2) en (1) desarrollando: $T = \dfrac{Mmg\,(1+\mu)}{2m+M}$

Por el teorema del trabajo y la energía: $W_{total}\,(m) = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad (mg - T)(d) = \frac{1}{2}m v_F^2$$

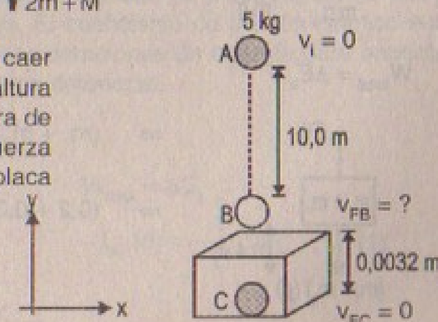
$$\Rightarrow \quad \left[mg - \left(\frac{Mmg[1+\mu]}{2m+M}\right)\right]d = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2$$

Desarrollando: $\therefore \quad v_F = \sqrt{\dfrac{2\,(2mg - Mg\mu)d}{2m+M}}$ m/s

Parte (c) Si $\mu \to 0$

$$v_{F(a)} = v_{F(b)} = \sqrt[2]{\frac{mg\,d}{2m+M}} \text{ m/s}$$

42. Una bola de acero de 5,0 kg se deja caer sobre una placa de cobre desde una altura de 10,0 m. Si la bola deja una abolladura de 0,32 cm de profundidad, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida sobre la bola por la placa durante el impacto?



Resolución :

Considerar: g = 9,81 m/s²

$$W_{A \to B} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad mg(d) = \frac{1}{2} m v_{F_b}^2 \Rightarrow \quad v_{F_b} = \sqrt{2gd} = \sqrt{2(9,81)(10)}$$

$$\therefore \quad v_{F_b} = \sqrt{196,2} = 14 \text{ m/s}$$

$$W_{B \to C} = \Delta E_k$$

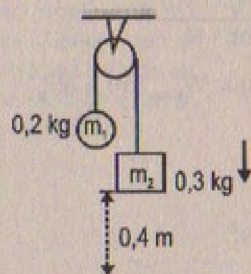
$$\Rightarrow \quad F_{prom}(d) = \frac{1}{2} m v_{F_c}^2 - \frac{1}{2} m v_{F_b}^2$$

$$\therefore \quad F_{prom} = \frac{-\frac{1}{2} m v_{FB}^2}{d} = \frac{-\frac{1}{2}(5)(196,2)}{0,0032}$$

$$\therefore \quad F_{prom} = 153,3 \text{ kN}$$

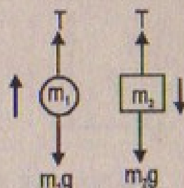
43. Una máquina de Atwood (Fig. 5.12) soporta masas de 0,20 kg y 0,30 kg. Las masas son mantenidas en reposo una al lado de la otra y después se sueltan. Si se ignora la fricción, ¿cuál es la velocidad de cada masa en el instante en el que ambas se han movido 0,40 m?

Resolución :



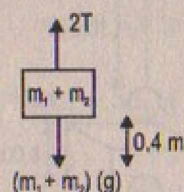
Considerar: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Por segunda ley:



$$\left.\begin{array}{l} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{array}\right\} (+) \qquad a = 0,2 \text{ m/s}^2 \qquad \therefore \quad T = 2 \text{ N}$$

$$W_{total} = \Delta E_k$$



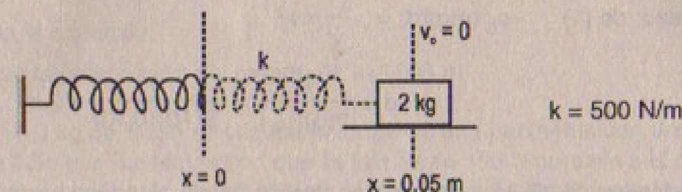
$$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2)(g)(d) - 2T(d) = \frac{1}{2} V^2_{(m_1+m_2)}(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \quad (0,2 + 0,3)(9,81)(0,4) - 2(2)(0,4) = \frac{1}{2}(0,5)\, V^2$$

$$\therefore \quad V = 1,25 \text{ m/s}$$

44. Un bloque de 2,0 kg está unido a un resorte de 500 N/m de constante de fuerza, como en la figura 7.8. El bloque se jala 5,0 cm a la derecha del equilibrio y se suelta desde el reposo. Encuentre la velocidad del bloque cuando pasa por el equilibrio si a) la superficie horizontal es sin fricción, y b) el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0,35.

Resolución :



$k = 500 \text{ N/m}$

Parte (a)



$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$W_{bloque} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0,05}^{0} -kx\,dx = \int_{0}^{0,05} (500)x\,dx = \frac{1}{2}(2)v_f^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad 250x^2\Big|_0^{0,05} = v_f^2 \qquad \therefore \quad v_f = 0,79 \text{ m/s}$$

Parte (b)



$f_f = (0,35)(2)(9,81) = 6,867 \text{ N}$

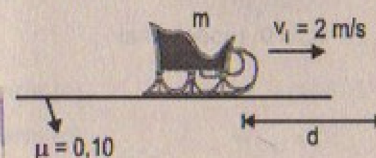
$$W_{BLOQUE} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0,05}^{0} -kx\,dx - 6,867(0,05) = 250x^2\Big|_0^{0,05} - 0,34 = \frac{1}{2}(2)v_f^2$$

$$\Rightarrow \quad (0,625 - 0,34)(1) = v_f^2 \qquad \therefore \quad v_f = 0,534 \text{ m/s}$$

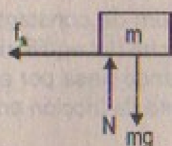
45. Un trineo de masa *m* sobre un estanque congelado es pateado, con lo que se le imparte una velocidad inicial $v_i = 2$ m/s. El coeficiente de fricción cinético entre el trineo y el hielo es $\mu_c = 0,10$. Utilice consideraciones de energía para encontrar la distancia que se mueve el trineo antes de detenerse.

Resolución :



$$W_{total} = \Delta E_k$$

$$-f_k\,(d) = -\frac{1}{2}(m)v_i^2 \qquad \dots (1)$$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$

$\Sigma F_x = ma \Rightarrow -f_k = m(a) \Rightarrow -\mu_k mg = ma$

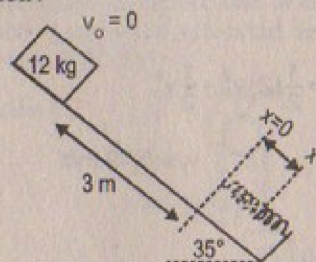
$\therefore \quad a = -(0,10)(10) = -1\ m/s^2$

Luego: de (1) $\quad -\mu_k (mg)(d) = -\frac{1}{2}mv_i^2$

$$\therefore \quad d = \frac{v_i^2}{2(g)(\mu_k)} = \frac{4}{2(10)(0,10)} = 2\ m$$

46. Un bloque de 12,0 kg de masa se desliza desde el reposo hacia abajo de una pendiente sin fricción de 35,0° y lo detiene un resorte rígido con k = 3,00 × 10⁴ N/m. El bloque se desliza 3,00 m desde el punto de partida hasta el punto donde queda en reposo contra el resorte. Cuando el bloque queda en reposo, ¿qué tanto se ha comprimido el resorte?

Resolución :



$k_R = 3 \times 10^4$ N/m

Considerar $\quad sen35° \approx 0,584$

$\quad cos35° \approx 0,812$

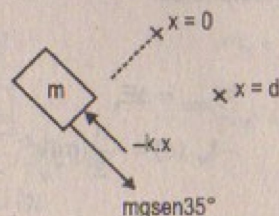
$W_{peso} = \Delta E_k$

$(mg\ sen35°)(3) = \frac{1}{2}mv_{f_1}^2$

$\Rightarrow \quad v_{f1} = \sqrt{(2)(3)(10)(0,584)}$

$\therefore \quad v_{f1} = 5,92$ m/s

Luego:



$v_{f2} = 0$ reposo final

$W_{total} = \Delta E_k$

$$mgsen35°\ (d) + \int_0^d -3 \times 10^4 \times dx = \frac{1}{2}m\ \left. v_{F_2}^2 - v_{F_1}^2 \right|$$

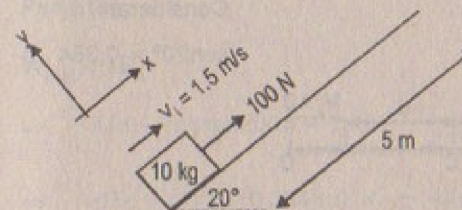
$$\Rightarrow \quad (12)(10)(0,584)(d) - 1,5 \times 10^4\ (d^2) = -\frac{1}{2}\ (12)(5,92)^2$$

Desarrollando la ecuación:

nos queda que la compresión del resorte es: 0,1306 m

47. Una caja de 10,0 kg de masa se jala hacia arriba de una pendiente con una velocidad inicial de 1,50 m/s. La fuerza con que se jala es de 100 N paralela a la pendiente, la cual forma un ángulo de 20,0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinético es 0,400, y la caja se jala 5,00 m. a) ¿Cuánto trabajo efectúa la gravedad? b) ¿Cuánta energía se pierde por la fricción? c) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de 100 N? d) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de la caja? e) ¿Cuál es la velocidad de la caja después de haberla jalado 5,00 m?

Resolución :



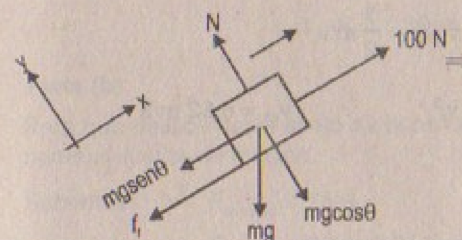
Dato: $\mu_k = 0,4 \quad g = 10\ m/s^2$

Considerar:

$sen20° \approx 0,354$

$cos20° \approx 0,935$

Parte (a)



$(-mgsen\theta)(d) = W_{peso}$

$\Rightarrow \quad -(10)(10)(0,354)(5) = W_{peso}$

$\therefore \quad W_{peso} = -177$ J

Parte (b) $\quad W_{fricción} = \Delta E_k$

$-f_r\ (d) = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad (\mu_k)(N) = -\mu_k\ (mgcos20°) = -(0,4)(10)(10)(0,935)$

$\therefore \quad \Delta E_k = 37,4$ J

Parte (c) $\quad W_f = (100)(5) = 500$ J

Parte (d) $\quad W_{total} = \Delta E_k$

$W_F + W_{peso} + W_{fricción} = \Delta E_k \Rightarrow 500 - 177 - 37,4 = \Delta E_k$

$\therefore \quad \Delta E_k = 285,6\ J$

Parte (e) $\frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_i^2 = 285,6$

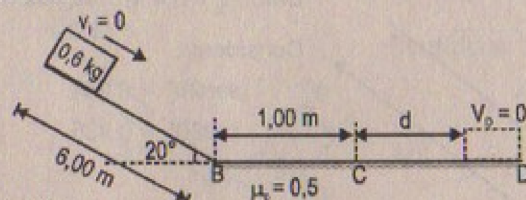
$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(10)v_f^2 - \frac{1}{2}(10)(1,5)^2 = 285,6$

$\Rightarrow \quad 5\, v_f^2 = 285,6 + 11,25$

$\therefore \quad v_f = 7,7\ m/s$

48. Un bloque de 0,60 kg de masa se desliza 6,00 m descendiendo por una rampa sin fricción inclinada 20° con la horizontal. Luego se desplaza sobre una superficie horizontal rugosa donde $\mu_c = 0,50$. a) ¿Cuál es la velocidad del bloque al final de la pendiente? b) ¿Cuál es la velocidad después de moverse 1,00 m sobre la superficie rugosa? c) ¿Qué distancia viaja sobre la superficie horizontal antes de detenerse?

Resolución :



Considerar:

$sen20° = 0,354$

Parte (a)

$W_{peso} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad mg sen20° (d) = \frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_i^2$

$\Rightarrow \quad (10)(0,354)(6) = \frac{1}{2} v_f^2 \qquad \therefore \quad v_{fB} = 6,52\ m/s$

Parte (b) $W_{total} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad W_{fr} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad -(\mu_k)(N)(d) = -(0,5)(0,6)(10)(1) = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m\, V_B^2$

$\Rightarrow \quad -(0,5)(10) + \frac{1}{2}(6,52)^2 = \frac{1}{2} v_C^2$

$\therefore \quad v_C = 5,702\ m/s$

Parte (c) $W_{total} = W_{f_k} = \Delta E_k$

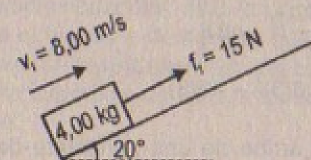
$\Rightarrow \quad -\mu_k \cdot N\, (d_{total}) = \frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m\, v_B^2$

$\Rightarrow \quad -(0,5)(10)(1 + d) = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(6,52)^2$

$\therefore \quad Hd = d_{total} = \frac{(6,52)^2}{2(10)(0,5)} = 4,25\ m$

49. A un bloque de 4,00 kg se le da una velocidad inicial de 8,00 m/s en el pie de una pendiente a 20,0°. La fuerza de la fricción que retarda su movimiento es de 15,0 N. a) Si el bloque se desplaza hacia arriba de la pendiente, ¿qué distancia se mueve antes de detenerse? b) ¿Deslizará hacia abajo por la pendiente?

Resolución :



Considerar:

$sen20° = 0,354$

$g = 10\ m/s^2$

Parte (a)

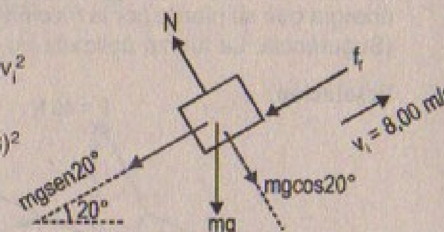
$W_{total} = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad -f_r(d) - mgsen20(d) = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$

$\Rightarrow \quad -15d - (4)(10)(0,354)(d) = -\frac{1}{2}(4)(8)^2$

$-29,16\ d = -128$

$\therefore \quad d = 4,39\ m$



Parte (b)

Para que deslice hacia abajo se tiene que cumplir que la fuerza del peso (componente) > fuerza de fricción.

Sabemos: $F_{fricción} = 15\ N$

$F_{peso} = (4)(10)(0,354) = 14,16$

$F_{peso} < F_{fricción} \quad \Rightarrow$ El bloque no desliza hacia abajo

50. Una fuerza neta que varía en el tiempo actúa sobre una partícula de 4,0 kg y produce en ésta un desplazamiento dado por $x = 2,0t - 3,0t^2 + 1,0t^3$, donde x está en metros y t en segundos. Encuentre el trabajo realizado sobre la partícula durante los primeros 3,0 s de movimiento.

Resolución :

$m_p = 4\ kg \quad ; \quad x(t) = (2t - 3t^2 + t^3)\ m$

$W = \int F\,dx$

Sabemos que: $V(t) = \dfrac{dx}{dt} = (2 - 6t + 3t^2)$ m/s

Además: $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = (-6 + 6t)$ m/s²

$\Rightarrow \quad W = \int m\dfrac{dv}{dt}dx = 4 \cdot \int_0^3 (6t - 6)(3t^2 - 6t + 2)dt$

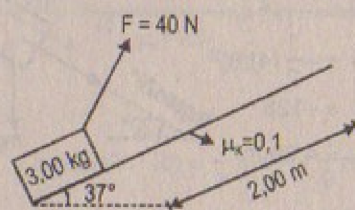
$\Rightarrow \quad W = 4\int_0^3 (18t^3 - 54t^2 + 48t - 12)dt$

Luego: $W = \dfrac{72}{4}t^4 - \dfrac{216}{3}t^3 + \dfrac{192}{2}t^2 - 48t\Big|_0^3$

$W = 18(3)^4 - 72(3)^3 + 96(3)^2 - 48(3) \qquad \therefore \quad W = 1\,530$ J

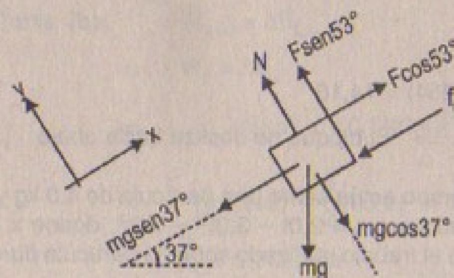
51. Un bloque de 3,00 kg se mueve hacia arriba de una pendiente de 37,0° bajo la acción de una fuerza horizontal constante de 40,0 N. El coeficiente de fricción cinética es 0,100, y el bloque se desplaza 2,00 m hacia arriba por la pendiente. Calcule: a) el trabajo hecho por la fuerza de 40,0 N, b) el trabajo realizado por la gravedad, c) la energía que se pierde por la fricción y d) el cambio en la energía cinética del bloque. (Sugerencia: La fuerza aplicada no es paralela a la pendiente.)

Resolución :



Considerar:
$g = 9{,}81$ m/s²

Parte (a)



$W_{fuerza} = F\cos 53° \times (d)$

$\Rightarrow \quad (40)(0{,}6)(2) = 48$

$\therefore \quad W_{F_x} = 48$ J y $W_{F_y} = 0$

Parte (b) $W_{peso} = -mg\,sen37 \times d$

$\Rightarrow \quad -(3)(9{,}81)(0{,}6)(2) = -36 \qquad \therefore \quad W_{peso} = -35{,}4$ J

Parte (c) $W_{fricción} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad W_{fricción} = -f_r \times d = -m_k\,(N)(d) = -(0{,}1)(2)(mg\cos 37° - F sen53°)$

$\Rightarrow \quad -(0{,}1)(2)\,[30(0{,}8) - 40(0{,}8)] = 1.6 = W_{fricción}$

$\therefore \quad \Delta E_k = 1{,}6$ J

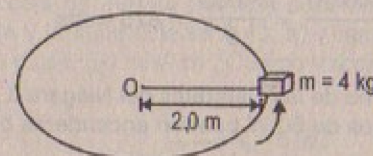
Parte (d) $W_{total} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad W_{peso} + W_f + W_{fricción} = 48 - 36 + 1{,}6 =$

$\therefore \quad \Delta E_t = 13{,}2$ J

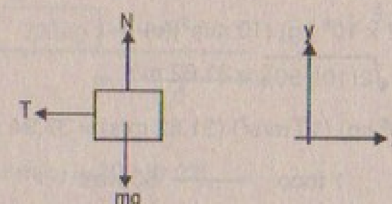
52. Un bloque de 4,0 kg unido a una cuerda de 2,0 m de largo gira en un círculo sobre una superficie horizontal. a) Si la superficie es sin fricción, identifique todas las fuerzas sobre el bloque y demuestre que el trabajo efectuado por cada fuerza es cero para cualquier desplazamiento del bloque. b) si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0,25, encuentre la energía perdida por la fricción en cada revolución.

Resolución :



Parte (a)

D.C.L. (m)



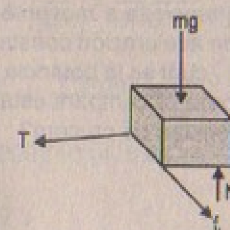
$W_T = 0$

Ya que T es al desplazamiento $S = R.\theta$

$W_N = W_{mg} = 0$

Ya que ambas fuerzas son ⊥ al desplazamiento.

Parte (b)



$\mu_k = 0{,}25$

$R = 2$ m

Sabemos que:

$S = R.\theta \quad \Rightarrow \quad ds = R.d\theta$

$W_{fricción} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad W_{fricción} = \int_0^{2\pi} \mu_K \cdot (mg)\,R d\theta$

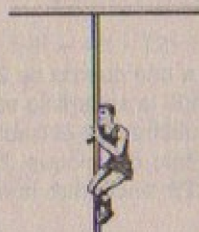
$$\Rightarrow \quad -2(4)(10)(0{,}25)\int_0^{2\pi} d\theta = (-2)(40)(0{,}25)(2\pi)$$

$$\therefore \quad \Delta E_k = 125{,}6 \text{ J}$$

POTENCIA

53. Un marino de 700 N en un entrenamiento básico sube por una cuerda vertical de 10,0 m a una velocidad constante en 8,00 s. ¿Cuál es su potencia de salida?

Resolución:



$W_M = 700$ N

$L_C = 10{,}0$ m

$t_{total} = 8{,}00$ s

$$P = \frac{W}{t} = \frac{W_M \times Lc}{t} = \frac{700 \times 10}{8} = \frac{7\,000}{8} = 875 \text{ watts}$$

54. Fluye agua sobre un tramo de las Cataratas del Niágara a razón de $1{,}2 \times 10^6$ kg/s y cae 50 m. ¿Cuántos focos de 60 W pueden encenderse con esta potencia?

Resolución:

$P = F.v = (1{,}2 \times 10^9 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(v)$

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(10)(50)} = 31{,}62$ m/s

$\Rightarrow \quad P = (1{,}2 \times 10^6 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(31{,}62 \text{ m/s}) = 37{,}94 \times 10^7$ watt

Si: En 1 foco —— 60 watt

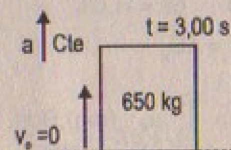
Cuántos: x focos —— $37{,}94 \times 10^7$ watt

$$\therefore \quad x = \frac{37{,}94}{6} \times 10^6 \text{ watt} = 6{,}32 \times 10^6 \text{ focos}$$

55. Un elevador de 650 kg empieza a moverse desde el reposo. Si se desplaza hacia arriba durante 3,00 s con aceleración constante hasta que alcanza una velocidad de crucero de 1,75 m/s, a) ¿cuál es la potencia promedio del motor del elevador durante este período? b) ¿Cómo se compara esta potencia con la potencia ejercida mientras se mueve a su velocidad de crucero?

Resolución:

$v_f = 1{,}75$ m/s



Parte (a) Potencia = F.v =

$$\text{Sabemos que: } a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{1{,}75}{3} = 58{,}3 \text{ m/s}^2$$

$\Rightarrow \quad F - (650 \text{ kg})(10) = (65a)(58{,}3) \quad \Rightarrow \quad F = 44\,395 \text{ N} \cong 7{,}92$ hp

Cinemática: $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$

$\Rightarrow \quad (1{,}75)^2 = 0 + 2(58{,}3)(d) \quad \therefore \quad d = 0{,}026$ m

$$\text{Luego:} \quad P = \frac{W}{t} = \frac{44\,395 \times (0{,}026)}{3{,}00 \text{ s}} = 384{,}76 \text{ watts}$$

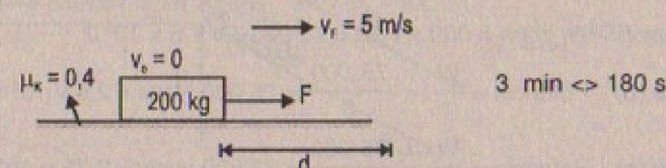
Parte (b) $F - mg = m(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F = (650 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 6\,500 \text{ N} \cong 14{,}9$ hp

Entonces: Potencia = $F.v = 6\,500 \times (1{,}75) = 11{,}375$ watts

Esta potencia es aproximadamente 30 veces la potencia anterior.

56. Un motor jala una caja de 200 kg por una superficie plana. Si el coeficiente de fricción entre la caja y la superficie es 0,40, a) ¿cuánta potencia debe entregar el motor para mover la caja a 5,0 m/s? b) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor en 3,0 min?

Resolución:



3 min <> 180 s

Parte (b)

Cinemática: $F - f_r = m(a) = 200\,(0.03)$

$$\Rightarrow \quad F = \mu_k \,.\, N + ma = m_k\, \mu g + m\frac{v_F}{t} = (0{,}4)(2\,000) + \frac{200(5)}{180}$$

$\therefore \quad F = 805{,}6$ N

$$\text{Luego:} \quad W = F \times d = 805{,}6\left[\frac{v_F^2}{2a}\right] = \frac{805{,}6}{2(0{,}03)} \times 25 = 33\,566{,}7 \text{ J}$$

$$\textbf{Parte (a)} \quad \text{Potencia} = \frac{W_{total}}{t} = \frac{W_{fricción} + W_F}{t}$$

$W_{fricción} = -(0{,}4)(200)(10)(416{,}67) = -333\,333{,}3$ J

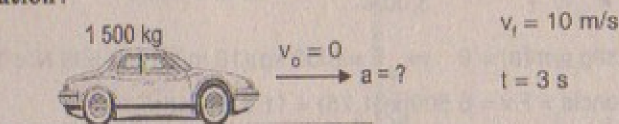
$W_{fuerza} = 33\,566{,}7$ J

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{33\,566{,}7 - 333\,333{,}3}{180} = -1\,665{,}4 \text{ watts}$$

57. Un auto de 1 500 kg acelera uniformemente desde el reposo hasta 10 m/s en 3,0 s. Encuentre: a) el trabajo efectuado sobre el auto en este tiempo, b) la potencia promedio entregada por el motor en los primeros 3,0 s, y c) la potencia instantánea entregada por el motor en t = 2,0 s.

57-A. Un auto de masa *m* acelera uniformemente desde el reposo hasta una velocidad *v* en un tiempo *t*. Encuentre a) el trabajo efectuado sobre el auto en este tiempo, b) la potencia promedio entregada por el motor durante este tiempo, y c) la potencia instantánea entregada por el motor durante este tiempo, y c) la potencia instantánea entregada por el motor en un tiempo menor que *t*, ignorando el arrastre.

Resolución :



Parte (a)

$$F = (1500\ kg)(a) = 1500\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right) = 1\,500\left(\frac{10}{3}\right) = 5\,000\ N$$

$\Rightarrow$ Por cinemática: $d = \dfrac{v_f^2}{2a} = \dfrac{100}{2(10)} \times 3 = 15\ m$

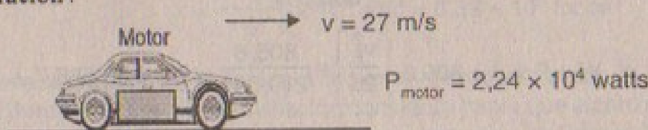
Trabajo: $W_{fuerza} = 5\,000 \times (15) = 75\,000\ J = 7{,}5 \times 10^4\ J$

Parte (b) Potencia $= \dfrac{W}{t} = \dfrac{75\,000}{3} = 25\,000$ watts $\equiv 2{,}5 \times 10^4$ watts

Parte (c) Potencia $= \dfrac{W}{t} = \dfrac{75\,000}{2} = 37\,500$ watts $\equiv 3{,}75 \times 10^4$ watts

58. Cierto motor de automóvil entrega 30,0 cp ($2{,}24 \times 10^4$ W) a sus ruedas cuando se mueve a 27,0 m/s (60 mi/h). ¿Cuál es la fuerza resistiva que actúa sobre el automóvil a esa velocidad?

Resolución :



Sabemos que: P = F.v

$$\Rightarrow\quad F = \frac{P}{v} = \frac{2{,}24 \times 10^4}{27} = 0{,}083 \times 10^4 \quad \therefore \quad F = 830\ N$$

59. Un motor fuera de borda impulsa un bote a través del agua a 10,0 mi/h. EL agua se opone al movimiento hacia adelante del bote con una fuerza de 15,0 lb. ¿Cuánta potencia se entrega a través de la hélice?

Resolución :59

Sabemos que: 1 milla = 1 609 m 1 libra ≈ 0,446 kg

Dato: v = 10 m/h F = 15 lb

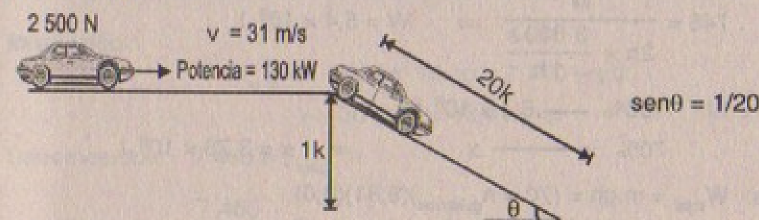
Potencia = F.v

$$\Rightarrow\quad Potencia = 15\ lb \times \frac{0{,}446\ kg}{1\ lb} \times 10\ \frac{mi}{h} \times \frac{1h}{3\,600\ s} \times \frac{1\,609\ m}{1\ mi}$$

$$Potencia = 29{,}9\ kg\ .\ \frac{m}{s} \times 10\ \frac{m}{s^2} = 299\ watts$$

60. Un carro de 2 500 N de peso que opera a una tasa de 130 kW desarrolla una velocidad máxima de 31 m/s sobre un camino horizontal plano. Si se considera que la fuerza resistiva (debida a la fricción y a la resistencia del aire) permanece constante, a) ¿cuál es la máxima velocidad del carro sobre una pendiente de 1 en 20 (es decir, si θ es ángulo de la pendiente con la horizontal, sen θ = 1/20)? b) ¿Cuál es la potencia de salida sobre una pendiente de 1 en 10 si el auto viaja a 10 m/s?

Resolución :

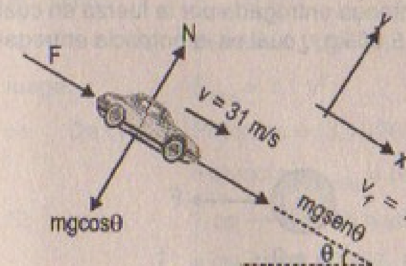


Parte (a)

Sabemos que potencia = 130×10^3 W = F × 31

$\therefore$ $F = 42 \times 10^2 = 4\,200$ N

Entonces:



masa del carro = 250 kg

senθ = 1/20

Por segunda ley:

$$F + mgsen\theta = ma \quad \Rightarrow \quad 4\,200 + 2\,500\left(\frac{1}{20}\right) = 250a$$

$$\therefore \quad a = 17{,}3\ m/s^2$$

Por cinemática:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d) \Rightarrow v_f^2 = (31)^2 + 2(17,3)(20)$$

$$\therefore \quad v_f = 40,66 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$sen\theta = 1/10$

$$\Rightarrow \quad F + mgsen\theta = ma \Rightarrow 4\,200 + 2\,500\left(\frac{1}{10}\right) = 250(a)$$

$$\therefore \quad a = 17,8 \text{ m/s}^2$$

luego: Potencia = $F_{total} \cdot v = 4\,450\,(10) = 445\,000$ watts

61. Si un caballo puede mantener un 1,0 cp de salida durante 2,0 h, ¿cuántos bultos de guijarros de 70,0 kg puede levantar (vía cierto arreglo de poleas) hasta el techo de una casa de 8,0 m de altura, suponiendo una eficiencia de 70%?

Resolución:

1 cp = 746 watts

$$\Rightarrow \quad 746 = \frac{W}{2h \times \frac{3\,600\,s}{1\,h}} \Rightarrow W = 5,4 \times 10^6 \text{ J}$$

Luego: Si: 100% —— $5,4 \times 10^6$ J

70% —— x $\Rightarrow$ $x = 3,78 \times 10^6$ J

entonces: $W_{total} = m.gh = (70 \times n_{guijarros})(9,81)(8,0)$

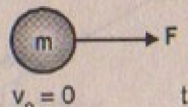
$$\Rightarrow \quad 3,78 \times 10^6 = 70 \times n_{guijarros} \times (9,81)(8,0)$$

$$\therefore \quad n_{guijarros} = 685$$

62. Una fuerza **F** actúa sobre una partícula de masa *m*. La partícula parte del reposo en t = 0. a) Demuestre que la potencia instantánea entregada por la fuerza en cualquier tiempo *t* es (F^2/m) t. b) Si F = 20 N y *m* = 5,00 kg, ¿cuál es la potencia entregada en *t* = 3,00 s?

Resolución:

Parte (a)



Por demostrar:

$$\text{potencia} = \left(\frac{F^2}{m}\right)t = \left(\frac{F}{m}\right)Ft$$

Por cinemática: $v = v_o + a.t \Rightarrow v = at = \frac{F}{m}t$ ... (1)

Sabemos que: $P = F.v \Rightarrow$ Potencia $= F\left(\frac{F}{m}\right)t$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = \frac{F^2}{m}.t \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b) F = 20,0 N ; m = 5,00 kg ; t = 3,00 s

$$\text{Potencia} = \frac{F^2}{m}.t = \frac{(20,0)^2}{5,0} \times (3,00)$$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = 240 \text{ watts}$$

ENERGÍA Y AUTOMÓVILES

63. Los caballos de potencia necesarios para mantener en movimiento un auto aerodinámico de 1 500 kg de masa a 30,0 mi/h son aproximadamente 10,0 cp. Si se considera que la fuerza retardadora total debida a la fricción, la resistencia del aire, etcétera, es proporcional al cuadrado de la velocidad del auto, ¿cuántos caballos de potencia se necesitan para mantener el auto a 60,0 mi/h?

Resolución:

$M_{auto} = 1\,500$ kg 10 cp = 7 460 watts

$v = 30$ mi/h $\approx 13,41$ m/s

Sabemos que: $7\,460 = F_{total} \cdot v$

$$\Rightarrow \quad \frac{7\,460}{13,41} = F_{total} \quad \therefore \quad F_{total} = 556,3 \text{ N}$$

A: $v = 60$ mi/h $\approx 26,82$ m/s

Potencia $= F_{total} \times v$ ... (1)

Por dato: $F_{total} = kv^2$

$$\Rightarrow \quad 556,3 = k\,(13,41)^2 \quad \therefore \quad k = 3,1 \text{ N/m}^2$$

luego: $F_{total} = 3,1\,v^2$

$\Rightarrow$ De (1): Potencia $= (3,1)(26,82)^2\,[26,82]$

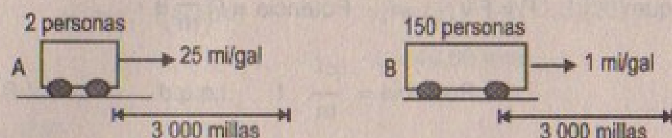
$\text{Potencia}_{(60\ mill/h)} = 59\,805,1$ watts

Si en: 1 cp —— 746 watts

x cp —— 59 805,1 watts $\therefore$ x = 80 cp

64. Un carro de pasajeros que transporta dos personas tiene una economía de combustible de 25 mi/gal. Recorre 3 000 millas. Un avión jet que hace el mismo viaje con 150 pasajeros tiene una economía de combustible de 1,0 mi/gal. Compare el combustible consumido por pasajero para las dos formas de transporte.

Resolución :



En el primer carro cada persona consume: $\dfrac{3\,000\text{ mi}}{25\text{ mi/gal}} = \dfrac{120}{2}$galones

$\therefore$ Consume: 60 galones

En el segundo se consume: $\dfrac{3\,000\text{ mi}}{1\text{ mi/gal}} = 3\,000$ galones

$\therefore$ Cada persona consume: $\dfrac{3\,000}{150} = 20$ galones

65. Un auto compacto de 900 kg de masa tiene una eficiencia de motor total de 15%. (Es decir, 15% de la energía suministrada por el combustible se transforma en la energía cinética del auto). a) Si un galón de gasolina proporciona $1{,}34 \times 10^8$ J de energía, encuentre la cantidad de gasolina consumida al acelerar el auto desde el reposo hasta 55 mph. b) ¿Cuántas aceleraciones de este tipo proporcionará un galón? c) Se afirma que el auto ofrece un rendimiento de combustible de 38 mi/gal a 55 mph. ¿Cuál es la potencia entregada a las ruedas (para superar la fricción) cuando el auto se conduce a esta velocidad?

Resolución :



Dato:

15% energía del comb. $\equiv E_k$

55 mph $\equiv$ 0,0153 m/s

$$E_{k\ consume} = \frac{1}{2}(900)(0{,}0153)^2 = 0{,}1053 \text{ J}$$

Sabemos que: 100% —— $1{,}34 \times 10^8$ J

15% ———— x $\qquad\therefore\quad x = 2 \times 10^7$ J/galón)

$$\Rightarrow \quad \frac{0{,}1053\text{ J}}{2\times10^7\text{ J/galon}} = 0{,}053 \times 10^{-7}\text{ galones}$$

Parte (b) a = 73,8 aceleraciones

Parte (c) 38 mi /galón ≈ 38(1 609) = 61 142 m/galón

55 m/h ≈ 0,0153 m/s

$$\frac{0{,}0153}{61142} = 2 \times 10^{-7}\text{ gal/s}$$

Luego: Potencia = 2×10^7 gal/s $\times\ 2 \times 10^7$ J/galón = 4 watts

66. Suponga que el auto vacío descrito en la tabla 7.3 tiene una economía de combustible de 6,40 km/litro (15 mi/gal) cuando viaja a 26,8 m/s (60 mi/h). Suponiendo una eficiencia constante, determine la economía de combustible del auto si la masa total de los pasajeros más la del conductor es 350 kg.

Resolución :

15 mi/gal 60 mi/hora

$$\Rightarrow \quad \frac{60}{15} = 4\text{ gal/hora}$$

$$E_k = \frac{1}{2}(350)(26{,}8)^2 = 125\,692\text{ joules}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{125\,692\text{ J/gal}\times 4\text{ gal/h}}{3{,}6\times10^3\text{ s/h}} = 139{,}66\text{ watts}$$

67. Cuando se instala un acondicionador de aire al auto descrito en el problema 66, la potencia de salida adicional que se requiere para operar dicho aparato es de 1,54 kW. Si la economía de combustible es 6,40 km/litro sin el acondicionador de aire, ¿cuál es ésta cuando el acondicionador se encuentra en operación?

Resolución :

$M_{carro} = 350$ kg

Cuando el carro está en operación, sin el aire acondicionado se consume:

4 galones/hora, cuando viaja a 60 mi/hora

energía adicional de salida = 1 540 J/s ≡ 1 540 × 3 600 J/hora = $5\,544 \times 10^3$ J/h

$\Rightarrow$ F.v = $5\,554 \times 10^3$ N.m/h $\quad\Rightarrow\quad$ F = 57,5 N

Pero F.d = $5\,544 \times 10^3$ $\quad\Rightarrow\quad$ d = 96,32 km/h

En consecuencia: $\quad 0{,}042\text{ km/G}\ \dfrac{1\text{ gal}}{4\text{ L}} = 5{,}9\text{ km/L}$

ENERGÍA CINÉTICA A ALTAS VELOCIDADES

68. Un electrón se mueve con una velocidad de 0,995 c. a) ¿Cuál es su energía cinética? b) Si se utiliza la expresión clásica para calcular su energía cinética, ¿qué porcentaje de error resultaría?

Resolución :

$v_{e-} = 0{,}995$ c $\qquad$ considerar: $\quad c = 3 \times 10^8$ m/s

$m_{e-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

Por condición:

$$E_k = m.c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right] = (9{,}1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}995)^2}} - 1\right]$$

$$E_k = 81{,}9 \times 10^{15}\left(\frac{1}{0{,}1}-1\right) = 9 \times (81{,}9) \times 10^{-15}$$

$$\therefore \quad E_k = 737 \times 10^{-15} \text{ joules}$$

Parte (b)

$$E_k = \frac{1}{2}m_{e-}v_e^2 = \frac{1}{2}(9{,}1 \times 10^{-31})(0{,}995)^2(3 \times 10^8)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_k = 450{,}5 \times 10^{-15} \times 9 \times 10^{-12} \approx 4\,054 \times 10^{-17} \text{ joules}$$

$$\frac{4\,054 \times 10^{-17}}{737 \times 10^{-15}} \times 100\% = 5{,}5\% \text{ de error}$$

69. Un protón en un acelerador de alta energía se mueve con una velocidad igual a c/2. Con el teorema del trabajo y la energía determine el trabajo requerido para aumentar su velocidad a, a) 0,75 c, b) 0,995 c.

Resolución:

$(m_{e-}) \rightarrow \quad v_{e-} = c/2 \qquad c \approx 3 \times 10^8$ m/s

$m_{e-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

Parte (a) $v_i = 0{,}5\,c \qquad v_f = 0{,}75\,c$

$W = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad W = m.c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_f}{c}\right)^2}}-1\right] - mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_i}{c}\right)^2}}-1\right]$$

Entonces:

Reemplazando: $W = (9{,}1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}75)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\right]$

$$\therefore \quad W = 5{,}37 \times 10^{-11} \text{ J}$$

Parte (b) $v_i = 0{,}5\,c \qquad v_f = 0{,}995\,c$

$W = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad W = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}995)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad W = (9{,}1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}995)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\right]$$

$$\therefore \quad W = 1{,}33 \times 10^{-9} \text{ J}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

70. Las moléculas diatómicas ejercen fuerzas atractivas entre sí a grandes distancias y fuerzas repulsivas a cortas distancias. Para muchas moléculas la ley de Lennard-Jones es una buena aproximación a la magnitud de las fuerzas intermoleculares:

$$F = F_o\left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^7\right]$$

donde r es la distancia de centro a centro entre los átomos en la molécula, σ es un parámetro de la longitud y F_o es la fuerza cuando r = σ. Para una molécula de oxígeno, $F_o = 9{,}6 \times 10^{-11}$ N y $\sigma = 3{,}5 \times 10^{-10}$ m. Determine el trabajo realizado por esta fuerza de $r = 4{,}0 \times 10^{-10}$ m a $r = 9{,}0 \times 10^{-10}$ m.

Resolución:



Dato: $F_o = 9{,}6 \times 10^{-11}$ N $\qquad \sigma = 3{,}5 \times 10^{-10}$ m

$\Delta r = r_f - r_i = 9{,}0 \times 10^{-10} - 4{,}0 \times 10^{-10} = 5{,}0 \times 10^{-10}$ m

$$\Rightarrow \quad F = F\left[2\left(\frac{\sigma}{\Delta r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{\Delta r}\right)^7\right]$$

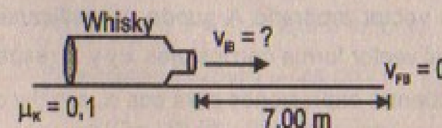
$$\Rightarrow \quad F = (9{,}6 \times 10^{-11})\left[2\left(\frac{3{,}5 \times 10^{-10}}{5{,}0 \times 10^{-10}}\right)^{13} - \left(\frac{3{,}5 \times 10^{-10}}{5{,}0 \times 10^{-10}}\right)^7\right]$$

$$\therefore \quad F = 9{,}6 \times 10^{-11}\,[(0{,}7)^{13}(2) - (0{,}7)^7] = -9{,}6 \times 10^{-11}\,(0{,}06)$$

$$\Rightarrow \quad W = -(0{,}06)(9{,}6 \times 10^{-11})(5{,}0 \times 10^{-10}) = -2{,}9 \times 10^{-21} \text{ J}$$

71. Si una cantinera hace deslizar una botella de whisky sobre una barra horizontal al enviársela a un cliente a 7,0 m de distancia. ¿Con qué velocidad suelta la botella si el coeficiente de fricción de deslizamiento es 0,10 y la botella se detiene frente al cliente?

Resolución:



$$W = \Delta E_k$$

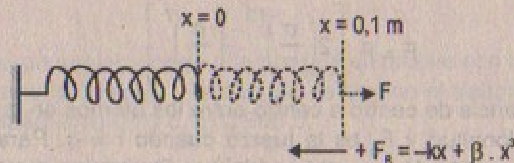
$$\Rightarrow \quad -f_r(d) = -\frac{1}{2} m\, v_{ib}^2 \quad \Rightarrow \quad -(\mu_k)(mg)(d) = -\frac{1}{2} m v_{ib}^2$$

$$\therefore \quad v_{ib} = \sqrt{2\,\mu_k\, g d} = \sqrt{2(0,1)(10)(7)}$$

Entonces: $v_{i\,botella} = 3{,}742$ m/s

72. Cuando se extiende un resorte hasta cerca de su límite elástico, su fuerza satisface la ecuación $F = -kx + \beta x^3$. Si $k = 10$ N/m y $\beta = 100$ N/m³, calcule el trabajo efectuado por esta fuerza cuando el resorte se alarga 0,10 m.

Resolución :



Dato: $k = 10$ N/m $\quad b = 100$ N/m³

$$W_R = \int F_R\, dx = \int_0^{0,1} \left(-10x + 100x^3\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad W_R = -5x^2 \Big|_0^{0,1} + 25x^4 \Big|_0^{0,1} = -0{,}05 + 0{,}0025$$

$$\therefore \quad W_R = -0{,}0475 \text{ J}$$

73. Una partícula de masa *m* se mueve con aceleración constante **a**. si el vector de posición y la velocidad iniciales de la partícula son $\mathbf{r}_o$ y $\mathbf{v}_o$, respectivamente, muestre que su rapidez *v* en cualquier instante satisface la ecuación

$$v^2 = v_o^2 + 2a\,(r - r_o)$$

donde **r** es el vector de posición de la partícula en ese mismo tiempo.

Resolución :

Por demostrar: $\boxed{v^2 = v_o + 2a\,(r - r_o)}$

$r_o, v_o, a =$ dato

Por cinemática: $r(t) = r_o + v_o.t + \frac{1}{2} at^2$

Además: $W = F\,.\,d = ma\,(r - r_o) = \frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_o^2$

$$\therefore \quad 2a\,(r - r_o) + v_o^2 = v_f^2 = v^2 \quad \text{l.q.q.d.}$$

74. La dirección de un vector arbitrario A puede especificarse por completo con los ángulos α, β, γ que el vector forma con los ejes *x,y* y *z*, respectivamente. Si $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, a) encuentre expresiones para cos α, cos β y cos γ (éstos se conocen como los *cosenos directores)* y b) demuestre que estos ángulos satisfacen la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (*Sugerencia*: Considere el producto escalar de A con $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$ por separado).

Resolución :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Parte (a)

$$\frac{A_x}{|\vec{A}|} = \cos\alpha\,; \quad \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \cos\beta\,; \quad \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \cos\gamma$$

Parte (b)

Elevando al cuadrado las expresiones en la parte (a)

$$\frac{A_x^2}{A^2} = \cos^2\alpha\,; \quad \frac{A_y^2}{A^2} = \cos^2\beta\,; \quad \frac{A_z^2}{A^2} = \cos^2\gamma$$

sumando: $\dfrac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \quad \ldots (1)$

sabemos que: $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \ldots (2)$

$$\Rightarrow \quad (2) \text{ en } (1) \quad \therefore \quad \frac{A^2}{A^2} = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \quad \text{l.q.q.d.}$$

75. Una partícula de 4,0 kg se mueve a lo largo del eje x. su posición varía con el tiempo de acuerdo con $x = t + 2{,}0\,t^3$, donde x se mide en metros y t en segundos. Encuentre, a) la energía cinética en cualquier tiempo *t*, b) la aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo *t*, c) la potencia que se entrega a la partícula en el tiempo *t*, y d) el trabajo efectuado sobre la partícula en el intervalo t = 0 a t = 2,0 s.

Resolución :

$$x_p(t) = t + 2{,}0\,t^3\,; \quad m_p = 4{,}0 \text{ kg}$$

Parte (a) $\quad E_k = \frac{1}{2} mv^2 \ldots (1)$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 1 + 6{,}0\,t^2$$

Luego: $\quad E_k(t) = \frac{1}{2}(4{,}0)\,[1 + 6{,}0\,t^2]^2$

$$\therefore \quad E_k(t) = 2 + 24t^2 + 72t^4 \text{ joules}$$

Parte (b) $\quad a(t) = \dfrac{dv}{dt} = 12{,}0\,t$ m/s²

$$F(t) = m.a(t) = 4{,}0 \times 12{,}0t = 48{,}0t \text{ N}$$

Parte (c) $\quad \text{Potencia}(t) = F(t)v(t) = (48{,}0t)\,(1 + 6{,}0t^2)$

$$\therefore \quad P(t) = (48{,}0t + 289{,}8t^3) \text{ watts}$$

Parte (d)

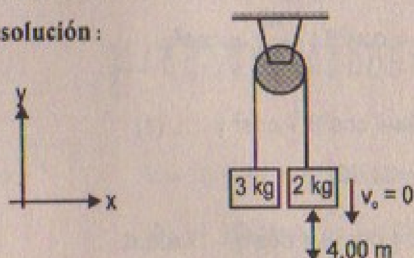
$$W(t = 0 \rightarrow t = 2\text{ s})\ \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad W = F(t)x(t) = 48,0 \times (2)\,[2 + 3,0\,(2)^3] = 2 + 24(2)^2 + 72(2^4)$$

$$\therefore \quad W = 2 + 96 + 1\,152 = 1\,250 \text{ joules} \equiv 125 \times 10^3$$

76. Una máquina de Atwood tiene una masa de 3,00 kg y una masa de 2,00 kg en los extremos de la cuerda (Fig. 5.12). La masa de 2,00 kg se deja caer al piso desde el reposo, 4,00 m abajo de la masa de 3,00 kg. a) Si la polea no ofrece fricción, ¿cuál será la velocidad de las masas cuando pasen una frente a la otra? b) Suponga que la polea no gira y que la cuerda desliza sobre ella. Si la fuerza de fricción total entre la polea y la cuerda es 5,00 N, ¿cuáles son las velocidades cuando las masas pasan una frente a la otra?

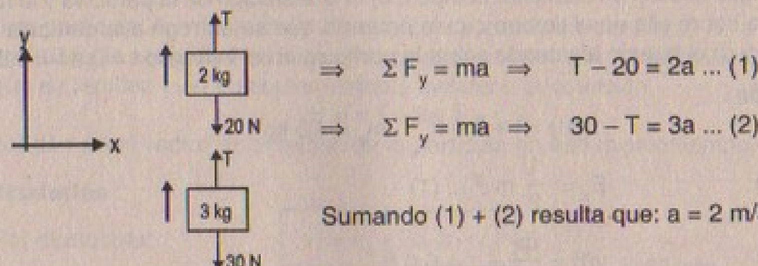
Resolución:



Considerar: $g = 10$ m/s²

Parte (a) $\quad v_{(2\,kg)} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(10)(4{,}00)} \approx 8{,}94$ m/s

Sabemos que: por dinámica:



$$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = ma \quad \Rightarrow \quad T - 20 = 2a \ \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = ma \quad \Rightarrow \quad 30 - T = 3a \ \ldots (2)$$

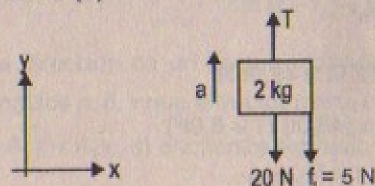
Sumando (1) + (2) resulta que: $a = 2$ m/s²

Por cinemática: $\quad v_{(2\,kg)} = v_{i\,(2\,kg)} + 10t \qquad \therefore \quad t = 0{,}894$ s

Entonces: $\quad v_{(3\,kg)} = v_{i\,(3\,kg)} + at$

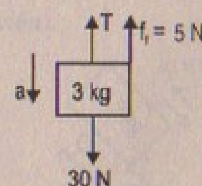
$$\Rightarrow \quad v_{(3\,kg)} = 0 + 2(0{,}894) \qquad \therefore \quad v_{(3\,kg)} = 1{,}788 \text{ m/s}$$

Parte (b)



Tenemos que: $\quad T - 20 - 5 = 2a$

$$\Rightarrow \quad T = 2a + 25 \ \ldots (1)$$



Además: $\quad 30 - T - 5 = 3a$

$$\Rightarrow \quad T = 25 - 3a \ \ldots (2)$$

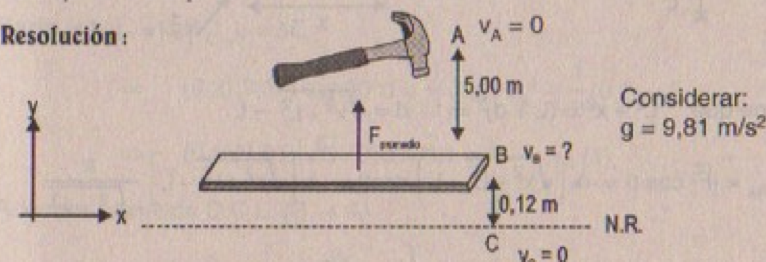
(1) + (2) resulta que $a = 0$

$$\therefore \quad T = 25 \text{ N}$$

$$\therefore \quad v_{(3\,kg)} = v_{(2\,kg)} = \sqrt{2(10)(4)} \approx 8{,}94 \text{ m/s}$$

77. Con un martinete de 2 100 kg se clava una viga de acero en forma de I en el suelo. El martinete desciende 5,0 m antes de hacer contacto con la viga, y la introduce 12 cm en el suelo, antes de que quede en reposo. Utilizando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce sobre el martinete mientras éste queda en reposo.

Resolución:



Considerar: $g = 9{,}81$ m/s²

$$W_{martinete} = W_{peso} = m(g)\,(d) = \Delta E_k = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g(d)} \quad \therefore \quad \Rightarrow V_B = \sqrt{2(9{,}8)(5)} \approx 9{,}9 \text{ m/s}$$

$$W_{b \rightarrow c} = \Delta E_k$$

$$-F_{promedio}\,(0{,}12) = \frac{1}{2} m\, v_C^2 - \frac{1}{2} m\, v_B^2 \quad \Rightarrow \quad F_{prom} = \frac{2\,100\,(98{,}1)}{2(0{,}12)}$$

$$\therefore \quad F_{prom} = 858{,}4 \text{ kN}$$

78. Una partícula de masa m está unida a dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción, como muestra la figura P7.78. ambos resortes tienen constante k. a) Si la partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, demuestre que la fuerza ejercida sobre la partícula por los resortes es

$$\vec{F} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right)\hat{i}$$

b) Determina la cantidad de trabajo que esta fuerza efectúa al mover la partícula de x = A a x = 0.

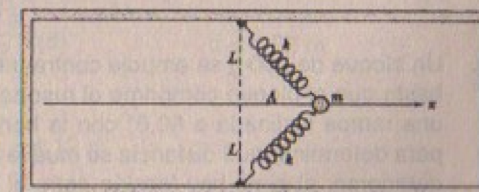


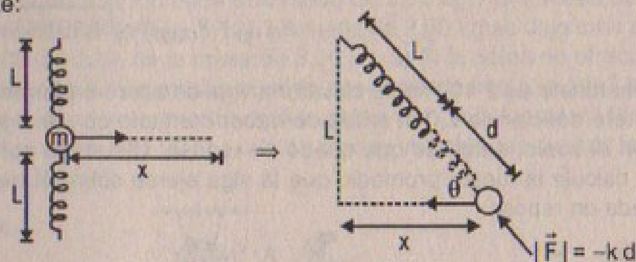
Figura P7.78

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar $\vec{F} = -2kx\left[1-\dfrac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right]\hat{i}$

Inicialmente:



Sabemos que: $L^2 + x^2 = (L+d)^2 \Rightarrow \quad d = \sqrt{x^2+L^2} - L$

$$\Rightarrow \quad F_{Rx} = |\vec{F}|\cos\theta = -k\left(\sqrt{x^2+L^2}-L\right)\cos\theta = -k\left[\sqrt{x^2+L^2}-L\right]\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$$\therefore \quad F_{RX} = -kx\left[1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{TOTAL DEL RESORTE SOBRE "m"}} = -2k\,x\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)\hat{i}$$

Parte (b) $\qquad x = A \;\; a \;\; x = 0$

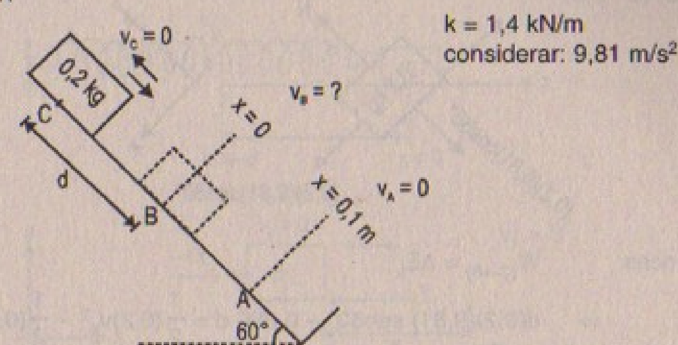
$$\int_A^0 -2kx\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)dx = \int_0^A -2kx\,dx + \int_A^0 \frac{2k\,xL}{\sqrt{L^2+x^2}}\,dx$$

$$\therefore \quad W_{(x=A \to x=0)} = kx^2\Big|_0^A + 2kL\sqrt{L^2+x^2}\Big|_A^0$$

$$\Rightarrow \quad W = kA^2 + 2kL^2 - 2kL\sqrt{L^2+A^2}$$

79. Un bloque de 200 g se empuja contra un resorte de constante de fuerza 1,40 kN/ m hasta que el bloque comprime el resorte 10,0 cm. El resorte descansa en el pie de una rampa inclinada a 60,0° con la horizontal. Utilice consideraciones de energía para determinar qué distancia se mueve el bloque hacia arriba de la rampa antes de detenerse: a) si no hay fricción entre el bloque y la rampa y b) si el coeficiente de fricción cinético es 0,400.

Resolución :



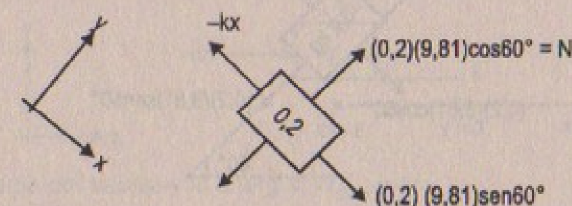
k = 1,4 kN/m
considerar: 9,81 m/s²

Parte (a) $\qquad W_{C\to B} = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad (0,2)(9,81)\,\text{sen}60°d = \frac{1}{2}(0,2)\,v_B^2 - \frac{1}{2}(0,2)\,v_A^2$$

$$\Rightarrow \quad (0,2)(9,81)\left(\sqrt{3}/2\right)d = 0,1\,v_B^2 \qquad \ldots (1)$$

Además: haciendo D.C.L. (B → A)



luego: $\qquad W_{(B\to A)} = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{0,1} -1400x\,dx + (0,2)(9,81)\text{sen}60°\,(0,1) = \frac{1}{2}(0,2)v_A^2 - \frac{1}{2}(0,2)v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad -700x^2\Big|_0^{0,1} + 0,17 = -\frac{1}{2}(0,2)v_B^2 \quad \ldots (2)$$

Entonces (1) en (2)

$$-7 + 0,17 = -(0,2)(9,81)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(d) \qquad \therefore \quad d = 4,02 \text{ m}$$

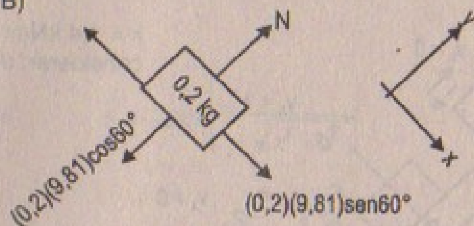
Luego $\qquad d_{total} = d + 0,1 = 4,02 + 0,1$

$$\therefore \quad d_{total} = 4,12 \text{ m}$$

Parte (b)

Si: $\mu_k = 0,4 \qquad f_r = (0,4)(0,2)(9,81)\cos60° = 0,680$ N

D.C.L. (C → B)

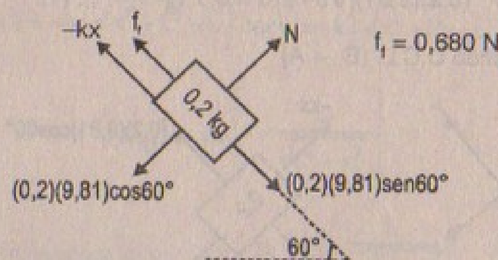


Entonces: $W_{(C\to B)} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad d(0,2)(9,81)\,sen60° - 0,680\,d = \frac{1}{2}(0,2)v_B^2 - \frac{1}{2}(0,2)v_c^2$

$d[(0,2)(9,81)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0,680] = 0,1\,v_B^2 \quad ...(1)$

Por otro lado: Haciendo (D.C.L.) de B → A



Entonces: $W_{(B\to A)} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad (0,2)(9,81)\left(\sqrt{3}/2\right)(0,1) - 0,680\,.\,(0,1) - \int_0^{0,1} 1\,400\,x dx = \frac{1}{2}(0,2)v_A^2 - \frac{1}{2}(0,2)\,v_B^2$

$\Rightarrow \quad 0,17 - 0,680 - 7 = -0,1\,v_B^2 \; ... (2)$

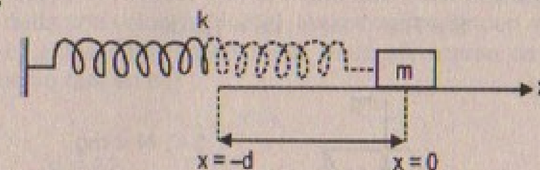
Reemplazando (1) en (2): $-6,86924 = -0,1\,v_b^2 = 1,019d$

Luego: $d = 3,4$ m

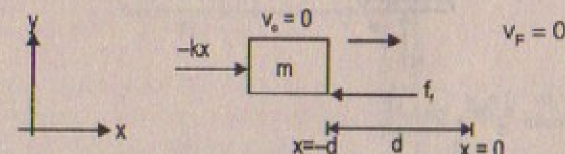
$\Rightarrow \quad d_{total} = 3,4 + 0,1 = 3,5$ m

80. Un bloque de masa *m* se une a un resorte sin masa de constante de fuerza *k*, como en la figura 7.8. El resorte se comprime una distancia *d* desde su posición de equilibrio y se suelta a partir del reposo. a) Si el bloque se detiene cuando alcanza por primera vez la posición de equilibrio, ¿cuál es el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie? b) Si el bloque se detiene por primera vez cuando el resorte está alargado una distancia d/2 de su posición de equilibrio, ¿cuál es el valor de μ?

Resolución :



Parte (a)

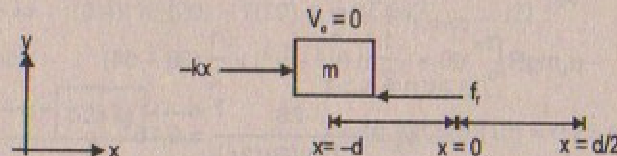


Por teorema del trabajo y la energía: $W_{total} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad -\int_{-d}^{0} kx\,dx - \mu_e mg\,(d) = 0$

$\left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^d = \mu_e\,mg\,d \;\therefore\; d = \frac{2.\mu_e.g}{km}$, luego: $\mu_e = \frac{kmd}{2g}$

Parte (b)



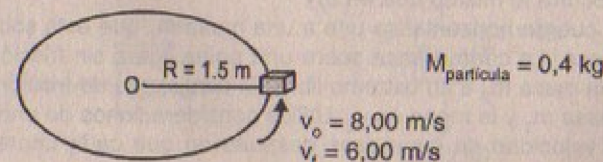
Por el teorema del trabajo y la energía: $W_{total} = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad -\int_{-d}^{d/2} k\,x dx - \mu.mg\,d = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{kx^2}{2}\right|_{d/2}^{d} = \mu\,.\,mg\left(\frac{3d}{2}\right)$

$\therefore \quad \mu = \frac{3kd}{4\,mg}$

81. Una partícula de 0,400 kg se desliza sobre una pista circular horizontal de 1,50 m de radio. Se le da una velocidad inicial de 8,00 m/s. Después de una revolución, su velocidad se reduce a 6,00 m/s por causa de la fricción. a) Encuentre la energía perdida por la fricción en una revolución. b) Calcule el coeficiente de fricción cinético. c) ¿Cuántas revoluciones completa la partícula antes de detenerse?

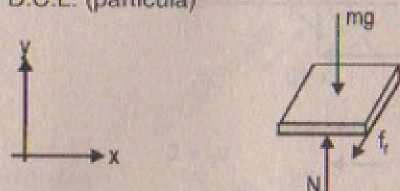
Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $S = R.\theta \Rightarrow ds = 1{,}5\, d\theta$

D.C.L. (partícula)



$N = mg$

$f_r = \mu_k \cdot mg$

$$W_{fricción} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_k = \frac{1}{2}(0{,}4)\,[\,v_f^2 - v_i^2\,]$$

$$\therefore \quad \Delta E_k = -\frac{1}{2}\,(0{,}4)(28) = -5{,}6 \text{ J}$$

Parte (b) $W_{fricción} = \Delta E_K$

$$-\int_0^{2\pi} f_r\, ds = \Delta E_k = \frac{1}{2} m\,[v_f^2 - v_i^2]$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_k mgR\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} m\,(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}(36 - 64)$$

$$\therefore \quad \mu_k = \frac{-28}{-2(g)(R)(2\pi)} = 0{,}15$$

Parte (c)

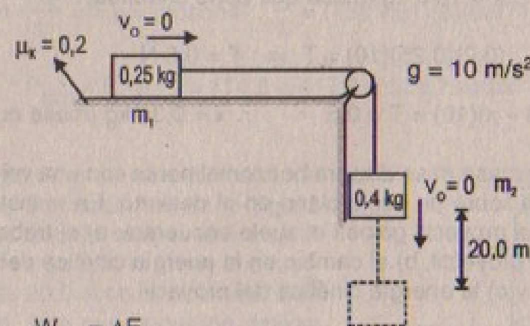
Sabemos que $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\,(2\pi) \quad \therefore \quad \alpha = 91{,}1 \text{ rad/s}^2$

Luego: $+\frac{v_i^2}{R^2} = 4\pi\, n\,(91{,}1) \qquad \therefore \quad n = 2{,}29 \text{ rev.}$

82. Una cuerda horizontal se une a una masa de 0,25 kg que está sobre una mesa horizontal rugosa. La cuerda pasa sobre una polea ligera sin fricción y después se le agrega una masa de 0,40 kg a su extremo libre. El coeficiente de fricción de deslizamiento entre la masa de 0,25 kg y la mesa es 0,20. Utilice consideraciones de energía para determinar a) la velocidad de las masas después de que cada una se ha movido 20 m desde el reposo, y b) la masa que debe añadirse a la masa de 0,25 kg de modo que, dada una velocidad inicial, las masas continúen moviéndose a velocidad constante. c) ¿Qué cantidad de masa debe eliminarse de la masa de 0,40 kg para que ocurra lo mismo que en b)?

82A. Una cuerda horizontal se une a una masa m_1 que está sobre una mesa horizontal rugosa. La cuerda pasa sobre una polea ligera sin fricción y después se le agrega una masa m_2 a su extremo libre. El coeficiente de fricción de deslizamiento entre la masa m_1 y la mesa es μ_c. Utilice consideraciones de energía para determinar, a) la velocidad de las masas después de que cada una se ha movido una distancia *d* desde el reposo, y b) la masa que debe añadirse a la masa de m_1 de modo que, dada una velocidad inicial, las masas continúen moviéndose a velocidad constante. c) ¿Qué cantidad de masa debe eliminarse de la masa m_2 para que ocurra lo mismo que en b)?

Resolución :



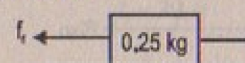
Parte (a) $W_{m1} = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad T(20) - (0{,}2)(0{,}25)(10)(20) = \frac{1}{2}(0{,}25)v_f^2{}_{(m1)} \quad \ldots (1)$$

$$W_{m2} = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}4)(10)(20) - T(20) = \frac{1}{2}(0{,}4)v_f^2{}_{(m2)} \ldots (2)$$

Por dinámica:



$T - f_r = 0{,}25\,(a)$

$\Rightarrow \quad T - (0{,}2)(0{,}25)(10) = 0{,}25\, a \quad \ldots (a)$

$(0{,}4)(10) - T = 0{,}4\, a \quad \ldots (b)$



sumando (a) + (b)

$4 - 0{,}5 = 0{,}65a \qquad \therefore \; a = 5{,}385 \text{ m/s}^2$

luego $T = 4 - (0{,}4)(5{,}385) = 1{,}85$ N

entonces de (1)

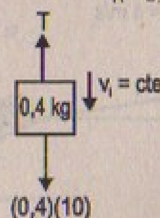
$$1{,}85\,(20) - 10{,}08 = 0{,}125\; v_{f(m_1)}^2 \qquad \therefore \qquad v_f(m_1) = 14{,}68 \text{ m/s}$$

entonces de (2)

$$0{,}4(10)(20) - 1{,}85\,(20) = 0{,}2\; v_{f(m_2)}^2 \qquad \therefore \qquad v_f(m_2) = 14{,}66 \text{ m/s}$$

Parte (b)





Por dinámica: $(0,2)(0,25 + x)(10) = T$

pero: $T = (0,4)(10)$ $\therefore$ $T = 4$ N

$\Rightarrow$ $(0,2)(10)(0,25 + x) = 4$

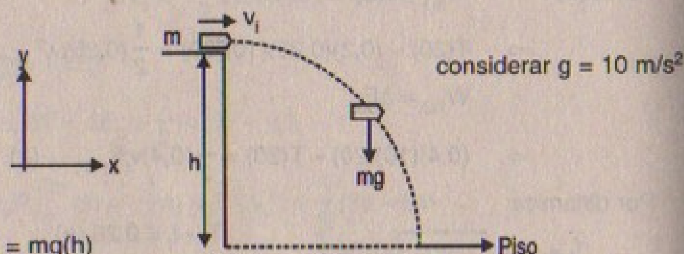
$\therefore$ $x = 1,75$ kg (masa que debe añadirse)

Parte (c) $(0,2)(0,25)(10) = T \Rightarrow T = 0,5$ N

luego: $(0,4 - x)(10) = T = 0,5$ $\therefore x = 0,35$ kg (masa que debe quitarse)

83. Un proyectil de masa *m* se dispara horizontalmente con una velocidad inicial v_i desde una altura *h* sobre un suelo plano en el desierto. En el instante anterior al momento en que el proyectil golpea el suelo encuentre: a) el trabajo hecho por la gravedad sobre el proyectil, b) el cambio en la energía cinética del proyectil desde que fue disparado, y c) la energía cinética del proyectil.

Resolución:



considerar $g = 10$ m/s²

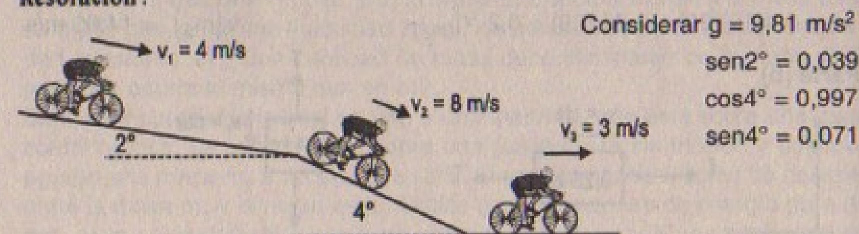
Parte (a) $W_{peso} = mg(h)$

Parte (b) $W_{peso} = \Delta E_k$ $\therefore$ $W_{peso} = \Delta E_k = m.gh$

Parte (c) $E_{k\,proy} = \frac{1}{2}(m)v_i^2 + mg\,h$

84. Una ciclista que, junto con su bicicleta, tiene una masa combinada de 75 kg, desciende a 4,0 m/s por un camino inclinado 2,0° con la horizontal, y desciende a 8,0 m/s por otro camino inclinado 4,0°. Luego se sostiene de un vehículo en movimiento y viaja sobre un camino plano. ¿Qué potencia debe consumir el vehículo para mantener su velocidad en 3,0 m/s? Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es proporcional a su velocidad y suponga que las demás fuerzas friccionantes permanecen constantes.

Resolución:



Considerar $g = 9,81$ m/s²

sen2° = 0,039

cos4° = 0,997

sen4° = 0,071

Potencia total = $P_1 + P_2$

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = F.v = mgsen2° . \frac{d}{t} = (75)(9,81)(4)(0,039) = 114,8 \text{ watts}$$

$$P_2 = \frac{W_2}{t} = F.v = mgsen4° . \frac{d}{t} = (75)(9,81)(8)(0,071) = 417,9 \text{ watts}$$

$$\therefore \quad P_{total} = P_1 + P_2 = 114,8 + 417,9 = 532,7 \text{ watts}$$

85. Una carga de 60,0 kg se levanta mediante las poleas que se muestran en la figura P7.85. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza **F** para levantar la carga 3,00 m si hay una fuerza de fricción de 20,0 N en cada polea? (las poleas no giran, sino que la cuerda desliza sobre cada superficie.)

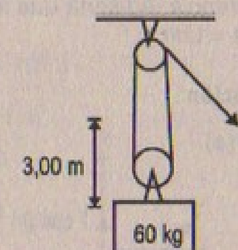


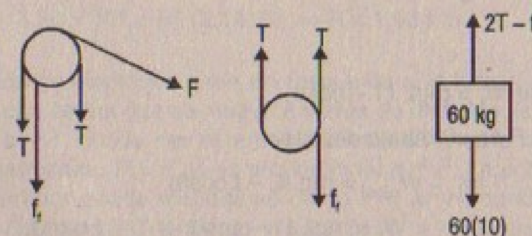
Figura P7.85

Resolución:

Considerar $g = 10$ m/s²

$f_r = 20$ N

D.C.L.



$2T - f_r = Ma$ $\Rightarrow$ $2T - 20 = Ma$ $\therefore$ $T = 310$ N

$Ma + 2T + f_r = F$ $\Rightarrow$ $2(T) + 20 = F - Ma$ $\therefore$ $F = 640$ N

2T – f_r

60 kg

600

$2T - 600 = 6a$ $\Rightarrow$ $2(T) - 600 - 20 = 0$ $\therefore$ $T = 310$ N

como $F = 640$ N $\Rightarrow$ $W_{fuerza} = F.d$

Luego: $W_{fuerza} = 640 \times (3,00)$

$\Rightarrow$ $W_{fuerza} = 1\,920$ J $= 1,92$ kJ

86. Una pequeña esfera de masa *m* cuelga de una cuerda de longitud *L*, como se muestra en la figura P7.86. Una fuerza variable horizontal **F** se aplica a la esfera de manera tal que ésta se mueve lentamente desde la posición vertical hasta que la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Si se considera que la esfera está siempre en equilibrio, a) demuestre que $F = mg\tan\theta$. b) Demuestre que el trabajo hecho por **F** es $mgL(1 - \cos\theta)$. (*Sugerencia*: Advierta que $s = L\theta$, y que por ello $ds = Ld\theta$.)

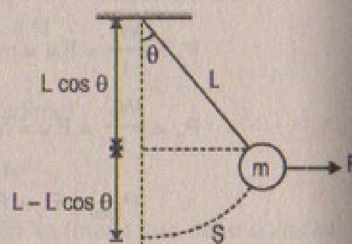
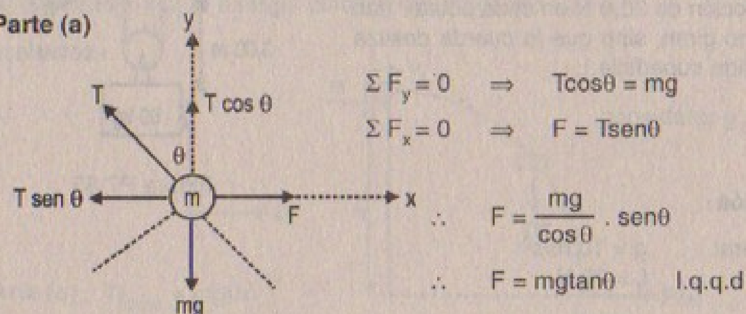


Figura P7.86

Resolución :

Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T\text{sen}\theta$

$\therefore \quad F = \dfrac{mg}{\cos\theta} \cdot \text{sen}\theta$

$\therefore \quad F = mg\tan\theta \qquad$ l.q.q.d

Parte (b)

Por demostrar $W_t = mgL(1 - \cos\theta)$

El trabajo de F es el trabajo del peso

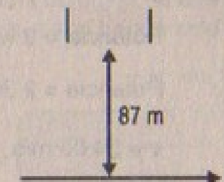
$\Rightarrow \quad W_{peso} = mg(L - L\cos\theta)$

$\therefore \quad W_t = mgL(1 - \cos\theta) \qquad$ l.q.q.d.

87. Para operar uno de los generadores en la presa Grand Coulee Dam en Washington, se requieren $7{,}24 \times 10^8$ W de potencia mecánica. Esta potencia es proporcionada por la gravedad cuando la presa efectúa trabajo sobre el agua mientras ésta cae desde 87 m hacia el generador. La energía cinética adquirida durante la caída se aprovecha para hacer funcionar el generador. a) Pruebe que la potencia disponible del agua es *mgh/t*, donde *m* es la masa del agua que cae desde la altura *h* durante el tiempo *t*. b) Un máximo de aproximadamente 60% puede extraerse y mantener el agua circulando. Calcule la tasa de flujo en kilogramos por segundo. c) Determine el volumen de agua necesario para activar este generador durante un día. d) Si el agua para un día se almacenara en un lago circular de 10 m de profundidad, ¿cuál debería ser el radio del lago?

Resolución :

Parte (a)



Sabemos que: $\quad \text{Potencia} = \dfrac{W}{t}$

Como $\quad W = W_{peso} = mgh$

$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \dfrac{mgh}{t} \qquad$ l.q.q.d.

Parte (b)

Sabemos que: $\quad E_k = mgh = W \Rightarrow E_k = 7{,}24 \times 10^8$ J

Si: $\quad 100\% \text{ — } 7{,}24 \times 10^8$ J
$\quad\quad 60\% \text{ — } x \qquad \Rightarrow x = 4{,}34 \times 10^8$ J

$\Rightarrow \quad M(9{,}81\ \text{m/s}^2)(87\ \text{m}) = 4{,}34 \times 10^8\ \text{kg m}^2/\text{s}^2$

$\therefore \quad M = 8{,}49 \times 10^5$ kg

$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \dfrac{9{,}49 \times 10^5}{15}\ \text{kg} = 8{,}49 \times 10^5\ \text{kg/s}$

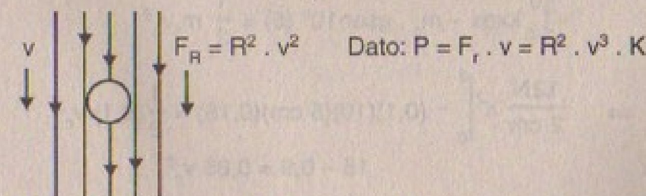
Parte (c) $\quad V = \dfrac{M}{\rho} = \dfrac{8{,}49 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 24\text{h} \times 3\,600 \frac{\text{s}}{1\text{h}}}{1\ \text{kg} \times 10^3/\text{m}^3} = 7{,}34 \times 10^7\ \text{m}^3$

Parte (d) $\quad V = A.h \Rightarrow 7{,}34 \times 10^7 = \pi.R^2.(10)$

$\Rightarrow \quad 7{,}34 \times 10^6 = R^2(3{,}1416) \Rightarrow R = 1{,}53$ km

88. Los aerogeneradores eléctricos giran en respuesta a la fuerza de arrastre de alta velocidad. Para una esfera que se mueve a través de un fluido, la fuerza resistiva F_R es proporcional a r^2v^2, donde *r* es el radio de la esfera y *v* es la velocidad del fluido. La potencia desarrollada, $P = F_Rv$, es proporcional a r^2v^3. La potencia desarrollada por un aerogenerador puede expresarse como $P = ar^2v^3$, donde r es el radio del aerogenerador, v la velocidad del viento y $a = 2{,}00\ \text{W} \cdot \text{s}^3/\text{m}^5$. Para un aerogenerador doméstico con r = 1,50 m, calcule la potencia entregada al generador si, a) v = 8,00 m/s y b) v = 24,0 m/s. Por comparación, un hogar común necesita alrededor de 3,0 kW de energía eléctrica. (*Nota*: Esta representación ignora la eficiencia del sistema, la cual es aproximadamente del 25%).

Resolución :



Por dato: $\text{potencia} = aR^2v^3 \qquad a = 2\ \text{watts} \cdot \text{s}^3/\text{m}^5$

Parte (a) $v = 8{,}00$ m/s $R = 1{,}5$ m

$$\text{Potencia} = 2 \text{ watts } \frac{s^3}{m^5} \times (1{,}5)^2 \, m^2 \left(8.00 \, \frac{m}{s}\right)^3$$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = 2\,304 \text{ watts} = 2{,}304 \times 10^3 \text{ watts}$$

Parte (b) $v = 24{,}00$ m/s $R = 1{,}5$ m

$$\text{Potencia} = 2 \text{ watts } \frac{s^3}{m^5} \times (1{,}5)^2 \, m^2 \times (24 \text{ m/s})^3$$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = 6{,}2208 \times 10^4 \text{ watts}$$

89. El disparador de canicas en un "pinball" incluye un resorte que tiene una constante de fuerza de 1,20 N/cm (Fig. P7.89). La superficie sobre la cual se mueve la canica está inclinada 10,0° respecto de la horizontal. Si el resorte se comprime inicialmente 5,00 cm, encuentre la velocidad de lanzamiento de una canica de 100 g cuando el lanzador se suelta. La fricción y la masa del lanzador son despreciables.

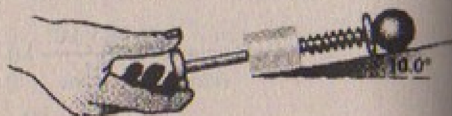
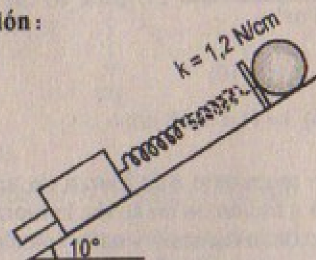


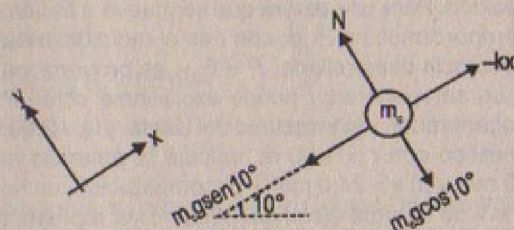
Figura P7.89

Resolución :



$m_c = 0{,}1$ kg

considerar:
$\text{sen}10° \approx 0{,}18$
$\cos 10° \approx 0{,}984$



$$W_{TOTAL} = \Delta E_k$$

$$-\int_{-5}^{0} kx dx - m_c \cdot g\text{sen}10° \, (5) = \frac{1}{2} m_c v_c^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1.2N}{2 \text{ cm}} x^2 \Big|_0^5 - (0{,}1)(10)(5 \text{ cm})(0{,}18) = \frac{1}{2}(0{,}1) \, v_c^2$$

$$15 - 0{,}9 = 0{,}05 \, v_c^2$$

$$\therefore \quad v_c = 16{,}79 \text{ cm/s} \approx 1{,}68 \text{ m/s}$$

90. Suponga que un carro se modela como un cilindro que se mueve con una velocidad v, como en la figura P7.90. En un tiempo Δt, una columna de aire de masa Δm debe moverse una distancia $v\Delta t$ y, en consecuencia, debe brindársele una energía cinética $1/2 \, (\Delta m) \, v^2$. Utilizando este modelo demuestre que la potencia perdida por la resistencia del aire es $1/2 \, \rho A v^3$ y la fuerza resistiva es $1/2 \, \rho A v^2$, donde ρ es la densidad del aire.

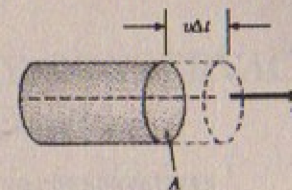


Figura P7.90

Resolución :

Sabemos que: $E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2$

Pero: $\rho = \dfrac{\Delta m}{\text{volumen}} \Rightarrow \Delta m = \rho A v \Delta t$ ... (1)

Además: $\text{Potencia} = \dfrac{E_K}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{(\rho A v \Delta t)}{\Delta t} v^2$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = \frac{1}{2} \rho A v^3 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Por otro lado: $W_{aire} = \Delta E_k = \frac{1}{2} (\Delta m) v^2 \Rightarrow F_r \, (v\Delta t) = \frac{1}{2} (\rho A v \Delta t) v^2$

$$\therefore \quad F_r = \frac{1}{2} \rho A v^2 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Capítulo 8

ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

1. Una partícula de 4,00 kg se mueve desde el origen hasta la posición cuyas coordenadas son x = 5,00 m e y = 5,00 m bajo la influencia de la gravedad que actúa en la dirección y negativa (figura P8.1). Con la ecuación 7,2 calcule el trabajo realizado por la gravedad al ir de O a C a lo largo de, a) OAC, b) OBC, c) OC. Sus resultados deben ser idénticos. ¿Por qué?

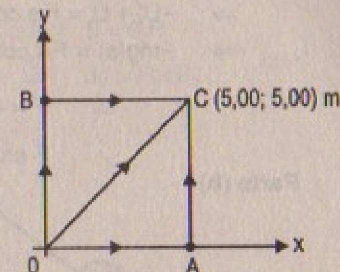


Figura P8.1

Resolución :

$m_p = 4,00$ kg
$g = 9,81$ m/s^2

Parte (a) $W_{(OAC)} = W_{(OA)} + W_{(AC)}$

$\Rightarrow \quad W_{peso\,(OA)} = (-mg\,\hat{j})(5\,\hat{i}) = 0$

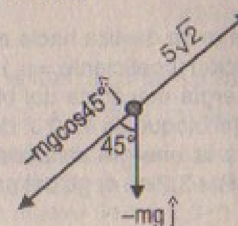
$W_{peso(AC)} = (-mg\,\hat{j})(5\,\hat{j}) = -5(4)(9,81) = -196,2$ J

Parte (b) $W_{(OBC)} = W_{(OB)} + W_{(BC)}$

$\Rightarrow \quad W_{(OB)} = (-mg\,\hat{j})(5\,\hat{j}) = -5(4)(9,81) = -196,2$ J

$W_{(BC)} = (-mg\,\hat{j})(5\,\hat{i}) = 0$

Parte (c)



$W_{(OC)} = -mg\cos 45° \times \left(5\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow \quad W_{(OC)} = -4\text{ kg }(9,81)\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(5\sqrt{2}\right)$

$\therefore \quad W_{(OC)} = -196,2$ J

2. a) Empezando con la ecuación 7.2 para la definición del trabajo realizado por una fuerza constante, demuestre que toda fuerza constante es conservativa. b) Como un caso especial, suponga que una partícula de masa m se encuentra bajo la influencia de la fuerza $F = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ N y se mueve de O a C en la figura P8.1. Calcule el trabajo efectuado por F a lo largo de las tres trayectorias OAC, OBC y OC. (También en este caso, sus tres respuestas deben ser idénticas).

Resolución:

Parte (a) $W = Fs\cos\theta$

Si F es conservativa $\Rightarrow$ $W_{Fc} = -\Delta U$

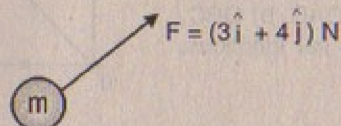
$\Rightarrow$ $-U_f + U_i = F.s.\cos\theta = -mg\,s_f - mg\,s_i$

$\Rightarrow$ $-mg(s) = F.s.\cos\theta$

$\therefore$ $F = -mg \times \dfrac{1}{\cos\theta} = \text{cte.}$

$\therefore$ F es conservativa

Parte (b)



$W_{(OAC)} = W_{(OA)} + W_{(AC)} = (3\hat{i})(5\hat{i}) = 15\text{ J} + (4\hat{j})(5\hat{j})$

$\therefore$ $W_{(OAC)} = 15\text{ J} + 20\text{ J} = 35\text{ J}$

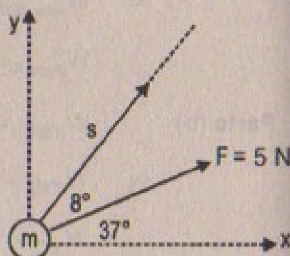
$W_{(OBC)} = W_{(OB)} + W_{(BC)} = (4\hat{j})(5\hat{j}) + (3\hat{i})(5\hat{i}) = 20 + 15 = 35\text{ J}$

$W_{(OC)} = F\,.\,s = 5\cos 8 \times 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}\cos 8°$

Pero $\cos 8° \approx 0{,}988$

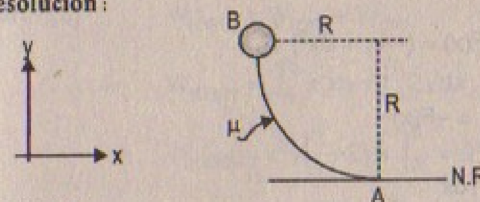
En consecuencia:

$W_{(OC)} = (0{,}988)(25)(\sqrt{2}) = 34{,}9 \approx 35\text{ J}$



3. Bajo la influencia de la gravedad, un bloque de masa m se desliza hacia abajo por una pista de un cuarto de círculo sobre la cual hay fricción (coeficiente = μ_c). El radio de la pista es R. a) Muestre que el cambio en la energía mecánica del bloque es $mgR(1-\mu)$. b) Si el cambio en la energía mecánica del bloque es 42,0 J, determine el trabajo efectuado por las fuerzas conservativas y la energía disipada por las fuerzas no conservativas. Suponga que m = 2,0 kg y R = 3,2 m. c) ¿Cuál es el valor de μ?

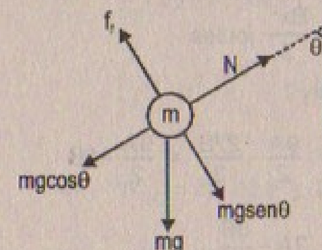
Resolución:



Considerar: $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$

Parte (a)

P. demostrar: $E_{MA} - E_{MB} = W_{fricción} = mg\,R\,(1-\mu) = E_{kfA} + U_{pfA} - (E_{kiB} + U_{piB})$



Sabemos que: $S = \theta.R$

$\Rightarrow$ $ds = R.d\theta$

$\Rightarrow$ Tenemos que: $W_{total} = \Delta E_k$

$\Rightarrow$ $\int_0^{\pi/2} mg\,\text{sen}\theta\,.\,Rd\theta - \int_0^{\pi/2} f_r\,Rd\theta = \Delta E_k$

pero: $N - mg\cos\theta = \dfrac{v^2}{R}$ si v = 0 como en B

$\Rightarrow$ $N = mg\cos\theta$ $\therefore$ $f_r = \mu\,.\,mg\cos\theta$

Luego: $-mgR\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} - \mu.mgR\,\text{sen}\theta\Big|_0^{\pi/2} = mgR(1-\mu)$

$\therefore$ $\Delta E_M = mgR(1-\mu)$ l.q.q.d.

Parte (b)

m = 2,0 kg R = 3,2 m

$W_{Fc} = -\Delta U = mgR = (2{,}0)(9{,}81)(3{,}2) = 62{,}784$ joules

$W_{fricción} = \Delta E_k = \Delta E_M - \Delta U = 42 - 62{,}784 = -20{,}784$ joules

Parte (c)

$42 = (2{,}0)(3{,}2)(9{,}81)(1-\mu)$ $\therefore$ $\mu = 0{,}33$

4. Una fuerza conservativa aislada que actúa sobre una partícula varía como $F = (-Ax + Bx^2)\,\hat{i}$ N, donde A y B son constantes y x está en metros. a) Calcule la energía potencial asociada a esta fuerza tomando U = 0 en x = 0. b) Encuentre el cambio en la energía potencial y el cambio en la energía cinética cuando la partícula se mueve de x = 2,0 m a x = 3,0 m.

Resolución :4



Parte (a) Sabemos que: $\frac{dU}{dx} = -F(x)$

$$\Rightarrow \int_0^x du = -\int_0^x F(x)\,dx$$

$$U(x) - U(0) = + \int_0^{x_F} Ax.dx - \int_0^{x_F} Bx^2 dx$$

$$\therefore \quad U(x) = \frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^3}{3} \text{ joules}$$

Parte (b) ΔU = (en x = 2 à x = 3 m)

$$\Rightarrow U(3) = \frac{A(3)^2}{2} - \frac{B(3)^3}{3} = \frac{9A}{2} - \frac{27B}{3} = \frac{9A}{2} - 9B$$

$$U(2) = \frac{A(2)^2}{2} - \frac{B(2)^3}{3} = 2A - \frac{8B}{3}$$

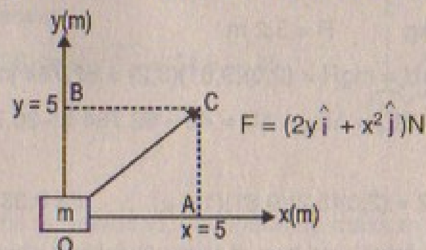
$$\therefore \quad \Delta U = \left(\frac{9A}{2} - 9B\right) - \left(2A - \frac{8B}{3}\right) = \frac{5A}{2} - \frac{19B}{3} \text{ joules}$$

Por otro lado:
Como F es conservativa

$$\Rightarrow \Delta E_k = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = \left(\frac{19B}{3} - \frac{5A}{2}\right) \text{joules}$$

5. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve en el plano xy es $F = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})$ N, donde x y y se miden en metros. La partícula se mueve desde el origen hasta una posición final cuyas coordenadas son x = 5,0 m y y = 5,0 m, como se puede ver en la figura P8.1. Calcule el trabajo realizado por F a lo largo de a) OAC, b) OBC, c) OC. d) ¿F es conservativa o no conservativa? Explique.

Resolución :5



Parte (a) $W_{(OAC)} = W_{(OA)} + W_{(AC)} = \int_0^5 2y\,dx + \int_0^5 x^2\,dy$

$$\Rightarrow W_{(OAC)} = 2yx\Big|_0^5 + x^2y\Big|_0^5 = 10y + 5x^2$$

$$\therefore \quad W_{(OAC)} = 10(0) + 5(5)^2 = 125 \text{ J}$$

Parte (b) $W_{(OBC)} = W_{(OB)} + W_{(BC)}$

$$\Rightarrow W_{(OBC)} = \int_0^5 x^2 dy + \int_0^5 2y\,dx$$

$$\Rightarrow W_{(OBC)} = x^2y\Big|_0^5 + 2yx\Big|_0^5 = 0^2(5) + 2(5)(5) = 50 \text{ Joules}$$

Parte (c) $W_{OC} = \int F(x;y)\,dr = \int_0^5 F(x;y)\,dy + \int_0^5 F(x;y)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^5 (2y + x^2)dy + \int_0^5 (2y + x^2)dx$$

$$(y^2 + x^2y)\Big|_0^5 + \left(2yx + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5$$

$$\Rightarrow W_{OC} = 25 + 5x^2 + 10y + \frac{125}{3}$$

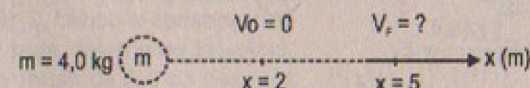
$$\therefore \quad W_{OC} = 25 + 5(5)^2 + 10(5) + \frac{125}{3} = 66{,}7 \text{ joules}$$

F no es conservativa porque depende de la trayectoria

FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

6. Una partícula de 4,0 kg se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa aislada. Si el trabajo realizado sobre la partícula es 80,0 J conforme se mueve del punto x = 2,0 m a x = 5,0 m, encuentre a) el cambio en su energía cinética, b) el cambio en su energía potencial, y c) su velocidad en x = 5,0 m si parte del reposo en x = 2,0 m.

Resolución :



Dato: $W_{FC} = 80{,}0$ J

Parte (a) $W_{FC} = \Delta E_k = 80{,}0$ J

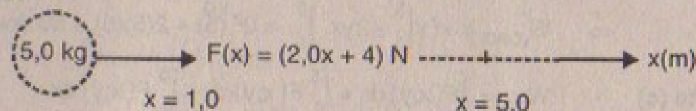
Parte (b) $W_{FC} = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -80{,}0$ J

Parte (c) $W_{FC} = \Delta E_k \quad \Rightarrow \quad 80 = \frac{1}{2}(4)v_f^2 \Rightarrow v_f = 6{,}325$ m/s

7. Una fuerza conservativa aislada $F_x = (2{,}0x + 4{,}0)$ N actúa sobre una partícula de 5,0 kg, donde x está en metros. Cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x

desde x = 1,0 m hasta x = 5,0 m, calcule, a) el trabajo efectuado por esta fuerza, b) el cambio en la energía potencial de la partícula, y c) su energía cinética en x = 5,0 m si su velocidad en x = 1,0 m es 3,0 m/s.

Resolución :



Parte (a) $W_{f(x)} = \int_{1,0}^{5,0} F(x)\,dx = \int_{1,0}^{5,0}(2x+4)\,dx = x^2 + 4x\Big|_{1,0}^{5,0}$

$\therefore\quad W_{F(x)} = 40$ J

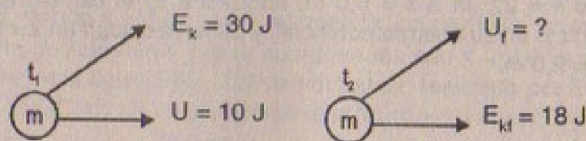
Parte (b) $W_{Fc} = -\Delta U \Rightarrow \quad \Delta U = -40,0$ J

Parte (c) $W_{Fc} = \Delta E_k = E_{kF} - \frac{1}{2}(5,0)(3,0)^2$

$\Rightarrow\quad E_{KF_{(x=5m)}} = 40 + \frac{45}{2} = \frac{125}{2} = 62,5$ J

8. En el tiempo t_i la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial es 10 J. Cierto tiempo después t_f, su energía cinética es 18 J. a) Si actúan sólo fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuáles son su energía potencial y su energía total en el tiempo t_f? b) Si la energía potencial en el tiempo t_f es 5 J, ¿hay fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula? Explique.

Resolución :



Parte (a) $E_{M_{(t_1)}} = E_{M_{(t_2)}}$

$\Rightarrow\quad 30 + 10 = U_f + 18 \quad\therefore\quad U_{(t_2)} = 22$ J

$E_{total} = E_k + U = 40$ joules

Parte (b) $E_{M(f)} = 18 + 5 = 23$ J $\Rightarrow$ $E_{M(i)} = 30 + 10 = 40$ J

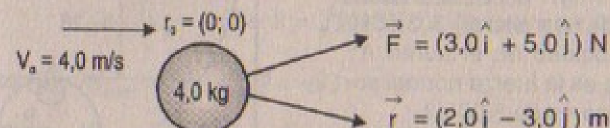
Como: $\Delta E_M = -17$ J $\Rightarrow$ $\Delta E_M \neq$ cte

$\therefore\quad -17\text{ J} = W_{fricción}$

En consecuencia sí hay fuerzas no conservativas ya que la energía mecánica no se mantiene constante en el tiempo.

9. Una fuerza constante aislada $F = (3,0\hat{i} + 5,0\hat{j})$ N actúa sobre una partícula de 4,0 kg. a) Calcule el trabajo realizado por esta fuerza si la partícula se mueve desde el origen hasta el punto que tiene el vector de posición $r = (2,0\hat{i} - 3,0\hat{j})$ m. ¿Este resultado depende de la trayectoria? Explique. b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en r si su velocidad en el origen es 4,0 m/s? c) ¿Cuál es el cambio en su energía potencial?

Resolución :



Parte (a)

$W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{r} = (3\hat{i} + 5\hat{j})(2\hat{i} - 3\hat{j}) = 6 - 15 = -9$ joules

No depende de la trayectoria, solo de la posición.

Parte (b)

$v_o = 4,0$ m/s $\quad \vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$W_f = \Delta E_k \quad\Rightarrow\quad -9\text{ joules} = \frac{1}{2}(4)\,v_f^2 - \frac{1}{2}(4)(4)^2$

$\therefore\quad v_f = 3,39$ m/s

Parte (c)

$W_f = -\Delta U \quad\Rightarrow\quad \Delta U = 9$ joules

10. Una masa de 5,0 kg se une a una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción y sin masa. El otro extremo de la cuerda se une a una masa de 3,5 kg como en la figura P8.10. Utilice la conservación de la energía para determinar la velocidad final de la masa de 5,0 kg después de que ha caído (desde el reposo) 2,5 m.

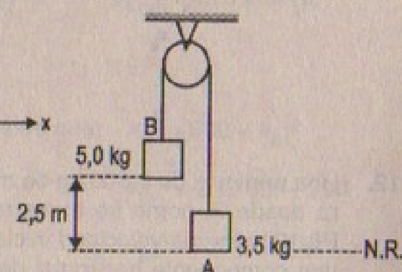


Figura P8.10

Resolución :

$g = 9,81$ m/s²

Solución: $E_{MB} = E_{MA}$

$\Rightarrow\quad E_{KB} + U_B = E_{KA} + U_A$

$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}m\,v_B^2 + mgH = \frac{1}{2}m\,v_A^2 + mgH$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5,0)(0) + (5,0)(9,81)(2,5) = \frac{1}{2}(5,0)\,v_A^2 + (5,0)(9,8)(0)$$

$$\therefore \quad v_{A\,(5\,kg)} = \sqrt{2(9,81)(2,5)}$$

$$\therefore \quad v_A \approx 7 \text{ m/s}$$

11. Una cuenta se desliza sin fricción dando un giro completo (Fig. P8.11). Si la cuenta se suelta desde una altura h = 3,50R, ¿cuál es su velocidad en el punto A? ¿Qué tan grande es la fuerza normal sobre ella si su masa es de 5,00 g?

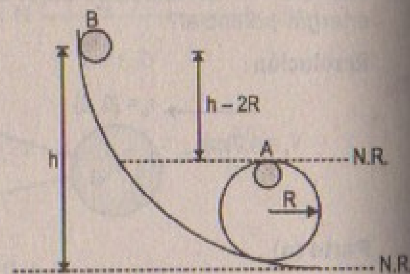


Figura P8.11

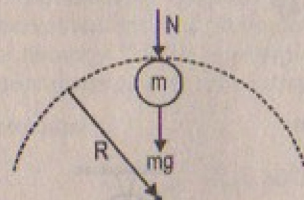
Resolución :

Datos: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $h = 3,5\,R$; $m = 5 \times 10^{-3}$ kg

Por conservación de energía: $E_{MB} = E_{MA}$

$$\Rightarrow \quad m(g)(h - 2R) = \frac{1}{2} m\, v_A^2 \qquad \therefore \quad v_A = \sqrt{2(g)(h-2R)}$$

$$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2(g)(1{,}5)R} = \sqrt{3gR} \text{ m/s}$$



Por movimiento circular:

$$N + mg = m\,\frac{V_A^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N = m\,\frac{(3gR)}{R} - mg = 2mg \text{ N}$$

$$\therefore \quad N = 2(5 \times 10^{-3})(9,81) = 0,098 \text{ (hacia abajo)}$$

12. Una partícula de 0,500 kg de masa se dispara desde P, como se muestra en la figura P8.12, con una velocidad inicial v_0 que tiene una componente horizontal de 30,0 m/s. La partícula asciende hasta una altura máxima de 20,0 m sobre P. Con la conservación de la energía, determine, a) la componente vertical de v_0, b) el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional sobre la partícula durante su movimiento de P a B, y c) las componentes horizontal y vertical del vector velocidad cuando la partícula llega a B.

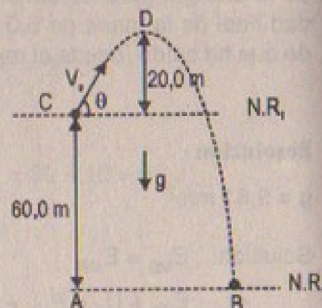


Figura P8.12

Resolución :12

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ $\qquad m = 0,5$ kg

$v_o \cos\theta = 30,0$ m/s

Parte (a) $E_{MC} = E_{MD}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\,(v_o \,.\, \text{sen}\theta)^2 + 0 = mg(h) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(0,5)[v_o\, \text{sen}\theta]^2 = (0,5)(9,81)(20)$$

$$\therefore \quad v_{oy} = v_o\, \text{sen}\theta = \sqrt{2(20)(0,5)(9,81)} = 14,00 \text{ m/s}$$

Parte (b) $W_{peso} = W_{F.conserv} = -\Delta U$

$$\Rightarrow \quad W_{peso} = E_{pi} - E_{pf} = E_{pD} - E_{p(B)}$$

$$\therefore \quad W_{peso} = mg\,(60) - 0 = (0,5)(9,81)(60) = 294,3 \text{ J}$$

Parte (c) $E_{MC} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad E_{kc} + U_c = E_{KB} + 0$$

$$\frac{1}{2}(m)\,v_o^2 + m(g)(60) = \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_o^2}{2} + (9,81)(60) = \frac{1}{2}\, v_B^2$$

pero: $\quad v_o^2 = (14)^2 + (30)^2$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\frac{14^2 + (30)^2}{2} + (9,81)(60)\right] = v_B^2 \qquad \therefore \quad v_B^2 = 2\,273,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Luego las componentes serán:



Sabemos que: $\quad v_B^2 = 900 + v_{Bv}^2$

$$\Rightarrow \quad v_{Bv}^2 = 2\,273,2 - 900$$

$$\therefore \quad v_{Bv}^2 \approx 37,06 \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_x = 30\,\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_y = \vec{V}_{vB} = -37,06\,\hat{j} \text{ m/s}$$

13. Desde una altura h un cohete despega a un ángulo de 53° con la horizontal con una velocidad v_0. a) Utilice métodos de energía para determinar su velocidad cuando su altura es h/2. b) A partir del hecho de que $v_x = v_{x0}$ = constante (puesto que $a_x = 0$) y con los resultados del inciso a), encuentre las componentes x e y de la velocidad cuando la altitud del cohete es h/2.

Resolución :

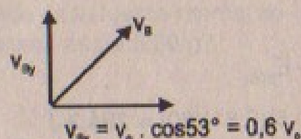
Parte (a)

$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_o + 0 = mg\,\frac{(h)}{2} + \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$$

$$\therefore \quad v_B = \sqrt{v_o^2 - gh}\ \text{m/s}$$

Parte (b)

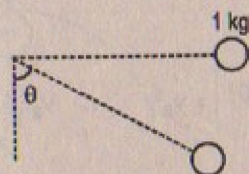


$$\Rightarrow \quad (0{,}6\,v_o)^2 + v_{By}^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$\Rightarrow \quad v_{By}^2 = 0{,}64\,v_o^2 - 2gh \qquad \therefore \quad v_{By} = \sqrt{-\left(0{,}64v_o^2 + 2gh\right)}$$

14. Una bola de 1,0 kg se une a un hilo de pescar de 10 lb (44,5 N). La bola se suelta desde el reposo en la posición horizontal (θ = 90°). ¿A qué ángulo θ (medido desde la vertical) se rompe el hilo?

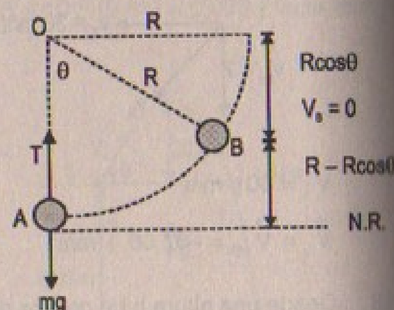
Resolución :



m = 1 kg

T = 44,5 N

Considerar: g = 9,81 m/s²



Por movimiento circular:

$$T - mg = m\frac{v_A^2}{R} \Rightarrow (44{,}5 - 9{,}81)(R) = v_A^2$$

$$\therefore \quad v_A = \sqrt{34{,}69\,R}$$

Por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,mv_A^2 = mg\,(R - R\cos\theta)$$

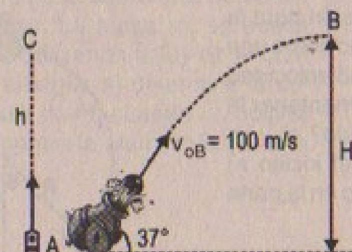
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(34{,}69\,R) = g(R)\,[1 - \cos\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 1 - \frac{34{,}69}{2(9{,}81)} \qquad \therefore \quad \cos\theta = 0{,}77$$

En consecuencia: $\theta = \text{arc cos}\,(0{,}77) = \cos^{-1}(0{,}77)$

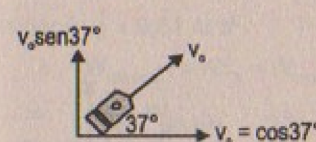
15. Una bala de cañón de 20,0 kg se dispara desde un cañón a una velocidad de orificio de 1 000 m/s y a un ángulo de 37,0° con la horizontal. Una segunda bala se dispara con un ángulo de 90,0°. Utilice la conservación de la energía mecánica para encontrar, para cada bala, a) la altura máxima alcanzada, y b) la energía mecánica total en la altura máxima.

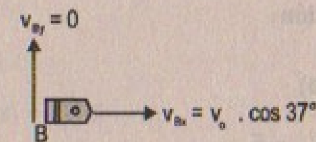
Resolución :



Considerar:
g = 9,81 m/s²

Parte (a)





$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m)\,v_A^2 = mgH + \frac{1}{2}m(v_{Bx})^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_A^2 = gH + \frac{1}{2}\,(v_{Bx})^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1000)^2}{2} - \frac{1}{2}\left(1\,000 \cdot \frac{4}{5}\right)^2 = (9{,}81)(H)$$

luego: $H = \dfrac{(1000)^2}{(9{,}81)}\,[2 - 16/25] \approx 18{,}35$ km (altura de la bala inclinada)

Hallando la altura de la bala vertical: $E_{MA} = E_{MC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_A^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{(1000)^2}{2(9{,}81)} \approx 50{,}97\ \text{km}$$

Parte (b)

$$E_{MB} = mgH + \frac{1}{2}mv_B^2 = (20)(9{,}81)(18{,}35 \times 10^3) + \frac{1}{2}(20)(1000)^2(16/25)$$

$$\therefore \quad E_{MB} = 10^7 \text{ joules}$$

$$E_{MC} = mgh = (20)(10)(50{,}97 \times 10^3)$$

$$\therefore \quad E_{MC} = 10\ 193\ 679 \text{ joules}$$

16. Una bola de masa m gira en un círculo vertical de radio R. La bola tiene una velocidad v_0 en su punto más alto. Considere la energía potencial cero en el punto más bajo y use el ángulo θ medido respecto de la vertical, como se muestra en la figura P8.16. a) Obtenga una expresión para la velocidad v en cualquier tiempo como una función de R, θ, v_0 y g. b) ¿Qué velocidad mínima v_0 es necesaria para mantener la bola moviéndose en un círculo? c) ¿La ecuación que se obtuvo en el inciso a) explica el resultado encontrado en la parte b)? Explique.

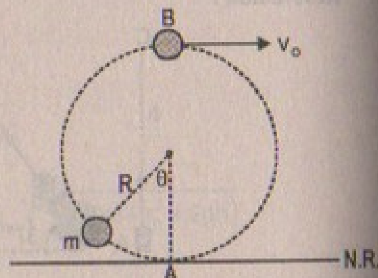


Figura P8.16

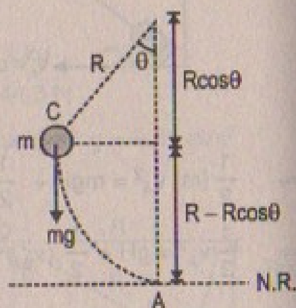
Resolución :

Parte (a)

$$E_{MB} = E_{MA}$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mg\,(2R) = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\therefore \quad v_a = \sqrt{v_o^2 + 4gR} \text{ m/s}$$



Por conservación de energía: $E_{MC} = E_{MA}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgR\,(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 + 2gR\,(1 - \cos\theta) = v_o^2 + 4gR \quad \therefore \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gR + \cos\theta}$$

Parte (b)

$v_{mínima} \Rightarrow$ v en el punto más alto tiene que ser cero

$$\Rightarrow \quad E_{MA} = E_{MB}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = mg\,(2R) \qquad \therefore \quad v_{mínima} = \sqrt{4gR} = v_A$$

Como $\quad v_o = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{mínima} = \sqrt{4gR}$

Lo cual cumple

17. La figura P8.17 muestra dos masas que están conectadas entre sí por medio de una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción y sin masa. La masa de 5,0 kg se suelta desde el reposo. Utilizando la ley de la conservación de la energía, a) determine la velocidad de la masa de 3,0 kg cuando la masa de 5,0 kg golpea el suelo. b) Encuentre la altura máxima a la cual sube la masa de 3,0 kg.

17A. La figura P8.17 muestra dos masas que están conectadas entre sí por medio de una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción y sin masa. La masa m_1 se suelta desde el reposo. Utilizando la ley de la conservación de la energía, a) determine la velocidad de la masa de m_2 cuando m_1 golpea el suelo. b) Encuentre la altura máxima a la cual sube m_2.

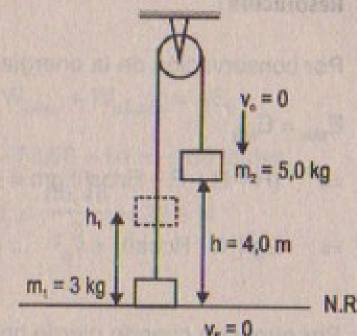


Figura P8.17

Resolución :

Considerar: g = 9,81 m/s²

$$W_{total(m_2)} = \Delta E_k = W_{tensión} - \Delta U$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = W_{tensión} \quad \Rightarrow \quad 0 - mgh = -T(d)$$

$$\Rightarrow \quad W_{tensión} = mgh \quad ; \quad \text{luego:} \quad T = m_2 g$$

Por otro lado: $\quad W_{total\ (m1)} = \Delta E_{k\ (m1)}$

$$\Rightarrow \quad T(h_1) - m_1 g h_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{f_1}^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 \cdot gh_1 - m_1 gh_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{f_1}^2$$

$$\therefore \quad v_{f_1} = \sqrt{2gh_1\left(m_2 - m_1\right)/m_1}$$

Reemplazando: $\quad v_{F(m_1)} = \sqrt{\dfrac{2(9{,}81)(h_1)(2)}{3}} \quad \ldots (1)$

Sin embargo: $\quad W_{total\ (M1)} = \Delta E_{K\ total} = -\Delta U + W_{tensión}$

$$W_{tensión} = m_1 gh_1 = m_2 gh \quad \therefore \quad h_1 = \frac{h \cdot m_2}{m_1} = 6{,}67 \text{ m}$$

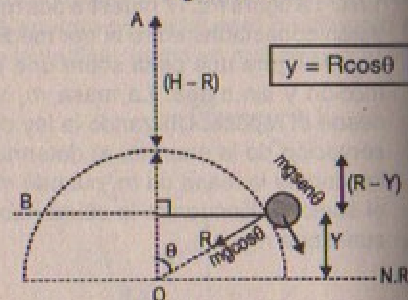
Por lo tanto: $\quad v_{f(m1)} = \sqrt{\dfrac{2(9{,}81)(6{,}67)(2)}{3}} \approx 9{,}34 \text{ m/s}$

18. Un niño se desliza por la resbaladilla sin fricción mostrada en la figura P8.18. En términos de R y H, ¿a qué altura h perderá contacto con la sección de radio R?



Figura P8.18

Resolución :



Por conservación de la energía:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\Rightarrow \quad (H - R + R - R\cos\theta)\,gm = \frac{1}{2} m\,v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad 2g\,(H - R\cos\theta) = v_B^2 \quad \ldots (\alpha)$$

Por otro lado cuando pierde contacto se cumple en ese momento:

$$mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = Rg\cos\theta$$

Luego: $2g(H - R\cos\theta) = Rg\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad 2H - 2R\cos\theta = R\cos\theta \qquad \therefore \quad \cos\theta = \frac{2H}{3R}$$

En consecuencia: $y = R\cos\theta = R \cdot \frac{2H}{3R} = \frac{2}{3}H$

CAMBIOS EN LA ENERGÍA MECÁNICA CUANDO ESTÁN PRESENTES FUERZAS NO CONSERVATIVAS

19. Un bloque de 5,0 kg se pone en movimiento ascendente en un plano inclinado con una velocidad inicial de 8,0 m/s (Fig. P8.19). El bloque se detiene después de recorrer 3,0 m a lo largo del plano, el cual está inclinado a un ángulo de 30° con la horizontal. Determine a) el cambio en la energía cinética del bloque, b) el cambio en su energía potencial, c) la fuerza de fricción ejercida sobre él (supuesta constante), y d) el coeficiente de fricción cinético.

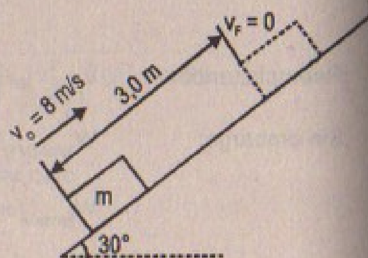


Figura P8.19

Resolución :

Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$
$m = 5\ kg$

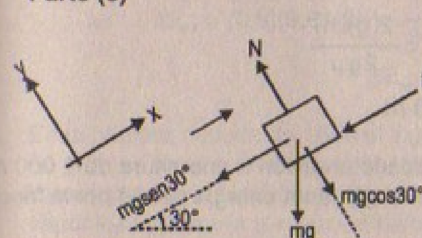
Parte (a) $W_{bloque} = W_{peso} = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_k = \frac{1}{2} m\,v_f^2 - \frac{1}{2} m\,v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = -\frac{1}{2}(5)(8)^2 = -160 \text{ joules}$$

Parte (b) $W_{peso} = W_{F.conserv} = -\Delta U = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = 160 \text{ joules}$$

Parte (c)



$$W_{peso} + W_{fricción} = \Delta E_k$$

$$-73{,}56 + f_r d = -160 \text{ joules}$$

$$\therefore \quad f_r = \frac{86{,}44}{3} = 28{,}8\ N$$

Parte (d)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \quad N = mg\cos 30° = 5(9{,}81)\left(\sqrt{3}/2\right) = 42{,}48\ N$$

$$\Rightarrow \quad f_r = \mu.N = \mu.mg\cos 30° \therefore \quad \mu = \frac{f_r}{N} = \frac{28{,}8}{42{,}48} = 0{,}68$$

20. Un bloque de 3,0 kg empieza a moverse a una altura h = 60 cm sobre un plano que tiene un ángulo de inclinación de 30°, como se puede ver en la figura P8.20. Después de alcanzar la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción en ambas superficies es μ = 0,20, ¿qué distancia se desliza el bloque sobre la superficie horizontal antes de detenerse? (*Sugerencia*: divida la trayectoria en dos partes de línea recta).

20A. Un bloque de masa m empieza a moverse a una altura h sobre un plano que tiene un ángulo de inclinación θ como se puede ver en la figura P8.20. Después de alcanzar la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción en ambas superficies es μ_c ¿qué distancia se desliza el bloque sobre la superficie horizontal antes de detenerse? (*Sugerencia*: divida la trayectoria en dos partes de línea recta.)

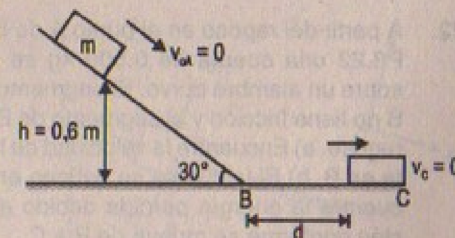


Figura P8.20

Resolución :

Datos: $g = 9{,}81\ m/s^2$; $m = 3{,}0\ kg$

$\mu = 0{,}20$; $v_c = 0$

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m.v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81)(0{,}6)}$$

$$\therefore \quad v_B = 3{,}43\ m/s$$

$$W_{(b \to c)} = \Delta E_k$$

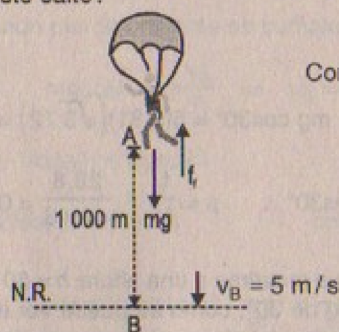
$$\Rightarrow \quad -f_r(d) = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu(mg)(d) = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_B^2}{2(g)\mu} = \frac{2(g)(h)}{2g.\mu}$$

$$\therefore \quad d = 3\ m$$

21. Un paracaidista de 50 kg de masa salta desde un avión a una altura de 1 000 m y llega al suelo con una velocidad de 5,00 m/s. ¿Cuánta energía perdió por la fricción del aire durante este salto?

Resolución :



Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

$m = 50\ kg$

$$E_{MB} - E_{MA} = \Delta E_k \text{ (fuerzas no conserv.)} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m V_b^2 - mgh = \frac{1}{2}(50)(25) - 50(9{,}81)(1\ 000) = -489{,}9\ kJ$$

22. A partir del reposo en el punto A de la figura P8.22 una cuenta de 0,500 kg se desliza sobre un alambre curvo. El segmento de A a B no tiene fricción y el segmento de B a C es rugoso. a) Encuentre la velocidad de la cuenta en B. b) Si la cuenta se detiene en C, encuentre la energía perdida debido a la fricción conforme se mueve de B a C.

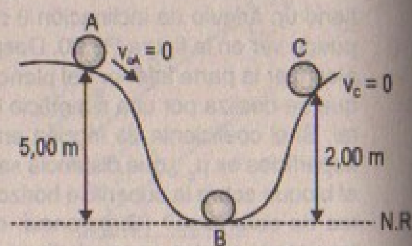


Figura P8.22

Resolución :

Datos: $m = 0{,}5\ kg$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (a) $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2(9{,}81)(5)} \approx 9{,}9\ m/s$$

Parte (b) $\Delta E_M = E_{MC} - E_{MB} = W_{fricción}$

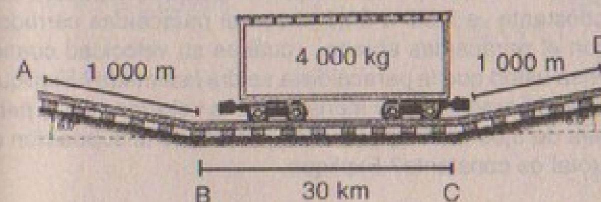
$$\Rightarrow \quad \Delta E_M = mg(2) - \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_M = (0{,}5)(9{,}81)(2) - \frac{1}{2}(0{,}5)(2)(9{,}81)(5)$$

$$\therefore \quad \Delta E_M = -14{,}72 \text{ joules}$$

23. En la primera década de 1800 el ingeniero francés Hector Horeau propuso un diseño para un túnel a través del canal inglés. Los vagones del ferrocarril podrían rodar libremente por el túnel hasta agotar su energía cinética, y después una máquina de vapor los impulsaría el resto del recorrido. Suponga que el túnel de 32,0 km de largo se diseñó con una pendiente de 6,0° para el primer tramo de 1,00 km en cada extremo y siguiendo plano el resto del tramo. Considere que el coeficiente de fricción por rodamiento es 0,1 (un valor pequeño). a) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de un vagón de ferrocarril de 4 000 kg cuando rueda hacia abajo por la pendiente? b) Si el vagón parte del reposo, ¿cuál es su velocidad cuando llega al tramo nivelado? c) ¿Qué distancia recorre dentro del túnel antes de detenerse? d) ¿Era factible este diseño?

Resolución :



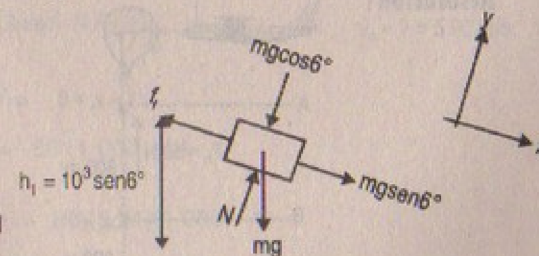
$g = 9{,}81\ m/s^2$

$sen6° = 0{,}105$

$cos6° = 0{,}994$

$\mu = 0{,}1$

Parte (a)



$$\Delta E_M = W_{fricción} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción} = -f_r\, d$$

$$\Rightarrow \quad E_{kf} - U_{Pf} - E_{ki} + U_{Pi} = -f_r\, d$$

$\Rightarrow \quad \Delta E_k - \Delta U = -(1\,000)\,(mg\cos 6°)(\mu) = -10^3\,(0{,}1)(4\times10^3)(9{,}81)(0{,}994)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -10^3\,(0{,}1)(9{,}81)(0{,}994) = -975$

$\Rightarrow \quad v_B^2 = \left[-975 + (9{,}81)(10^3)(0{,}105)\right]2 = 110{,}1$

$\therefore \quad v_B = 10{,}49$ m/s

El cambio en la energía potencial

$U_{Pf} - U_{Pi} = 0 - (4\,000)(9{,}81)(10^3)(0{,}105)$

$\therefore \quad \Delta U = -4\,120$ kJ

Parte (b) $v_B = 10{,}49$ m/s

Parte (c) $W_{fricción\,(B\to C)} = \Delta E_k \qquad \Rightarrow \quad -f_t\,(d) = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}m\,v_B^2$

$\Rightarrow \quad (0{,}1)(4\times10^3)(9{,}81)(3\times10^4) = \frac{1}{2}(4\times10^3)v_C^2 - \frac{1}{2}(4\times10^3)(110{,}04)$

$\Rightarrow \quad v_C^2 = 2(0{,}1)(9{,}81)(3\times10^4) + (110{,}04) \quad v_c = 242{,}84$ m/s

Entonces: $E_{MD} - E_{MC} = W_{fricción} \qquad \Rightarrow \quad mgh - \frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu.mg\cos 6° d_2$

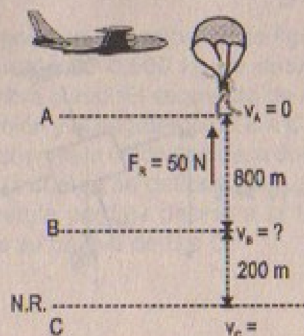
$\Rightarrow \quad (9{,}81)(d_2\,\text{sen}6°) - \frac{(242{,}84)^2}{2} = -(0{,}1)(9{,}81)(0{,}994)d_2$

$\therefore \quad d_2 = 14{,}7$ km

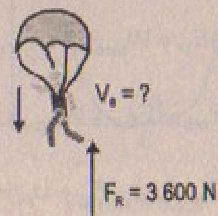
No era factible este diseño

24. Una paracaidista de 80,0 kg salta de un avión a una altura de 1 000 m y abre el paracaídas a una altura de 200 m. a) Suponiendo que la fuerza retardadora total sobre la paracaidista es constante e igual a 50,0 N con el paracaídas cerrado y constante y de 3 600 N con el paracaídas abierto, ¿cuál es su velocidad cuando aterriza? Explique. b) ¿Piensa usted que la paracaidista saldrá lastimada? Explique. c) ¿A qué altura debe abrirse el paracaídas de manera que la velocidad de la paracaidista al llegar al suelo sea de 5,00 m/s? d) ¿Qué tan realista es la suposición de que la fuerza retardadora total es constante? Explique.

Resolución :



$m_p = 80$ kg
$g = 9{,}81$ m/s²



Parte (a)

N.ref(b) $\qquad E_{MB} - E_{MA} = W_{FR}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -50(h)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(80)v_B^2 - (80)(9{,}81)(800) = -50(800)$

$\therefore \quad v_B^2 = 14\,696 \quad \Rightarrow \quad v_B = 121{,}23$ m/s

Ahora: nos piden $v_c = ?$

$\Rightarrow \quad E_{MC} - E_{MB} = W_{FR}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_c^2 - [mgh + \frac{1}{2}m\,v_B^2] = -3\,600(800)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(80)v_c^2 - (80)(9{,}81)(200) - \frac{1}{2}(80)(14\,696) = -3\,600(200)$

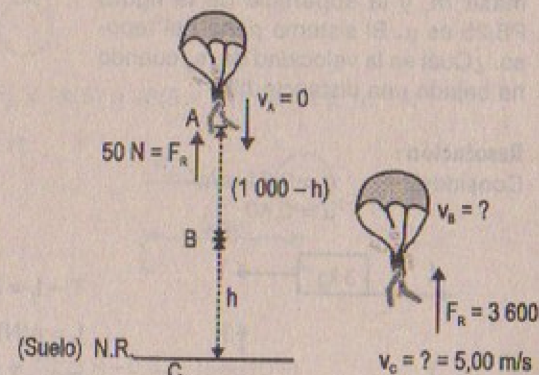
$\therefore \quad V_c = V_{aterrizaje} = 24{,}9$ m/s

Conclusión:

La paracaidista al llegar al suelo con una velocidad de 24,9 m/s llegará con una fuerza neta o total de módulo = 2 815,2 N es decir que en ese mínimo diferencial de tiempo, al hacer contacto con el suelo la reacción normal del piso sobre sus pies de la paracaidista será en módulo igual a 2 815,2 lo que quiere decir que se ejercerá sobre su humanidad una masa de 287 kg, podría lastimarse seriamente al aterrizar.

Parte (c)

$v_B = ?$
$F_r = 3\,600$
$v_c = ? = 5{,}00$ m/s



N.R (tomamos a B)

$E_{MB} - E_{MA} = W_{FR}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\,(1\,000 - h) = -50\,(1\,000 - h)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(80)v_B^2 = -50(1\,000 - h) + (80)(9{,}81)(1\,000 - h)$

$\therefore \quad v_B^2 = \frac{(1\,000 - h)\,[734{,}8]\,2}{40}$

Por dato $v_c = 5{,}00$ m/s

$\Rightarrow \quad E_{MC} - E_{MB} = W_{FR}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -3\,600\ (h)$

$\Rightarrow \quad 40(25) - \frac{1}{2}(80)\ \frac{(1\,000-h)(1)(734{,}8)}{20} - (80)(9{,}81)h = -3\,600\ h$

Desarrollando:

$$4\,284{,}8\ h = 1\,469{,}6 \times 10^3 - 1\,000 \quad \therefore h = 342{,}75\ m$$

Luego el paracaídas debe de abrirse a una altura de aproximadamente 342.75 m sobre encima del suelo para que llegue con una velocidad de 5 m/s

Parte (d)

F_R es constante $\Rightarrow M_{CONSTANTE}$ y a = constante, pero M depende de la ρ, y del volumen quiere decir que el volumen no cambia en el tiempo lo cual es absurdo ya que el volumen del sistema $\neq$ cte.

25. El coeficiente de fricción entre la masa de 3,0 kg y la superficie de la figura P8.25 es 0,40. El sistema parte del reposo. ¿Cuál es la velocidad de la masa de 5,0 kg cuando ha caído 1,5 m?

25A. El coeficiente de fricción entre la masa m_1 y la superficie de la figura P8.25 es μ. El sistema parte del reposo. ¿Cuál es la velocidad de m_2 cuando ha bajado una distancia *h*?

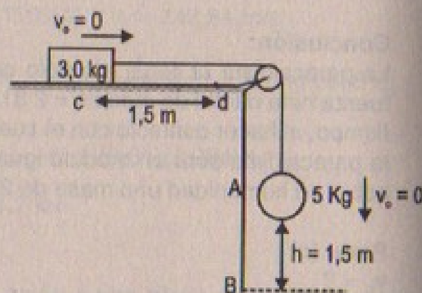
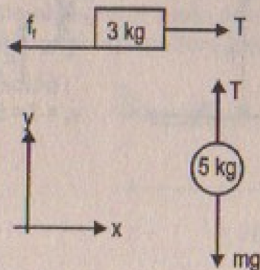


Figura P8.25

Resolución :

Considerar: $g = 9{,}81$ m/s²
$\mu = 0{,}40$



$T - f_r = 3a \quad \ldots (1)$

$f_r = \mu(N) = \mu.mg = (0{,}4)(3)(9{,}81)$

$mg - T = 5a \quad \ldots (2)$

$(1) + (2) \quad mg - f_r = 8a$

$\Rightarrow \quad (5)(9{,}81) - (0{,}4)(3)(9{,}81) = 37{,}278 = 8a$

$a = 4{,}66$ m/s²

De (2): $\quad 5(9{,}81) - T = 5(4{,}66) \quad \therefore \ T = 25{,}75$ N

Por teorema de la energía: $E_{MB} - E_{MA} = W_{F\ externas} = W_{tensión}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_B^2 - mgh = -T(h)$

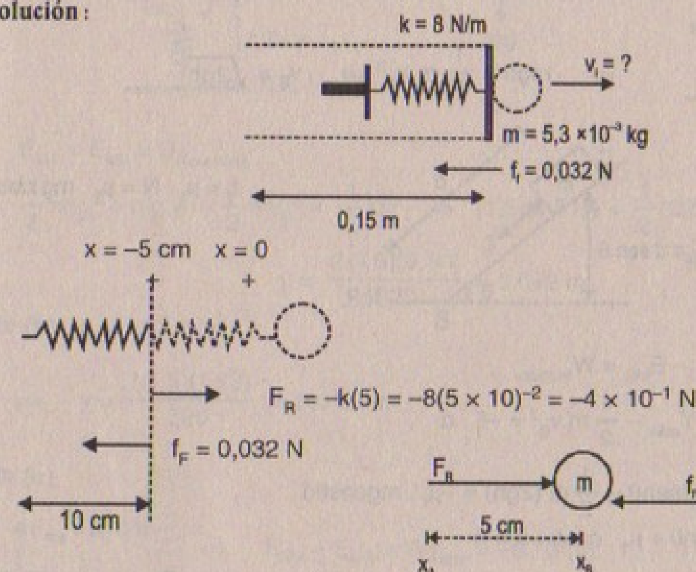
$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5)(v_B^2) - 5(9{,}81)(1{,}5) = -25{,}75\ (1{,}5)$

$\Rightarrow \quad v_B^2 = \frac{1{,}5}{5}\ [5(9{,}81) - 25{,}75] \times 2$

$\therefore \quad v_B \approx 13{,}98$ m/s

26. Una pistola de juguete usa un resorte para disparar una esfera de hule blando de 5,3 g. La constante de resorte es 8,0 N/m, y el cañón de la pistola mide 15 cm de largo, y hay una fuerza de fricción constante de 0,032 N entre el cañón y el proyectil. ¿Con qué velocidad sale disparado el proyectil del cañón si el resorte se comprime 5,0 cm?

Resolución :



$E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción}$

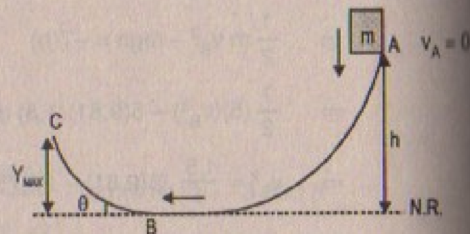
$\frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}kx^2 = -f_r\,(5 \times 10^{-2}) = -0{,}032\ (5 \times 10^{-2})$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5{,}3 \times 10^{-3})\ v_B^2 = \frac{1}{2}(8)(5 \times 10^{-2})^2 - (0{,}032)(5 \times 10^{-2})$

luego: $\quad \frac{1}{2}(5{,}3 \times 10^{-3})\ .\ v_B^2 = 0{,}84 \times 10^{-2} \Rightarrow \quad v_B^2 = \frac{(0{,}84 \times 10^{-2}) \times 2}{5{,}3 \times 10^{-3}}$

$\therefore \quad v_B = v_{salida\ de\ la\ bala} = 3{,}17$ m/s

27. Un bloque se desliza hacia abajo por una pista curva sin fricción y después sube por un plano inclinado, como se puede ver en la figura P8.27. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente es μ_f. Con métodos de energía demuestre que la altura máxima alcanzada por el bloque es



$$y_{máx} = \frac{h}{1+\mu_f \cot(\theta)}$$

Figura P8-27

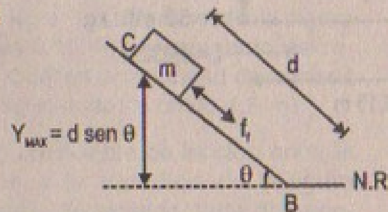
Resolución :

Por demostrar: $$Y_{máx} = \frac{h}{1+\mu_f \cot(\theta)}$$

$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

luego:



$$f_f = \mu_f . N = \mu_f . mg \cos\theta$$

$$E_{MC} - E_{MB} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \quad mg\, Y_{máx} - \frac{1}{2} m v_B^2 = -f_f . d$$

$$\Rightarrow \quad mg\, d\text{sen}\theta - \frac{1}{2} m (2gh) = -\mu_f . mg\cos\theta d$$

$$\Rightarrow \quad d\text{sen}\theta + \mu_f . \cos\theta . d = h$$

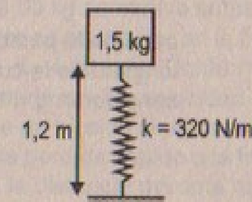
$$\therefore \quad d[\text{sen}\theta + \mu_f . \cos\theta] = h \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h}{\text{sen}\theta + \mu_f . \cos\theta}$$

pero $Y_{máx} = d \text{ sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad Y_{máx} = \left(\frac{h}{\text{sen}\theta + \mu_f . \cos\theta}\right)\text{sen}\theta \quad \therefore \quad Y_{máx} = \frac{h}{1+\mu . \cot\theta} \text{ . l.q.q.d.}$$

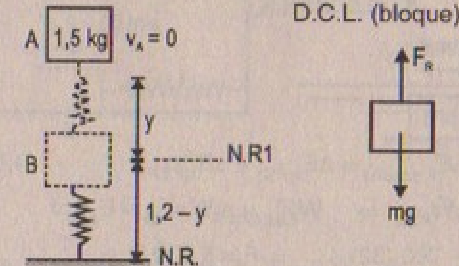
28. Una masa de 1,5 kg se sostiene 1,2m arriba de un resorte no comprimido sin masa que tiene una constante de 320 N/m y después se deja caer sobre el resorte. a) ¿Cuánto se comprime el resorte? b) El mismo experimento se repite en la Luna, donde g = 1,63 m/s². c) Repita el inciso a), pero esta vez suponga que una resistencia del aire constante de 0,70 N actúa sobre la masa durante la caída.

Resolución :



Considerar:
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Parte (a)



$$E_{MA} = E_{MB} = U_{P.elástica}$$

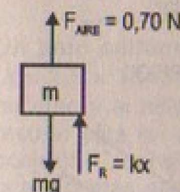
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_A^2 + mg\, y = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} k y^2 \quad \Rightarrow \quad (1,5)(9,81)y = \frac{1}{2}(320)\, y^2$$

$$\therefore \quad y = \frac{2(1,5)(9,81)}{320} = 0,092 \text{ m}$$

Parte (b) $g = 1,63 \text{ m/s}^2$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2(1,5)(1,63)}{320} = 0,0153 \text{ m}$$

Parte (c)



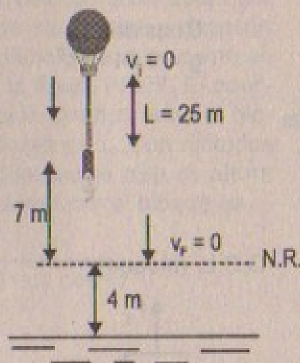
$$\Rightarrow \quad E_{MB} - E_{MA} = W_{F\,aire} = -0,70\,(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} k y^2 - mgy = -0,70\, y$$

$$\therefore \quad y = \frac{14,015}{160} = 0,088 \text{ m}$$

29. En el peligroso "deporte" de salto de cuerda a gran altura un estudiante salta desde un globo aerostático con una cuerda elástica de diseño especial amarrada a sus tobillos. La longitud de la cuerda sin estirarse es de 25,0 m, el peso del estudiante es de 700 N y el globo está a 36,0 m sobre la superficie de un río. Calcule la fuerza constante requerida de la cuerda si el estudiante se va a detener en forma segura 4,00 m arriba del río.

Resolución :



peso de la persona = 700 N
longitud de la cuerda = 25 m
considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

$$W_{TOTAL} = \Delta E_{K\ sistema} = \Delta E_{k(F.C)} + \Delta E_{k(F.EXT)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\Delta U + W_{F.ext} \Rightarrow \quad W_{F.ext} = \Delta U = E_{pf} - E_{pi}$$

$$\Rightarrow \quad -F(7) = 0 - 700\ (32) \quad \therefore \quad F = 3\,200\ N$$

30. Una masa de 3,0 kg parte del reposo y se desliza por una pendiente sin fricción de 30° una distancia *d* y hace contacto con un resorte no deformado de masa despreciable, como muestra la figura P8.30. La masa se desliza 0,20 m adicionales cuando alcanza momentáneamente el reposo y comprime el resorte (k = 400 N/m). Encuentre la separación inicial *d* entre la masa y el resorte.

30A. Una masa *m* parte del reposo y se desliza por una pendiente sin fricción con un ángulo θ, una distancia *d* y hace contacto con un resorte no deformado de masa despreciable, como muestra la figura P8.30. La masa se desliza una distancia *x* adicional cuando alcanza momentáneamente el reposo y comprime el resorte (constante de fuerza *k*). Encuentre la separación inicial *d* entre la masa y el resorte.

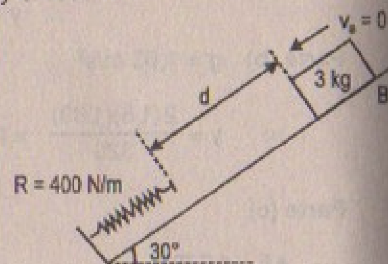
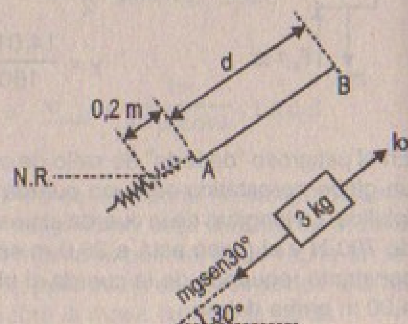


Figura P8.30

Resolución :

$g = 9{,}81\ m/s^2$

$m = 3{,}0\ kg$



$$E_{MB} = E_{MA} = U_{P.elástica}$$

$$mg\ (d + 0{,}2) = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

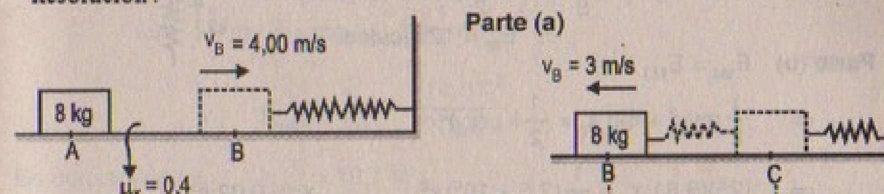
$$\Rightarrow \quad (3{,}0)(9{,}81)(d) = \frac{1}{2}(400)(0{,}2)^2$$

$$\therefore \quad d = 0{,}272\ m$$

31. Un bloque de 8,00 kg se mueve sobre una superficie horizontal rugosa y choca con un resorte, como se puede ver en la figura 8.12. La velocidad del bloque *justo antes* del choque es de 4,00 m/s. Conforme el bloque rebota hacia la izquierda con el resorte descomprimido, su velocidad cuando se separa del resorte es de 3,00 m/s. Si el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie es 0,400, determine, a) la energía perdida debido a la fricción mientras el bloque está en contacto con el resorte, y b) la distancia máxima que se comprime el resorte.

Resolución :

Parte (a)



$$E_{MC} - E_{MB} = W_{fricción}\ \text{(ida)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \Delta E_M = W_{fricción} \qquad ...(1)$$

Además: $$E_{MB} - E_{MC} = \Delta E_M = W_{fricción} \quad \text{(vuelta)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}kd^2 = W_{fricción} \qquad ...(2)$$

Sumando: (1) y (2)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(8)\ [(3)^2 - (4)^2] = 2\ W_{fricción} = 2\ \Delta E_M = \text{pérdida de la energía total debida a la fricción (ida + vuelta)}$$

$$\therefore \quad \Delta E_M = -28{,}0\ J$$

Parte (b) Sabemos que $\Delta E_{M\ ida} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{28}{2} = -\mu\ mg(d) = -(0{,}4)(8)(9{,}81)(d)$$

$$\therefore \quad d = 0{,}446\ m$$

32. Un palo saltador para niños (Fig. P8.32) almacena energía en un resorte ($k = 2{,}5 \times 10^4$ N/m). En la posición A (x_1 = -0,10 m) la compresión del resorte es un máximo y el niño está momentáneamente en reposo. En la posición B (x = 0) el resorte está en su posición de equilibrio y el niño se mueve hacia arriba. En la posición *C*, el niño está otra vez en reposo en la parte más alta del salto. Si se considera que la masa combinada del niño y el palo es de 25 kg, a) calcule la energía total del sistema si las dos energías potenciales son cero en $x = 0$, b) determine x_2, c) calcule la velocidad del niño en $x = 0$, d) encuentre el valor de *x* para el cual la energía cinética del sistema es un máximo, y e) obtenga la máxima velocidad hacia arriba del niño.



Figura P8.32

Resolución :

Datos: $k = 2{,}5 \times 10^4$ N/m ; $x_1 = -0{,}1$ m ; $m = 25$ kg

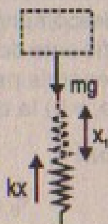
Parte (a)

$$E_M = E_k + E_p$$

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$\Rightarrow \quad mg\,x_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(2{,}5\times 10^4)(0{,}1)^2$$

$$\therefore \quad E_M = 125 \text{ joules}$$



Parte (b) $E_{M4} = E_{M3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_4^2 + mg\,x_2 = \frac{1}{2}k\,.\,(x_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (25)(9{,}81)x_2 = \frac{1}{2}(2{,}5\times 10^4)x_2^2 \quad \therefore \quad x_2 = 0{,}02 \text{ m}$$

Parte (c) En $x = 0$ la velocidad del niño = 0

Parte (d)

$$\frac{1}{2}k\,.\,(x_{máx})^2 = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = m.g\,h_{máx} = mg\,x_{máx}$$

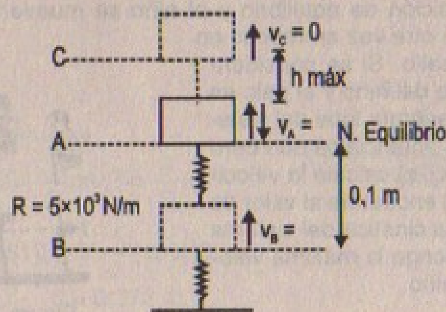
$$\Rightarrow \quad x_{máx} = \frac{2mg}{k} = \frac{2(25)(9{,}81)}{2{,}5\times 10^4} = 0{,}02 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,(v_{máx})^2 = m.g\,x_{máx} \;\therefore\; v_{máx} = \sqrt{2g\,x_{máx}} = 0{,}392 \text{ m/s}$$

33. Un bloque de 0,250 kg de masa se sitúa en la parte superior de un resorte vertical de constante k = 5 000 N/m y empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte 0,100 m. Después de que se suelta, el bloque se mueve hacia arriba y luego se separa del resorte. ¿A qué altura máxima sobre el punto de separación llega el bloque?

33A. Un bloque de masa *m* se sitúa en la parte superior de un resorte vertical de constante *k* y empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte una distancia *d*. Después de que se suelta, el bloque se mueve hacia arriba y luego se separa del resorte. ¿A qué altura máxima *h* sobre el punto de separación llega el bloque?

Resolución :



Considerar: $g = 9{,}81$ m/s²

$E_{MA} = E_{MB}$ (subida del bloque)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_A^2 + mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(0{,}25)v_A^2 + (0{,}25)(9{,}81)(0{,}1) = \frac{1}{2}(5\times 10^3)(0{,}1)^2$$

$$\therefore \quad v_A \approx 14{,}07 \text{ m/s}$$

Luego: $E_{MC} = E_{MA}$

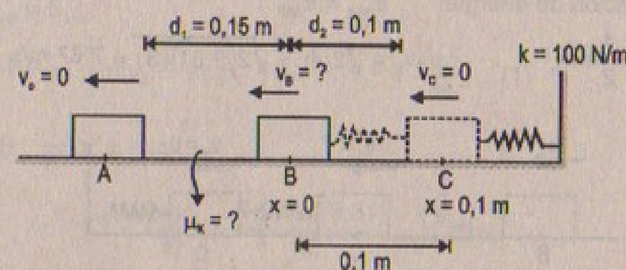
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\,h_{máx} = \frac{1}{2}m\,v_A^2$$

$$\therefore \quad h_{máx} = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{(14{,}07)^2}{2(9{,}81)}$$

En consecuencia: $h_{máx} = 10{,}1$ m

34. Un bloque de 2,0 kg de masa se mantiene en reposo mientras comprime 10 cm un resorte sin masa horizontal (k = 100 N/m). Cuando el bloque se suelta, se desplaza 0,25 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de detenerse. Calcule el coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque.

Resolución :



$$E_{MA} - E_{MB} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = -(\mu_k)(m)(g)(d)$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 = 2\mu_k\,g d_1 \qquad \ldots (\alpha)$$

Además: $E_{MB} - E_{MC} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,mv_B^2 - \frac{1}{2}kx^2 = -\mu_k mg(0{,}1) \qquad \ldots (\beta)$$

(α) en (β): tenemos que:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,(2\mu_k)(g)(0{,}15) - \frac{1}{2}(100)(0{,}1)^2 = -\mu_k\,.\,(2)(9{,}81)(0{,}1)$$

$$\therefore \quad \mu_k = 0{,}102$$

35. En la figura P8.35 se ve un bloque de 10,0 kg que se suelta desde el punto A. La pista no ofrece fricción excepto en la parte *BC*, de 6,00 m de longitud. El bloque se mueve hacia abajo por la pista, golpea un resorte de constante de fuerza $k = 2\,250$ N/m y lo comprime 0,300 m a partir de su posición de equilibrio antes de quedar momentáneamente en reposo. Determine el coeficiente de fricción cinético entre la superficie *BC* y el bloque.

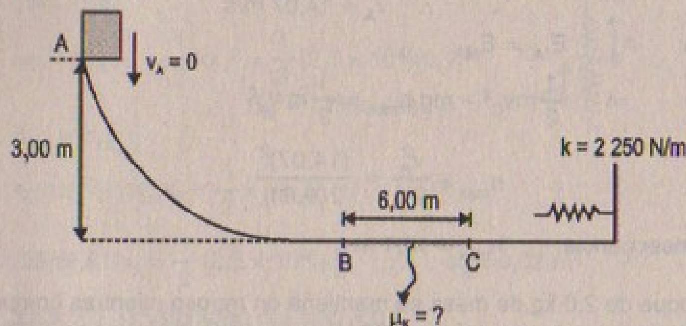


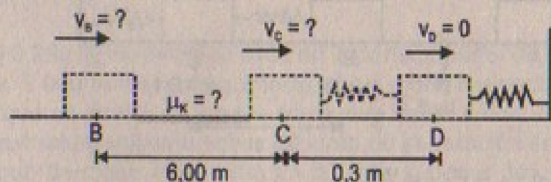
Figura P8.35

Resolución :

$m = 10$ kg ; $g = 9{,}81$ m/s² ; $k = 2\,250$ N/m

Por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 \qquad \therefore\ v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81)(3)} = 7{,}67$ m/s



$E_{MC} = E_{MD}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \quad v_c^2 = \frac{kx^2}{m} = \frac{(2250)(0{,}3)^2}{(10)} = 20{,}25$

Luego: en B → C

$\Delta E_M = W_{fricción}$

$\Rightarrow \quad E_{MC} - E_{MB} = W_{fricción} = -\mu_k\, mg\,(\overline{BC})$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k\,(mg)(6)$

Entonces: reemplazando: $\frac{1}{2}(10)\ [20{,}25 - 58{,}86] = -\mu_k\,(10)(9{,}81)(6)$

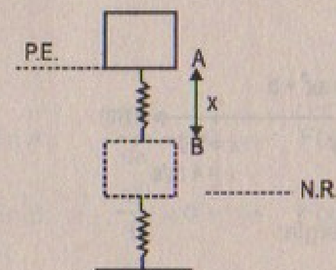
$\Rightarrow \quad 5 - (-38{,}61) = -\mu_k\,(588{,}6)$

$\therefore \quad \mu_k = \frac{193{,}05}{588{,}6} = 0{,}328$

36. Se deja caer una masa de 120 g que está unida al extremo de un resorte vertical no deformado ($k = 40$ N/m). a) ¿Cuál es su velocidad máxima? b) ¿Qué distancia desciende antes de quedar en reposo momentáneamente?

36A. Se deja caer una masa *m* que está unida al extremo de un resorte vertical no deformado con una constante de fuerza *k*. a) ¿Cuál es su velocidad máxima? b) ¿Qué distancia desciende antes de quedar en reposo momentáneamente?

Resolución :



$m = 0{,}12$ kg

$k = 40$ N/m

$g = 9{,}81$ m/s²

Parte (a)

$E_{MB} = E_{MA}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 = m.gx \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = \frac{km^2}{m}$ ... (1)

Parte (b) $\quad \frac{1}{2}kx^2 = m.gx$

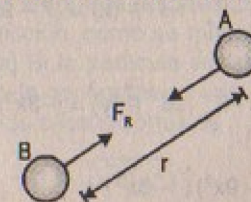
$\therefore \quad x = \frac{2mg}{k} = \frac{2(0{,}12)(9{,}81)}{40} = 0{,}06$ m

luego: $\quad v_{A(subida)} = \frac{(40)(0{,}06)^2}{0{,}12} = 1{,}2$ m/s (parte a)

RELACIÓN ENTRE FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

37. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r es $U(r) = \frac{A}{r}$, donde A es una constante. encuentre la fuerza radial **F**, en términos de A y r.

Resolución :



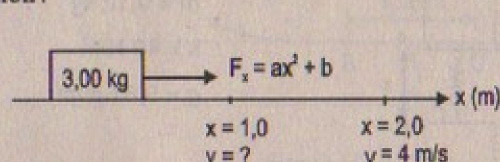
$U(r) = \frac{A}{r} \Rightarrow \frac{dU}{dr} = -A.\left(\frac{1}{r^2}\right)$

Pero: $\frac{dU}{dr} = -Fr \Rightarrow -A\left(\frac{1}{r^2}\right) = -Fr$

$\therefore \quad F(r) = \frac{A}{r^2}$

38. Sobre un bloque de 3,00 kg que se mueve por el eje x actúa una fuerza aislada que varía con la posición del bloque de acuerdo con la ecuación $F_x = ax^2 + b$, donde $a = 5,00\ N/m^2$ y $b = -2,50\ N$. En x = 1,0 m, el bloque se mueve hacia la derecha con 4,0 m/s. Determine su velocidad en x = 2,0 m.

Resolución :



$a = 5,00\ N/m^2$
$b = -2,50\ N$

Por teorema del trabajo y la energía:

$\Rightarrow \quad W_{TOTAL} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad \int_1^2 F_x dx = \frac{1}{2}(m)v_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$

Reemplazando: $\int_1^2 5,00\,x^2 dx + \int_1^2 -2,50 dx = \frac{1}{2}(3)\left[16 - v_i^2\right]$

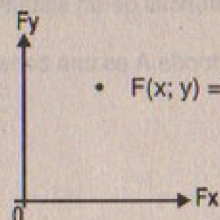
$\Rightarrow \quad \frac{500}{3}x^3\Big|_1^2 - 2,50\,x\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\left(16 - v_i^2\right) \quad \therefore \quad v_i = 3,14\ m/s$

39. Una función energía potencial para una fuerza bidimensional es de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x,y).

Resolución :

$\frac{d(U(x;y))}{dx} = -F_x \Rightarrow \vec{F}(x) = (7 - 9x^2)\hat{i}$

$\frac{d(U(x;y))}{dy} = -F_y \Rightarrow \vec{F}(y) = (-3x^3)\hat{j}$



• F(x; y) = ?

$\therefore \quad \vec{F} = (7 - 9x^2)\hat{i} - 3x^3\hat{j}$

$U(x;y) = 3x^3y - 7x$

DIAGRAMAS DE ENERGÍA Y EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA

40. Para la curva de energía potencial que se muestra en la figura P8.40, a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos señalados. b) Muestre los puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. c) Dibuje la curva de F_x contra x en x = 0 a x = 8,0 m.

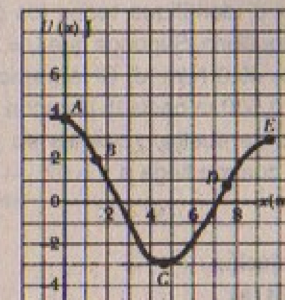


Figura P8.40

Resolución :

Parte (a) En A: $\frac{dU}{dx} = < 0 \Rightarrow F(x) > 0$

En B: $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F(x) > 0$

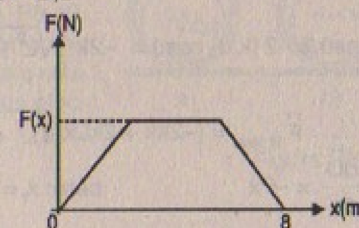
En C: $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F(x) = cte$

En D: $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F(x) < 0$

En E: $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F(x) < 0$

Parte (b) Equilibrio estable = C ; Equilibrio inestable = A, E
Equilibrio neutro = B,D

Parte (c) x = 0 ;
x = 8 m



41. Una partícula de masa *m* se suspende entre dos resortes idénticos sobre la parte superior de una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P8.41. Los dos resortes tienen constante k. a) Si la partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, demuestre que su energía potencial debida a los resortes es

$$U(x) = kx^2 + 2kL - \left(L - \sqrt{x^2 + L^2}\right)$$

Sugerencia: Véase el problema 78 del capítulo 7.) b) Grafique U(x) contra x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga que L = 1,20 m y k = 40,0 N/m. c) Si la partícula se jala 0,500 m hacia la derecha y después se suelta, ¿cuál es su velocidad cuando llega a x = 0?

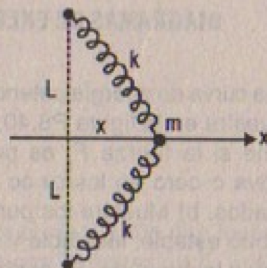
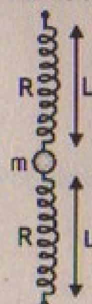


Figura P8.40

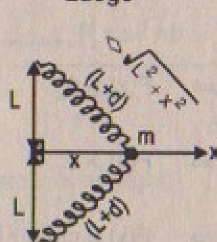
Resolución :

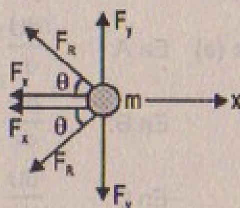
Parte (a)

Inicialmente — Luego — D.C.L. (m)



U(o) = ?





Sabemos que: $(L)^2 + (x)^2 = (L + d)^2 \Rightarrow d = \sqrt{L^2+x^2} - L$

Además: $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$

Entonces:

$$+F_{R\ total} = 2\,F_x \cos\theta = -2\,[k.d]\cos\theta = -2k\left[\sqrt{L^2+x^2} - L\right]\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$$\therefore\ \vec{F}_{R\ total} = [-2kx + 2kLx/\sqrt{L^2+x^2}\ ]\hat{i}$$

Sabemos que: $\dfrac{dU}{dx} = -Fx$ pero: $x_f = \sqrt{L^2+x^2} - L$

$$\Rightarrow \int_0^{x_f} dU = +\int_0^{x_f} 2kx dx - \int_0^{x_f} \frac{2kLxdx}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

cambio de variable:

$\sqrt{L^2+x^2} = U \Rightarrow 2xdx = 2UdU$

$$\Rightarrow U(x) - U(0) = \left.\frac{2kx^2}{2}\right|_0^{x_f} - 2kLx\Big|_0^{x_f}$$

$$\therefore\ U(x) = kx^2 \Big|_0^{\sqrt{L^2+x^2}-L} - 2kLx \Big|_0^{\sqrt{L^2+x^2}-L}$$

En consecuencia: $U(x) = kx^2 + 2kL\left[L - \sqrt{x^2+L^2}\right]$

Parte (b) L = 1,2 ; k = 40N/m

$$\Rightarrow U(x) = 40x^2 + 96\left[1{,}2 - \sqrt{x^2+1{,}44}\right]$$

Parte (c)

L = 1,2 m k = 40 N/m

$U_i = 0$

$$U_f = U(0{,}5) = 40(0{,}5)^2 + 2(40)(1{,}2)\left[1{,}2 - \sqrt{(0{,}5)^2 + (1{,}2)^2}\right]$$

$\Rightarrow$ U(0,5) = 0,4 joules

Luego: por conservación de energía

$-\Delta U = \Delta E_k$

$\Rightarrow -(U_f - U_i) = \frac{1}{2}mv_f^2$

$\Rightarrow -(-0{,}4) = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{(0{,}8)/m}$ m/s

42. Un tubo hueco tiene uno o dos pesos pegados a su superficie interior, como se ilustra en la figura P8.42. Caracterice cada configuración como de equilibrio estable, inestable o neutro. Explique cada una de sus elecciones.

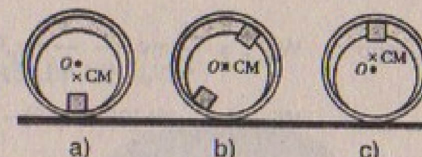


Figura P8.42

Resolución :

- El gráfico (a) se considera que la masa se encuentra en "equilibrio estable" puesto que la energía mecánica es igual a cero.
- En el gráfico (b) la masa se encuentra en "equilibrio neutro" en vista que su energía mecánica, además de ser diferente de cero, tiene energía potencial que varía conforme la masa varía de posición.
- En el gráfico (c) la masa se encuentra en "equilibrio inestable" en vista que llega a tener una energía potencial máxima.

43. Una partícula de masa m = 5,00 kg se suelta desde un punto A sobre la vereda sin fricción mostrada en la figura P8.43. Determine, a) la velocidad de la partícula en los puntos B y C, y b) el trabajo neto realizado por la fuerza de la gravedad al mover la partícula de A a C.

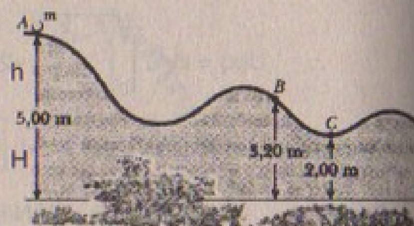


Figura P8.43

Resolución :

g = 9,81 m/s²

Parte (a)

$E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,81)(1,8)}$

$\therefore \quad v_B \approx 5,94$ m/s

$E_{MA} = E_{MC}$

$\Rightarrow \quad mg(h + H) = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{2g(H+h)} = \sqrt{2(9,81)(1,8+1,2)}$

$\therefore \quad v_C \approx 7,67$ m/s

Parte (b)

$W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C} = \Delta E_k$

$\Rightarrow \quad W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}(5)(2)(9,81)(1,8)$

$\therefore \quad W_{A\to B} = 88,29$ joules

Luego: $\quad W_{B\to C} = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$

$\Rightarrow \quad W_{B\to C} = \frac{1}{2}(5)\,[2(9,81)(3) - 2(9,81)(1,8)] = 58,86$ joules

En consecuencia: $\quad W_{A\to C} = 88\,29 + 58,86 = 147,15$ joules

EQUIVALENCIA MASA - ENERGÍA

44. Encuentre la equivalencia de energía de, a) un electrón de $9,11 \times 10^{-31}$ kg de masa, b) un átomo de uranio de $4,0 \times 10^{-25}$ kg de masa, c) un sujetador de papeles de 2,0 g de masa y d) la Tierra, de $5,99 \times 10^{24}$ kg de masa.

Resolución :

Parte (a) $E_{(e-)} = (9,11 \times 10^{-31}\text{ kg})(9 \times 10^{16}) = 81,99 \times 10^{-15}$ joules

Parte (b) $E_{(u)} = (4 \times 10^{-25}\text{ kg})(9 \times 10^{16}) = 36 \times 10^{-9}$ joules

Parte (c) $E_{(p)} = (2 \times 10^{-3}\text{ kg})(9 \times 10^{16}) = 18 \times 10^{13}$ joules

Parte (d) $E_{(T)} = (5,99 \times 10^{24}\text{ kg})(9 \times 10^{16}) = 54 \times 10^{40}$ joules

45. La expresión para la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v está dada por la ecuación 7.20, la cual puede escribirse como $K = \gamma mc^2 - mc^2$, donde $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$. El término γmc^2 es la energía total de la partícula, y el término mc^2 es su energía en reposo. Un protón se mueve con una velocidad de 0,990 c, donde c es la velocidad de la luz. Encuentre, a) su energía en reposo, b) su energía total, y c) su energía cinética.

Resolución :

$K = r\,mc^2 - mc^2 \qquad \gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad c = 3 \times 10^8$ m/s

$v_{p+} = 0,990\,c \qquad m_{p+} = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

Parte (a) Energía en reposo $= (1,67 \times 10^{-27})(9 \times 10^{16}) = 15 \times 10^{-11}$ joules

Parte (b) Energía total $= \left[1 - \left(\frac{0,990c}{c}\right)^2\right]^{-1/2} [15 \times 10^{-11}] - [15 \times 10^{-11}]$

$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{15 \times 10^{-11}}{\sqrt{0,0199}} - 15 \times 10^{-11} = 92,1 \times 10^{-11}$ joules

Parte (c) $\quad E_k = \frac{1}{2}(1,67 \times 10^{-27})(9 \times 10^{16}) = 7,5 \times 10^{-11}$ joules

PROBLEMAS ADICIONALES

46. Una partícula de 200 g se suelta desde el reposo en el punto A a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio R = 30,0 cm (figura P8.46). Calcule, a) su energía potencial gravitacional en el punto A respecto del punto B, b) su energía cinética en el punto B, c) su velocidad en el punto B, y d) su energía cinética y energía potencial en el punto C.

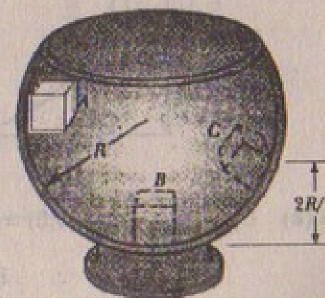
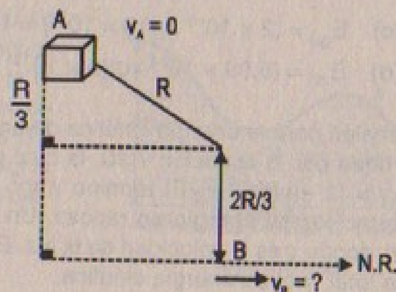


Figura P8.46

Resolución :

m = 0,2 kg ; R = 0,3 m ; g = 9,81 m/s²

Parte (a)



$E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow\ E_{MA} = E_{PA} = mg\ R$

$= (0,2)(9,81)(0,3)$

$= 0,59$ joules

Parte (b) $E_{MA} = E_{MB} = \frac{1}{2} m\, v_B^2$

$\Rightarrow\ m.gR = \frac{1}{2} m\, v_B^2 \quad \therefore\ v_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9,81)(0,3)}$

$\Rightarrow\ v_B \approx 2,43$ m/s

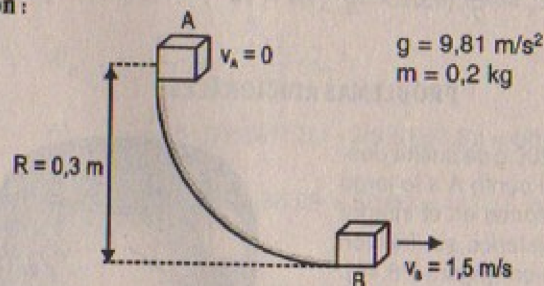
Parte (c) $E_{KB} = E_{MA} = U_{PA} \quad \therefore\ E_{KB} = 0,59$ joules

Parte (d) $E_{KC} + E_{PC} = E_{MC} = mg\left(\frac{2R}{3}\right) = (0,2)(9,81)(0,3)\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore\ E_{MC} = 0,3924$ joules

47. La partícula descrita en el problema 46 (figura P8.46) se suelta desde el reposo en A, y la superficie del tazón es rugosa. La velocidad de la partícula *B* es de 1,50 m/s. a) ¿Cuál es la energía cinética en *B*? b) ¿Cuánta energía se pierde debido a la fricción cuando la partícula se mueve de *A* a *B*? c) ¿Es posible determinar μ, de alguna manera sencilla, a partir de estos resultados? Explique.

Resolución :



g = 9,81 m/s²
m = 0,2 kg

Parte (a) $E_{KB} = E_{MB} = mg\,(0,3) = \frac{1}{2}(m)v_b^2 = \frac{1}{2}(0,2)(1,5)^2$

$\therefore\ E_{KB} = 0,225$ joules

Parte (b) $E_{MB} - E_{MA} = \Delta E_M$ = Energía perdida debido a la fricción

$\Rightarrow\ \Delta E_M = E_{KB} - E_{PA} = 0,225 - (0,2)(9,81)(0,3)$

$\therefore\ \Delta E_M = -0,3636$ joules

Parte (c) Sabemos que:

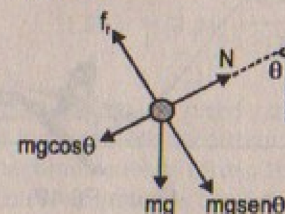
$\Delta E_M = W_{fricción} \qquad d = R.\theta$

$\Rightarrow\ \Delta E_M - f_r\,(d)$

$\Rightarrow\ -\Delta E_M = -f_r\,(d) \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{\Delta E_M}{R\theta}$

pero: $f_r = \mu.N$

Además:



$N - mg\cos\theta = m\,\frac{v^2}{R}$

$\therefore\ N = mg\cos\theta + m\,\frac{v^2}{R}$

Como "N" varía con la posición de la partícula entonces f_r también variará; por consiguiente μ variará concluimos que "μ" no se puede determinar.

48. El juguete de un niño se compone de una pieza de plástico unida a un resorte (Fig. P8.48). el resorte se comprime 2,0 cm y el juguete se mueve. Si la masa de éste es 100 g y se eleva a una altura máxima de 60 cm, calcule la constante de fuerza del resorte.

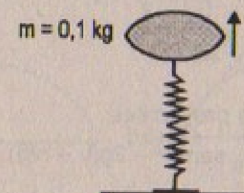
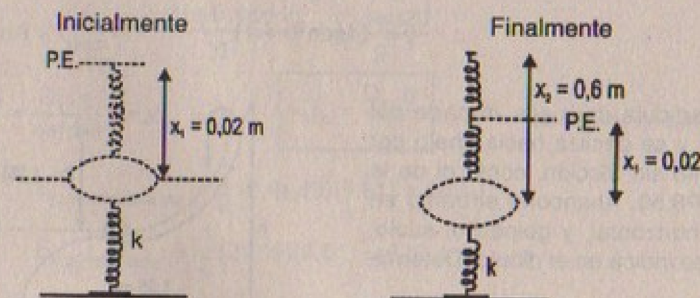


Figura P8.48

Resolución :

m = 0,1 kg ; g = 9,81 m/s²



Inicialmente: $mg(x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_i^2$

Finalmente: $\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2$

$\Rightarrow\ mgx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_2^2$

$$\Rightarrow \quad mgx_1 = \frac{1}{2}k\,(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)$$

$$\therefore \quad k = \frac{2m(g)(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)} = \frac{2(0{,}1)(9{,}81)(0{,}02)}{(0{,}6 - 0{,}02)(0{,}6 + 0{,}02)} = 0{,}1\ \text{N/m}$$

49. Una niña se desliza sin fricción desde una altura *h* por la resbaladilla curva de una alberca (Fig. P8.49). La niña se lanza a la alberca desde una altura *h*/5. Determine su altura máxima en el aire *y* en función de h y θ.



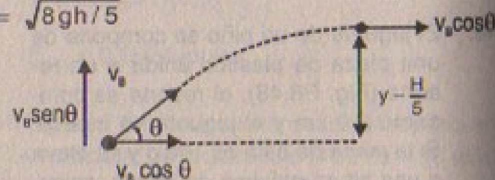
Figura P8.49

Resolución:

$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mg\left(h - \frac{h}{5}\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{8gh/5}$$

$E_{MB} = E_{MC}$



Por mov. de proyectiles:

$$0 = (v_B\ \text{sen}\theta)^2 - 2g(y - h/5)$$

$$\Rightarrow \quad 2gy - 2g\frac{h}{5} = v_B^2 \,.\, \text{sen}^2\theta = \frac{8gh}{5}\ \text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2gy = \frac{8gh}{5}\ \text{sen}^2\theta + \frac{2gh}{5} = \frac{h}{5}\ (4\text{sen}^2\theta + 1)$$

$$\therefore \quad y = (4\text{sen}^2\theta + 1)$$

50. Una partícula de masa *m* parte del reposo y se desliza hacia abajo por un tramo sin fricción, como el de la figura P8.50. Abandona el tramo en forma horizontal, y golpea el suelo, como se indica en el dibujo. Determine *h*.

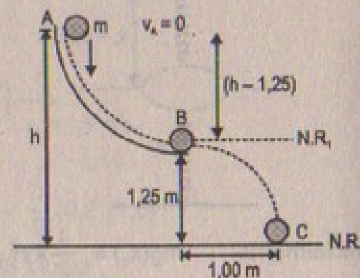


Figura P8.50

Resolución:

$g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mg\,(h - 1.25) = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2g\,(h - 1.25) \qquad \dots (1)$$

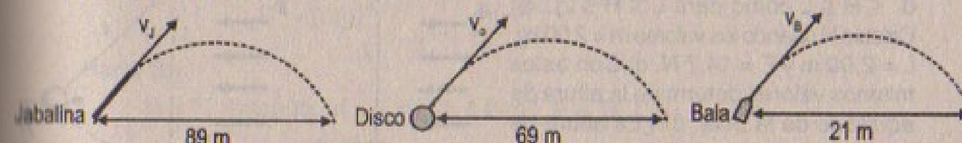
Por mov. proyectiles:

$$v_{bxt} = 1{,}00 \qquad 1{,}25 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}25 = \frac{1}{2}(9{,}81)\left[\frac{1}{v_B}\right]^2 \quad \dots (2)$$

$$\text{(1) en (2):} \qquad 1{,}25 = \frac{1}{2}(9{,}81)\left[\frac{1}{2g(h - 1{,}25)}\right] \quad \therefore \quad h = 1{,}45\ \text{m}$$

51. Las masas de la jabalina, el disco y la bala son 0,80 kg, 2,0 kg y 7,2 kg, respectivamente, y los lanzamientos récord en los deportes de pista que usan estos objetos son aproximadamente 89 m, 69 m y 21 m, respectivamente. Ignore la resistencia del aire y: a) calcule las energías cinéticas iniciales mínimas que producen estos lanzamientos, y b) encuentre la fuerza promedio ejercida sobre cada objeto durante el lanzamiento, suponiendo que la fuerza actúa a lo largo de una distancia de 2,0 m. c) ¿Sus resultados señalan que la resistencia del aire es un factor importante?

Resolución:



Sabemos que en un movimiento de proyectiles se cumple que:

$$t_{vuelo} = \frac{2v\text{sen}\theta}{g}$$

$$D_x = v\cos\theta \times t_{vuelo} = \frac{2v\cos\theta \,.\, v\text{sen}\theta}{g} = \frac{v^2.\text{sen}2\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{D_x \cdot g}{\text{sen}2\theta} \qquad \therefore \quad \boxed{v_{mín}^2 = \frac{D_x \cdot g}{(1)}} \quad ; \qquad \text{sen}2\theta \text{ es máximo} = 1$$

Luego:

$$E_{k\ mínima\ jabalina} = \frac{1}{2}(0{,}8)(89)(9{,}81) = 349\ \text{J}$$

$$E_{k\ mínima\ disco} = \frac{1}{2}(2)(69)(9{,}81) = 676\ \text{J}$$

$$E_{k\ mínima\ bala} = \frac{1}{2}(7{,}2)(21)(9{,}81) = 741\ \text{J}$$

Parte (b)

Sabemos que por el teorema del trabajo y la energía se cumple que:

$$F_{promedio} \,.\, d = W = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad F_{promedio} = \frac{1}{2}m.\frac{v^2}{d} = \frac{E_k}{d}$$

Luego: $F_{\text{promedio (jabalina)}} = \dfrac{349}{2} = 174\ \text{N}$

$F_{\text{promedio (disco)}} = \dfrac{676}{2} = 338\ \text{N}$

$F_{\text{promedio (bala)}} = \dfrac{741}{2} = 370\ \text{N}$

52. Una bola que tiene una masa *m* se conecta mediante una cuerda de longitud *L* a un punto pivote y se mantiene fija en una posición vertical. Una fuerza constante del viento de magnitud *F* sopla de izquierda a derecha, como muestra la figura P8.52. a) Si la bola se suelta desde el reposo, demuestre que la altura máxima *H* que alcanza, cuando se mide desde su altura inicial, es:

$$H = \frac{2L}{1+(mg/F)}$$

Suponga que la cuerda no se rompe en el proceso y verifique que la fórmula anterior es válida tanto para $0 \le H \le L$ como para $L \le H \le 2L$. b) Calcule H usando los valores m = 2,00 kg, L = 2,00 m y F = 14,7 N. c) Con estos mismos valores determine la altura de *equilibrio* de la bola. d) ¿La altura de equilibrio puede ser alguna vez más grande que L? Explique.

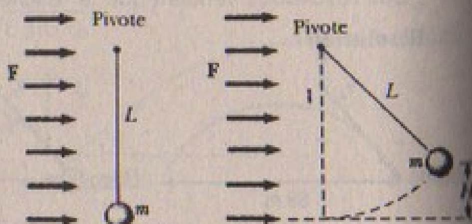


Figura P8.52

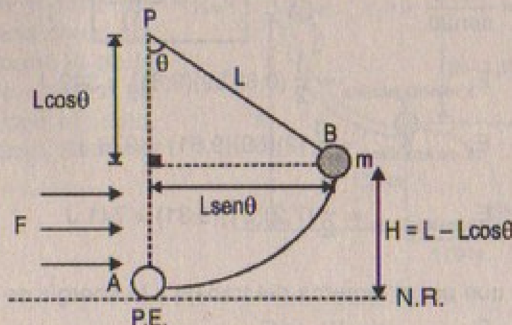
Resolución :52

Parte (a) Por demostrar: $H = \dfrac{2L}{1+\left(\dfrac{mg}{F}\right)^2}$

Sea:

Del gráfico:

$H = L - L\cos\theta$



Entonces: $W_{total} = \Delta E_{K\,total} = \Delta E_{K\,F.const} + \Delta E_{K\,F.ext}$

$\Rightarrow \quad \Delta U = \Delta E_{K\,F.EXT} = W_{F.EXT}$

$\Rightarrow \quad mgH = FL\,\text{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad mgL\,(1-\cos\theta) = F.L\,\text{sen}\theta$

desarrollando: $\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{F}{mg} \Rightarrow \csc\theta - \text{ctg}\theta = \dfrac{F}{mg}$ ... (1)

Por Trigonometría: sabemos que: $\csc^2\theta - \text{ctg}^2\theta = 1$

$\Rightarrow \quad (\csc\theta - \text{ctg}\theta)(\csc\theta + \text{ctg}\theta) = 1 \quad \therefore \quad \csc\theta + \text{ctg}\theta = \dfrac{mg}{F}$ ... (2)

(1) + (2): $2\csc\theta = \dfrac{F}{mg} + \dfrac{mg}{F} \quad \Rightarrow 2\csc\theta = \dfrac{F^2+(mg)^2}{F\,mg}$

$\therefore \quad \text{sen}\theta = \dfrac{2F\,mg}{F^2+(mg)^2}$

como: $mgH = FL\,\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{FL}{mg}\left[\dfrac{2F\,mg}{F^2+(mg)^2}\right]$

$\therefore \quad H = \dfrac{2F^2L}{F^2+(mg)^2} = \dfrac{2L}{1+\left(\dfrac{mg}{F}\right)^2}$ l.q.q.d.

Parte (b)

H = ? cuando: m = 2 kg; L = 2 m ; F = 14,7 N

$\Rightarrow \quad H = \dfrac{2(2)}{1+\left(\dfrac{2(9{,}81)}{14{,}7}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad H = 1{,}44\ \text{m}$

Parte (c)

Supongamos: por hipótesis: H > L

$\Rightarrow \quad \dfrac{2L}{1+\left[\dfrac{mg}{F}\right]^2} > L \Rightarrow \quad \dfrac{2F^2}{F^2+(mg)^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{F^2-(mg)^2}{F^2+(mg)^2} > 0$

Como $F^2 + (mg)^2 > 0 \Rightarrow F^2 - (mg)^2 > 0 \quad \therefore \quad (F - mg)(F + mg) > 0$

En consecuencia: para que H > L se tiene que cumplir: F > mg

53. Pruebe que las siguientes fuerzas son conservativas y encuentre el cambio en la energía potencial correspondiente a cada una, considerando $x_i = 0$ y $x_f = x$: a) $F_x = ax + bx^2$, b) $F_x = Ae^{\alpha x}$. (a, b, A y α son constantes).

Resolución :53

Datos: $x_i = 0 \quad x_f = x$

Parte (a)

Por demostrar: $F_x = ax + bx^2$ es conservativa

$$-\Delta U = \int F(x)\,dx$$

pero: "F" conservativa

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = -F(x) \quad \Rightarrow \quad dU = -F(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{x_f} dU = \int_0^{x_f} axdx + \int_0^{x_f} bx^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad U(x) - U(0) = -\left(\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{x_f}$$

$$\therefore \quad \Delta U = -\left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3\right]$$

Parte (b) $F_x = A.e^{\alpha x}$ es conservativa

$$\Rightarrow \quad -\Delta U = \int F(x)\,dx$$

Como "F" es conservativa:

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = -Fx \quad \Rightarrow \quad dU = -F(x)\,dx$$

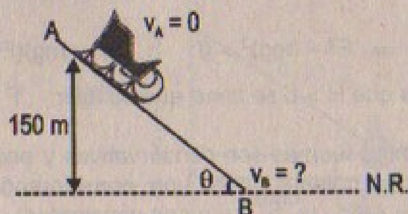
$$\Rightarrow \quad \int_0^{x_f} dU = -\int_0^{x_f} A.e^{\alpha x}dx$$

Luego: $U(x_f) - U(0) = -\frac{A}{\alpha}.e^{\alpha x}\Big|_0^{x_f}$

$$\therefore \quad \Delta U = -\frac{A}{\alpha}.e^{\alpha x}$$

54. Un trineo de dos rastras baja por una pista de hielo parte desde un punto de la misma que está a una distancia vertical de 150 m sobre el nivel del suelo. Si se ignora la fricción, ¿cuál es su velocidad en el pie de la colina?

Resolución:



$g = 9{,}81\ m/s^2$

Por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m\,v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2gh = 2(9{,}81)(150)$$

$$\therefore \quad v_B \approx 54{,}25\ m/s$$

55. Un bloque de 2,00 kg situado sobre una pendiente rugosa se conecta a un resorte de masa despreciable que tiene una constante de resorte de 100 N/m (figura P8.55). El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte no está deformado, y la polea no presenta fricción. El bloque se mueve 20,0 cm hacia debajo de la pendiente antes de detenerse. Encuentre el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente.

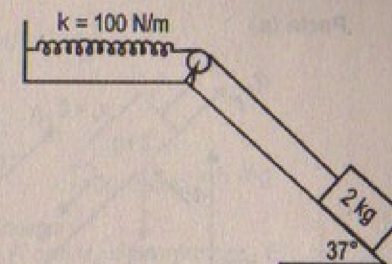
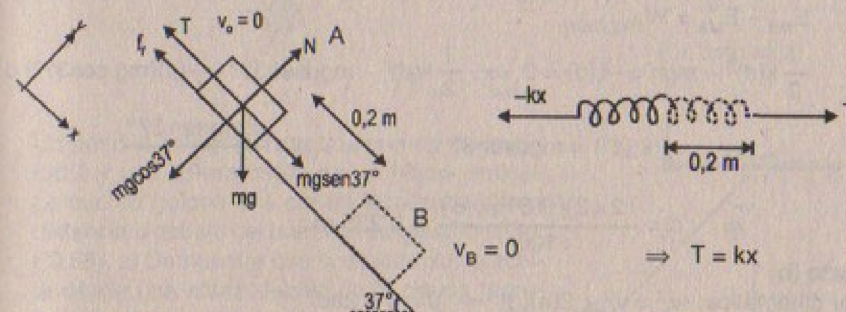


Figura P8.55

Resolución:

$\mu = ?$; $g = 9{,}81\ m/s^2$



$\Rightarrow \quad T = kx$

Por el Teorema del trabajo y la energía: $W_{TOTAL} = \Delta E_k$

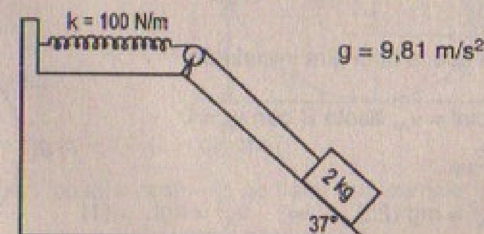
$$\Rightarrow \quad mg\,sen37\,(x) - \frac{1}{2}kx^2 - f_r\,.\,x = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2)(9{,}81)(0{,}6)(0{,}2) - \frac{1}{2}(100)(0{,}2)^2 = (\mu)(2)(9{,}81)(0{,}2)(0{,}8)$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}3544 - 2 = \mu\,(3{,}1392) \qquad \therefore \quad \mu = 0{,}113$$

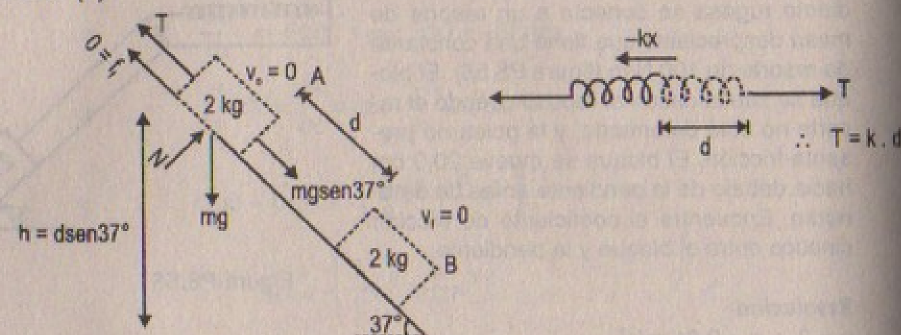
56. Suponga que la pendiente no presenta fricción en el sistema descrito en el problema 55 (figura P8.55). El bloque que se suelta desde el reposo con el resorte inicialmente no deformado. a) ¿Qué distancia baja por la pendiente antes de detenerse? b) ¿Cuál es su aceleración en su punto más bajo? ¿La aceleración es constante? c) Describa las transformaciones de energía que ocurren durante el descenso.

Resolución:



$g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (a)



$E_{MB} - E_{MA} = W_{FRICCIÓN}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(d)^2 - mgh = -f_f(d) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}k(d)^2 - mgd\,sen37° = -(\mu)(mg\cos 37°)\,d = 0$

$\therefore \quad \frac{1}{2}k\,(d^2) = mgd\,sen37° \qquad \therefore \quad d = \frac{2mg\,sen\,37°}{k}$

$\Rightarrow \quad d = \frac{(2)(2)(9{,}81)(0{,}6)}{100} = 0{,}235 \text{ m}$

Parte (b)

Por cinemática: $v_f^2 = v_i^2 + 2(a)(d) \Rightarrow 0 = 0 + 2ad$

$\therefore \; a = 0$

Luego: sabemos que: $mgsen37° - kx = m(a)$

$\therefore \quad a = g\,sen\,37° - \frac{k(x)}{m} \qquad \therefore \; a \neq cte$

Parte (c)

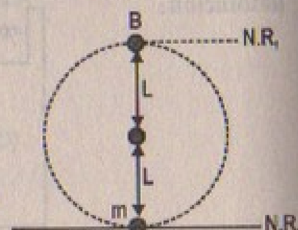
Inicialmente cuando tiene $v_o = 0$, es decir se encuentra en reposo tiene energía mecánica = energía potencial con respecto a un nivel de referencia respecto del peso Conforme el bloque se desliza y el resorte se deforma, su energía potencial disminuye para paulatinamente convertirse en $E_k + U_{PE}$ hasta que finalmente cuando alcanza la distancia máxima (o desplazamiento) se convierte en $E_{PE} = E_M$.

57. Una bola gira en un círculo vertical en el extremo de una cuerda. Si la energía total de la bola permanece constante, muestre que la tensión en la cuerda en el punto inferior es mayor que la tensión en el punto superior en seis veces el peso de la bola.

Resolución :

Supongamos que la bola gira inicialmente en A con:

velocidad inicial = v_A, hasta B con $v_B = 0$



$\Rightarrow \quad E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_A^2 = mg\,(2L) \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = 4gL \;...\; (1)$

Por movimiento circular: $\qquad T - mg = m\frac{v_A^2}{L} \;...\; (2)$

Entonces: (1) en (2)

$T = mg + \frac{4mgL}{L} = 5\,mg \qquad \therefore \quad T_{PUNTO\,BAJO} = 5\,mg$

Ahora:

Si la bala parte de B con v_B y llega a el punto A con $v_A = 0$ entonces: $E_{MA} = E_{MB}$

$\frac{1}{2}m\,v_B^2 - mg\,(2L) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 4gL$

Por mov. circular: $\qquad \Rightarrow \quad mg + T = m\frac{v_B^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{L}(4gL) - mg$

$\therefore \quad T = 3mg$ alto

$\therefore \quad T_{bajo} > T_{alto}$

58. Un péndulo integrado por una cuerda de longitud *L* y una esfera oscila en un plano vertical. La cuerda golpea una clavija localizada a una distancia *d* debajo del punto de suspensión (Fig. P8.58). a) Demuestre que si el péndulo se suelta desde una altura debajo de la clavija regresará a su altura después de golpearla. b) Demuestre que si el péndulo se suelta desde la posición horizontal ($\theta = 90°$) y oscila en un círculo completo centrado en la clavija, entonces el valor mínimo de *d* debe ser 3*L*/5.

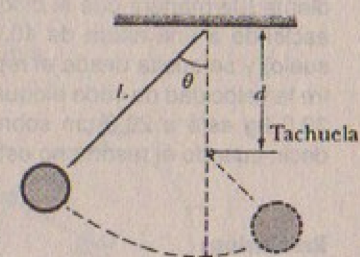
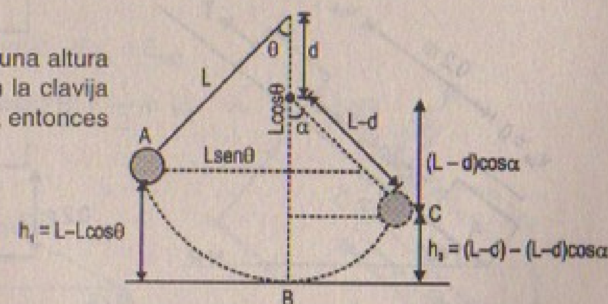


Figura P8.58

Resolución :

Parte (a)

Si el péndulo se suelta de una altura h_1, entonces al chocar con la clavija regresará a su mima altura, entonces se tiene que cumplir que:



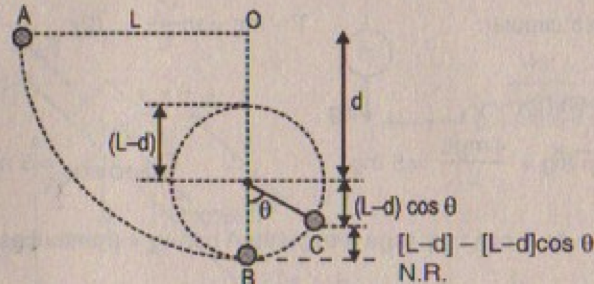
$E_{MA} = E_{MB} = E_{MC}$

$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_2$

$\Rightarrow \; mg\,[L - L\cos\theta] = mg\,[L - d - (L - d)\cos\alpha]$

Esto quiere decir que: $\cos\alpha = \cos\theta - d$ se tiene que cumplir

Parte (b)



59. Un bloque de 20.0 kg se conecta a otro bloque de 30,0 kg por medio de una cuerda que pasa por una polea sin fricción. el bloque de 30,0 kg está conectado a un resorte que tiene una masa despreciable y una constante de fuerza de 250 N/m, como en la figura P8.59. el resorte no está deformado cuando el sistema está en las condiciones indicadas en la figura, y la pendiente no presenta fricción. El bloque de 20,0 kg se jala 20,0 cm hacia debajo de la pendiente (de manera que el bloque de 30,0 kg asciende a una altura de 40,0 cm sobre el suelo) y se suelta desde el reposo. Encuentre la velocidad de cada bloque cuando el de 30,0 kg está a 20,0 cm sobre el suelo (es decir, cuando el resorte no está deformado).

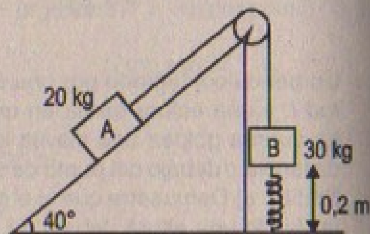


Figura P8.59

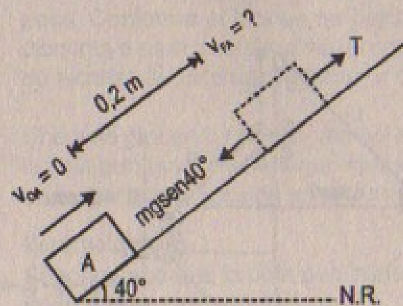
Resolución :

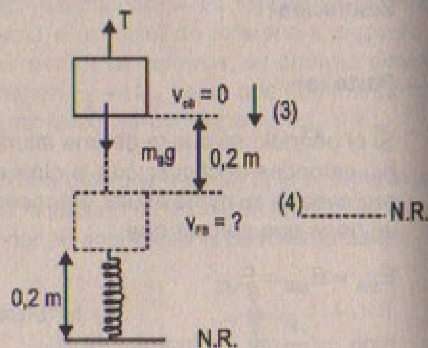
Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

$sen40° = 0{,}648$

$cos40° = 0{,}762$

$k = 250\ N/m$





Para el bloque «A»

$$W_{total} = \Delta E_{K\ total} = -\Delta U + W_{tensión}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{K\ sistema} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\Delta U + W_{tensión}$$

Luego: $\quad T(0{,}2) = m_1 \cdot g\,(0{,}2)\ sen\ 40°$

$$\Rightarrow \quad T = (9{,}81)\,(20)\,(0{,}648) \qquad \therefore \quad T = 127{,}14\ N$$

Por otro lado para el bloque «B»:

$$W_{total} = \Delta E_{K\ sistema}$$

$$\Rightarrow \quad W_{FR} + W_{peso} + W_{tensión} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta U_{resorte} - \Delta U_{peso} - T(0{,}2) = \frac{1}{2}(30+20)\,v_f^2$$

$$\Rightarrow \quad -\left[-\frac{1}{2}250(0{,}2)^2 - 0\right] - \left[-(m_2)(9{,}81)(0{,}2)\right] - (127{,}14)(0{,}2) = \frac{1}{2}(50)\,v_f^2$$

$$\Rightarrow \quad 5 + 58{,}86 - 25{,}428 = 25v_f^2$$

Luego: $\quad 63{,}86 - 25{,}428 = 25v_f^2$

Entonces: $\quad \sqrt{\dfrac{38{,}432}{25}} = v_f^2$

$$\therefore \quad v_f = 1{,}239 = 1{,}24\ m/s$$

60. Considere una bola que gira en un plano vertical con velocidad $v_0 = \sqrt{gR}$ en el punto superior del círculo, como en la figura P8.60. ¿A qué ángulo θ debe cortarse la cuerda de manera que la bola pase por el centro del círculo?

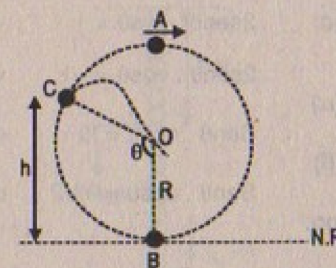


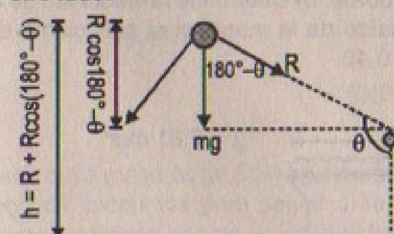
Figura P8.60

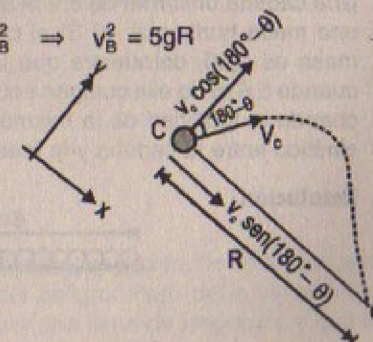
Resolución :

Por conservación de la energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_a^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}m\,v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 5gR$$

Por otro lado:





$E_{MB} = E_{MC}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v_B^2 = mgh + \frac{1}{2}m\,v_C^2$

$\Rightarrow \quad v_B^2 = 2gR\,[1 + \cos(180° - \theta)] + v_C^2 \qquad \therefore \quad v_C^2 = 3gR + 2gR\cos\theta$

Asimismo por movimiento de proyectiles:

$R = v_C\,\text{sen}(180° - \theta) \times t$

$y(t) = v_C\cos(180° - \theta) \times t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_{vuelo} = \frac{2v_c\cos(180° - \theta)}{g}$

$\Rightarrow \quad R = \frac{v_C\text{sen}\theta\left[2v_c\cos(180° - \theta)\right]}{g} \qquad \therefore \quad V_c^2 = \frac{-gR}{2\,\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta}$

Luego igualando: $\quad v_C^2 = 3gR + 2gR\cos\theta = \frac{-gR}{2\,\text{sen}\theta.\cos\theta}$

$\Rightarrow \quad 2\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta\,[3 + 2\cos\theta] = -1$

$\Rightarrow \quad 6\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta + 4\cos^2\theta\,.\,\text{sen}\theta = -1$

$2\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta\,[3 + 2\cos\theta] = -1$

luego: $\quad 2\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta = 1 \quad \vee \quad 3 + 2\cos\theta = -1 \quad \ldots (\alpha)$

$2\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta = -1 \quad \vee \quad 3 + 2\cos\theta = 1 \quad \ldots (\beta)$

De (α)

$\text{Sen}\theta\,.\,\cos\theta = ½ \qquad \cos\theta = -2 \qquad \therefore$ no cumple

De (β)

$\text{Sen}\theta\,.\,\cos\theta = -1/2 \qquad \cos\theta = -1 \qquad \therefore \quad \text{sen}\theta = 1/2$ (cumple)

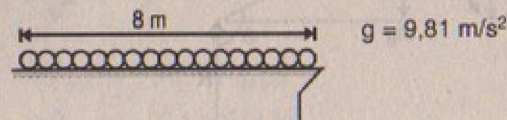
Luego:

Si $\text{sen}\theta = ½ \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = 5\pi/6$ ya que $\theta > 90°$

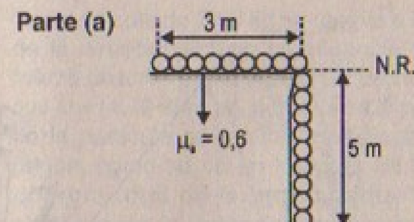
61. Una cadena uniforme de 8,0 m de longitud se encuentra inicialmente estirada sobre una mesa horizontal. a) Si el coeficiente de fricción estática entre la cadena y la mesa es 0,60, demuestre que la cadena empieza a deslizarse fuera de la mesa cuando 5,0 m de ella cuelgan sobre el borde. b) Determine la velocidad de la cadena cuando la totalidad de la misma ha caído de la mesa, si el coeficiente de fricción cinético entre la cadena y la mesa es 0,40.

Resolución:



$g = 9{,}81\ m/s^2$

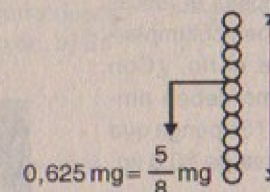
Parte (a)



Inicialmente:

$f_{te} = \mu_e.N = (0{,}6)(mg)$

Después:



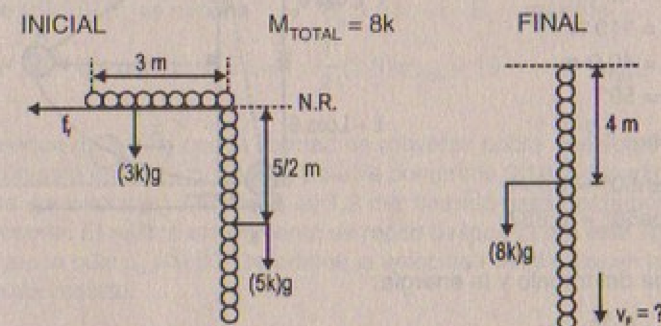
$0{,}625\,mg = \frac{5}{8}mg$

como $F_{peso} > F_{fricción}$, entonces la cadena deslizará después que haya caído 5 m, en consecuencia romperá la fuerza de fricción estática.

Parte (b)

Como M_{CADENA} es proporcional a su longitud, entonces:

INICIAL $\qquad M_{TOTAL} = 8k \qquad$ FINAL



$E_{M\,final} - E_{M\,inicial} = W_{fricción}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(8k)v_f^2 - (8k)g(4) + (5k)g\left(\frac{5}{2}\right) = -(0{,}6)(3k)g(3/2)$

$\Rightarrow \quad 4v_f^2 = 32g - \frac{25\,g}{2} - 2{,}7\,g$

$\Rightarrow \quad v_f^2 = 164{,}808/4$

$\therefore \quad v_f = 6{,}42\ m/s$

62. Jane, cuya masa es de 50,0 kg, necesita columpiarse encima de un río (de ancho *D*) lleno de cocodrilos para salvar a Tarzán del peligro. Pero debe hacerlo con una fuerza horizontal constante del viento **F** sobre una liana de longitud *L* y que forma

inicialmente un ángulo θ con la vertical (Fig. P8.62). Si se considera $D = 50,0$ m, $F = 110$ N, $L = 40,0$ m y $\theta = 50,0°$, a) ¿con qué velocidad mínima debe iniciar Jane su movimiento para llevar al otro lado? b) Una vez que se completa el rescate, Tarzán y Jane deben columpiarse de regreso sobre el río. ¿Con qué velocidad mínima deben empezar su movimiento? Suponga que Tarzán tiene una masa de 80,0 kg.

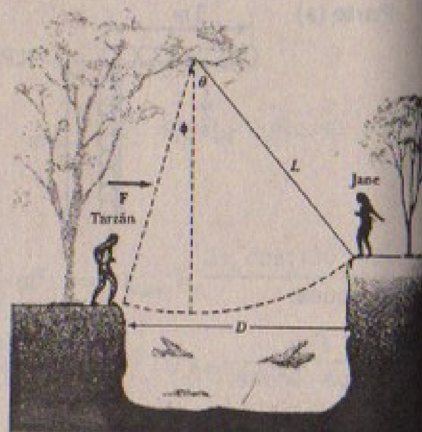


Figura P8.62

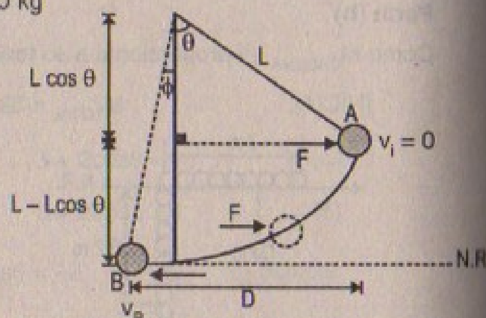
Resolución:

$g = 9,81$ m/s² ; $m_J = 50$ kg ; $m_T = 80$ kg

Parte (a)

Datos:
$D = 50$ m
$F = 110$ N
$L = 40,0$ m
$\theta = 50°$
$V_{Jane} = ?$

$\text{sen}50° = 0,771$
$\cos50° \approx 0,637$



Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{total\ Jane} = \Delta E_{k\ total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{peso} + W_F = \frac{1}{2} m_J v_B^2 \quad \Rightarrow \quad -\Delta U - F(D) = \frac{1}{2}(m_J)v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad m_J g[L - L\cos\theta] - F(D) = \frac{1}{2} m_J v_b^2$$

$$\Rightarrow \quad (50)(9,81)(40)[1-(0,637)] - (110)(50) = \frac{1}{2}(50)v_B^2$$

$$\therefore \quad v_B \approx 8,05 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$$W_{total\ del\ sistema} = W_{(J+T)} = \Delta E_{K\ total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{peso} + W_F = (m_J + m_T)[L - L\cos\theta] + F(D) = \frac{1}{2}(m_J + m_T)v_m^2$$

$$\Rightarrow \quad (130)(9,81)(40)[1 - 0,637] + 110(50) = \frac{1}{2}(130)v_m^2 \quad \therefore \quad v_m \approx 19,2 \text{ m/s}$$

63. Una partícula de 3,50 kg se mueve a lo largo de la dirección *x* bajo la influencia de una fuerza descrita por la función energía potencial $U = (4,70 \text{ J/m})|x|$, donde x es la posición de la partícula en metros medida desde el origen, como se ve en la figura P8.63. La energía total de la partícula es 15,0 J. a) Determine la distancia que recorre desde el origen antes de invertir la dirección. b) Encuentre su velocidad máxima.

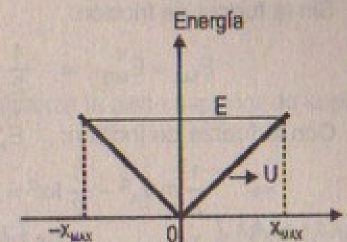


Figura P8.63

Resolución:

$m_p = 3,5$ kg ; $U = 4,70$ J/m $|x|$; $E = 15$ J

Parte (a): Según el gráfico:

$$\text{Energía} = E_k + E_p = \text{constante} = 15 \text{ J}$$

$\Rightarrow$ Si $E_{p\ max}$ $\Rightarrow$ E_k es mínima = 0

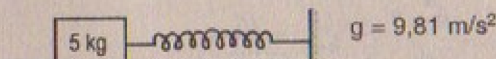
$\Rightarrow$ $4,70\,|x_{máx}| = 15$ $\therefore$ $x_{máx}$ = distancia que recorre = 3,19 m

Parte (b) Si E_p es mínima $\Rightarrow$ $E_p = 0$ $\therefore$ E_k = máxima

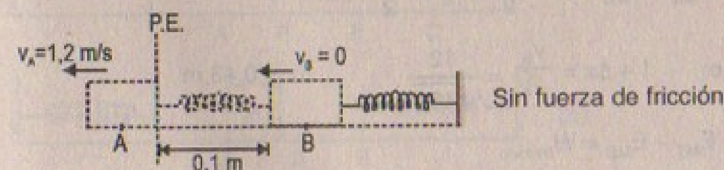
Luego: $E_k = E \Rightarrow \frac{1}{2}(3,5)v^2_{máx} = 15 \quad \therefore \quad v_{máx} \approx 2,93$ m/s

64. Un bloque de 5,0 kg con la libertad de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a un resorte. Éste se comprime 0,10 m a partir del equilibrio y se suelta. La velocidad del bloque es 1,2 m/s cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte. El mismo experimento se repite después pero esta vez con una superficie para la cual $\mu_k = 0,30$. Determine la velocidad del bloque en la posición de equilibrio del resorte.

Resolución:

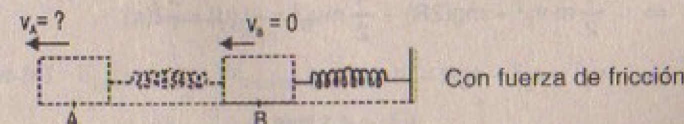


$g = 9,81$ m/s²



Sin fuerza de fricción

$\mu_k = 0,3$



Con fuerza de fricción

Sin la fuerza de fricción:

$$E_{MA} = E_{MB} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} k (x)^2 \Rightarrow k = 720 \text{ N/m}$$

Con la fuerza de fricción: $E_{MA} - E_{MB} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} kx^2 = -(\mu_k)(mg)(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(5)v_A^2 - \frac{1}{2}(720)(0,1)^2 = -(0,3)(5)(9,81)(0,1)$$

$$\therefore v_A = 0,923 \text{ m/s}$$

65. Un bloque de 0,500 kg de masa se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable, y lo comprime una distancia Δx (figura P8.65). La constante del resorte es 450 N/m. Cuando se suelta, el bloque se desplaza por una superficie horizontal sin fricción hasta el punto *B*, el fondo de una pista circular vertical de radio R = 1,00 m y continúa moviéndose hacia arriba sobre la pista. La velocidad del bloque en el fondo de la pista es v_B = 12 m/s y el bloque experimenta una fuerza friccionante promedio de 7,00 N mientras se desliza ascendiendo por la pista. a) ¿Cuál es el valor de Δx? b) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte superior de la pista? c) ¿El bloque alcanza la parte superior de la pista, o cae antes de llegar a ella?

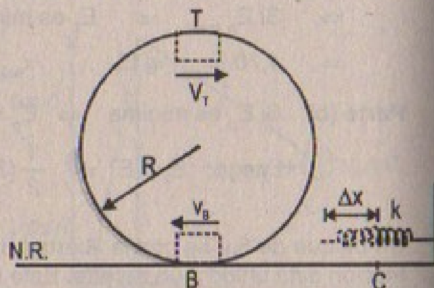


Figura P8.65

Resolución :65

M_{BLOQUE} = 0,5 kg; k = 450 N/m
R = 1 m ; v_B = 12 m/s
f_f = 7,00 N ; v_t = ?

Parte (a) $E_{MB} = E_{MC} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} k (\Delta x + 1)^2$

Luego: $1 + \Delta x = \frac{v_B}{\sqrt{k}} = \frac{12}{\sqrt{450}}$ $\therefore \Delta x = 0,43$ m

Parte (b) $E_{MT} - E_{MB} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_T^2 + mg(2R) - \frac{1}{2} m v_B^2 = -f_f(d) = -7(\pi)$$

$$\Rightarrow v_T^2 = v_B^2 - 4gR - (14)(2)(\pi)$$

$$\therefore v_T = 4,1 \text{ m/s}$$

Parte (c)

Por otro lado por M.C.U. $v_T = \sqrt{g.R} \approx 3,13$

Como v_T (encontrado en B) > 3,13 el bloque alcanza la parte superior de la pista

66. Dos resortes sin masa idénticos, ambos de constante k = 200 N/m, están fijos en los extremos opuestos de una pista plana. Un bloque de 5,00 kg se empuja contra el resorte izquierdo, comprimiéndolo 0,150 m. El bloque (inicialmente en reposo) se suelta después, como se muestra en la figura P8.66a. Toda la pista es sin fricción *excepto* en la sección entre *A* y *B*. Dado que el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pista a lo largo de *AB* es μ_c = 0,080, y dado que la longitud de AB es 0,250 m, a) encuentre la compresión máxima del resorte de la derecha (Fig. P8.66b). b) Calcule dónde se detiene el bloque, cuando se mide a partir de A (Fig. P8.66c).

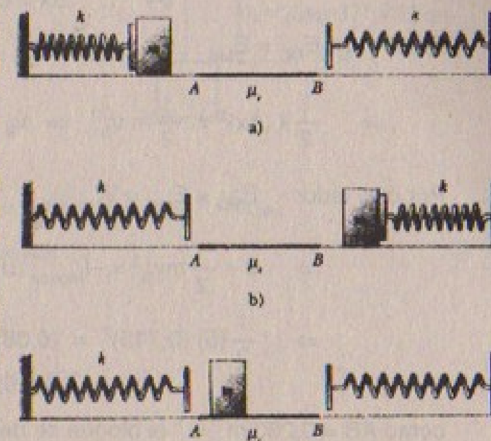
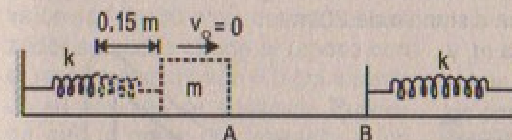
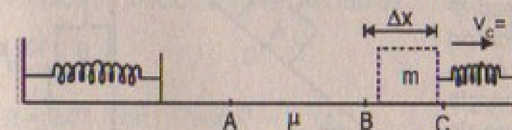


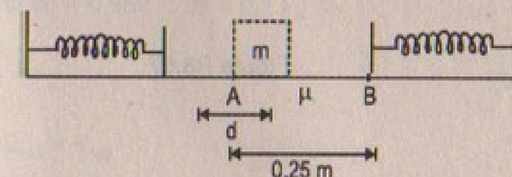
Figura P8.66

Resolución :

m = 5kg ; m = 0,08
g = 9,81 m/s² ; k = 200 N/m







Parte (a) $E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k(\Delta x)^2 - \frac{1}{2} k(0,15)^2 = -f_f(\overline{AB})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(200)[(\Delta x)^2 - (0{,}15)^2] = -(0{,}08)(5)(9{,}81)(0{,}25)$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}15)^2 - \frac{(0{,}08)(5)(9{,}81)(0{,}25)}{100} = (\Delta x)^2$$

$$\therefore \quad \Delta x = 0{,}113 \text{ m}$$

Parte (b) $E_{MC} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m v_B^2 \Rightarrow v_B = \Delta x\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0{,}715 \text{ m/s}$$

Por otro lado: $E_{MA} - E_{MB} = W_{fricción}$

$$\Rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -f_{fricción}\,(d)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5)\,(0{,}715)^2 = (0{,}08)\,(9{,}81)(5)(d)$$

$$\therefore \quad d = 0{,}326 \text{ m}$$

como AB = 0,250 m $\Rightarrow$ el bloque se detiene a 0,076 m

67. Dos bloques, uno de 50 kg y el otro de 100 kg, se conectan entre sí por medio de una cuerda, como se ve en la figura P8.67. La polea no presenta fricción y su masa es despreciable. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque de 50 kg y la pendiente es $\mu_c = 0{,}25$. Determine el cambio en la energía cinética del bloque de 50 kg cuando se mueve de *C* a *D*, una distancia de 20 m.

67A. Dos bloques, uno de masa m_1 y otro de masa m_2, se conectan entre sí por medio de una cuerda, como se ve en la figura P8.67. La polea no presenta fricción y su masa es despreciable. El coeficiente de fricción cinético entre m_1 y la pendiente es μ_c. Determine el cambio en la energía cinética de m_1 cuando se mueve de *C* a *D*, una distancia *d*.

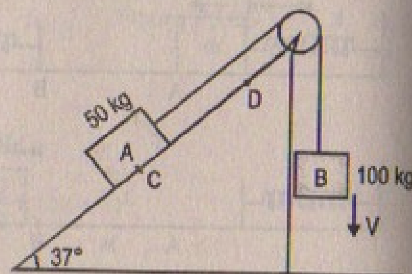


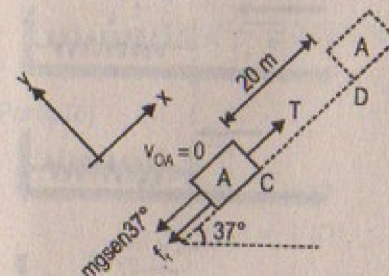
Figura P8.67

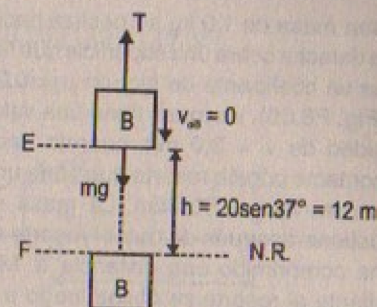
Resolución:

$\mu_f = 0{,}25$; $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

CD = 20 m ; $f_f = m.N = m.mg\cos 37 = (0{,}25)\left(\frac{4}{5}\right)(9{,}81)\,(50)$

$f_f = 98{,}1$ N





$$W_{total}\,A = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{k\,sistema}\,(A) = \Delta E_{k\,F.conserv.} + \Delta E_{k\,F.no\,conserv.} + \Delta E_{k\,ext}$$

$$0 = -\Delta U_g + W_{fricción} = \Delta E_{k\,tensión}$$

Luego: $\Delta U_g - W_{fricción} = \Delta E_k$

$$\Rightarrow \quad m_A \cdot gh - f_f\,(d) = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad (50)(9{,}81)(20\text{sen}37°) - (98{,}1)(20) = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \quad 5\,836 - 1\,962 = \Delta E_k$$

$$\therefore \quad \Delta E_k = 39{,}2 \text{ kJ}$$

68. Un juego de billar romano para niños lanza canicas de 100 g con un lanzador accionado por un resorte (Fig. P8.68). El tablero del juego está inclinado 8° sobre la horizontal. Encuentre la constante de fuerza *k* del resorte que dará a la canica una velocidad de 80 cm/s cuando el lanzador se suelta desde el reposo con el resorte comprimido 5,0 cm a partir de su posición de equilibrio. Suponga que la masa del lanzador y los efectos de fricción son despreciables.

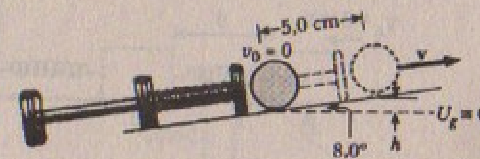
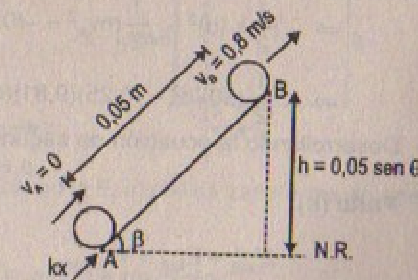


Figura P8.68

Resolución:

$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$; $\text{sen}8° \approx 0{,}141$

$\cos\theta \approx 0{,}989$; $m = 0{,}1$ kg



$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\,(0{,}05)^2 = \frac{1}{2}(0{,}1)(0{,}8)^2 + (0{,}1)(9{,}81)\,(0{,}05)(0{,}141)$$

$$\therefore \quad k = 31{,}1 \text{ N/m}$$

69. Una masa de 1,0 kg se desliza hacia la derecha sobre una superficie que tiene un coeficiente de fricción μ = 0,25 (Fig. P8.69). La masa tiene una velocidad de v_i = 3,0 m/s cuando hace contacto con un resorte que tiene una constante k = 50 N/m. La masa se detiene después de que el resorte se ha comprimido una distancia *d*. Mediante el resorte se obliga luego a la masa a moverse hacia la izquierda más allá de la posición de equilibrio. Por último, la masa se detiene a una distancia *D* a la izquierda del resorte no deformado. Encuentre a) la distancia comprimida *d*, b) la velocidad v en la posición no deformada cuando el sistema se mueve a la izquierda, y c) la distancia *D* donde la masa se detiene.

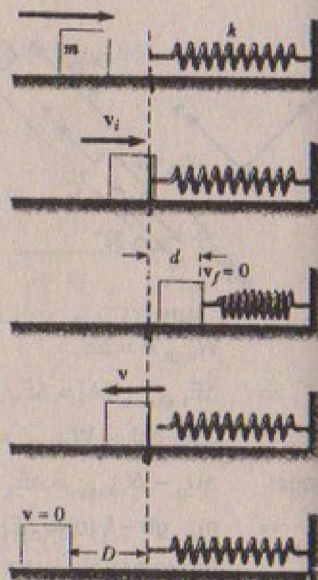
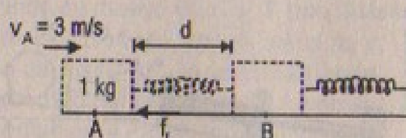


Figura P8.69

Resolución :

k = 50 N/m μ_f = 0.25
m = 1 kg g = 9,81 m/s²

Parte (a)



$f_r = \mu\, mg = (0{,}25)(1)(9{,}81)$

$$E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k\,(d)^2 - \frac{1}{2}mv_A^{\,2} = -(0{,}25)(1)(9{,}81)(d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(50)\,d^2 + (0{,}25)(9{,}81)(d) - \frac{1}{2}(1)(3)^2 = 0$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado resulta que:

$$d = 0{,}38 \text{ m}$$

Parte (b)

$$E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\;(v_b)^2 - \frac{1}{2}k(d)^2 = -f_r\,(d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)(v_B)^2 - \frac{1}{2}(50)(0{,}38)^2 = -(0{,}25)(1)(9{,}81)(0{,}38)$$

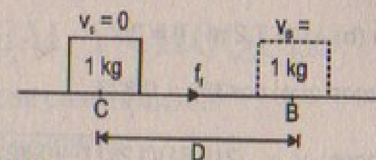
$$\therefore\; v_B = 3{,}01 \text{ m/s}$$

Parte (c)

$$E_{MC} - E_{MB} = W_{fricción}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_B^{\,2} = -f_r\,(D)$$

$$\Rightarrow D = \frac{mv_B^2}{2f_r} \qquad \therefore \quad D = 1{,}85 \text{ m}$$



70. Un objeto de masa *m* cuelga de la parte superior de un carro mediante una cuerda de longitud *L*, como muestra la figura P8.70a. El carro y el objeto se mueven inicialmente hacia la derecha a velocidad constante v_0. El carro se detiene después de chocar y atorarse con el parachoques, como en la figura P8.70b, y el objeto suspendido se balancea y forma un ángulo θ. A) Demuestre que la velocidad del carro es $v_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$. b) Si L = 1,2 m y θ = 35°, encuentre la velocidad inicial del carro. (*Sugerencia*: La fuerza ejercida por la cuerda sobre el objeto no efectúa trabajo).

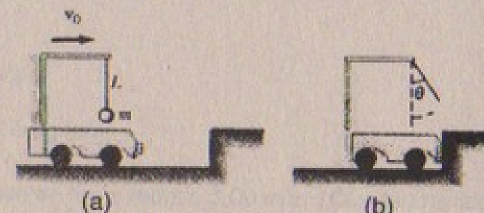


Figura P8.70

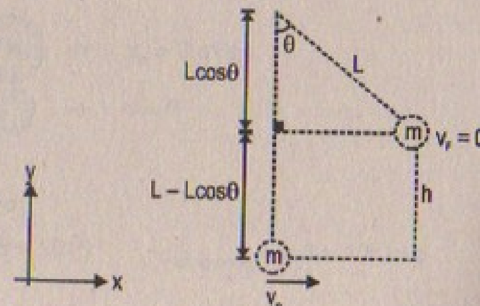
Resolución :

Parte (a)

Observador con respecto a tierra (N.R)

$$E_{M\,inicial\ del\ objeto} = \frac{1}{2}mv_o^{\,2}$$

Cuando choca el objeto pierde E_k, sin embargo la posición final del objeto con respecto al nivel de referencia en tierra es:



⇒ La energía cinética final = 0. Sin embargo la E_k inicial se transforma en energía potencial.

En consecuencia: Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh = mg\,[L - L\cos\theta]$$

$$\therefore \quad v_o = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b) $L = 1{,}2$ m ; $\theta = 35°$

Sabemos que: $\cos 35° = 0{,}823$

Entonces: $v_o = \sqrt{2(9{,}81)(1{,}2)\left[1-(0{,}823)\right]} \qquad \therefore \quad v_o \approx 2{,}04$ m/s

Capítulo 9

MOMENTO LINEAL Y CHOQUES

MOMENTO LINEAL Y SU CONSERVACIÓN

IMPULSO Y MOMENTO

1. Una partícula de 3,0 kg tiene una velocidad de $(3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j})$ m/s. Encuentre sus componentes de momento *x* e *y* y la magnitud de su momento total.

Resolución :

m = 3 kg  $\vec{V} = (3\hat{i} - 4\hat{j})$ m/s

$$\vec{P}_x = 3\vec{V}_x = (3)(3\hat{i}) = 9\hat{i} \text{ kg.m/s}$$

$$\vec{P}_y = 3\vec{V}_y = 3(-4\hat{j}) = -12\hat{j} \text{ kg.m/s}$$

$$\Rightarrow \quad P = \sqrt{(9)^2 + (-12)^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ kg.m/s}$$

2. Una bola de boliche de 7,00 kg se mueve en línea recta a 3,00 m/s. ¿Qué tan rápido debe moverse una bola de ping–pong de 2,45 g en una línea recta de manera que las dos bolas tengan el mismo momento?

Resolución :

Boliche: 

$\rightarrow$ $v_b = 3$ m/s

Ping-pong  $\rightarrow$ $v = ?$

$$\vec{P}_{boliche} = \vec{P}_{ping\ pong}$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times (7) = v \times (2{,}45 \times 10^{-3}) \qquad \therefore \quad v_{ping\ pong} = 8{,}6 \times 10^3 \text{ m/s}$$

3. Un niño bota una gran pelota sobre una acera. El impulso lineal entregado por la acera a la pelota es 2,00 N.s durante 1 / 800 s de contacto. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza promedio ejercida por la acera sobre la pelota?

Resolución :

Sabemos que: $I = \Delta P = F_{prom} \cdot \Delta t$

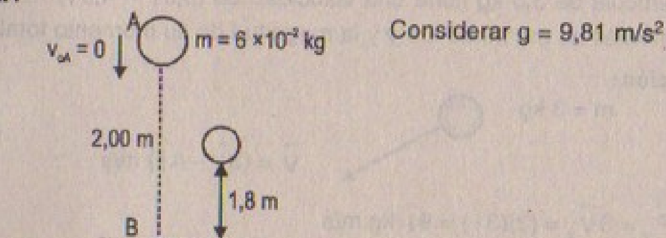
$\Rightarrow \quad F_{promedio} = \frac{I}{\Delta t}$

Por dato: $I = 2{,}00$ N.s $\quad \Delta t = 1/800$ s

Luego: $\quad F_{promedio} = \frac{2{,}00}{\frac{1}{800}}$ N.s $= 1\,600$ N

4. Una gran pelota con una masa de 60 g se deja caer desde una altura de 2,0 m. Rebota hasta una altura de 1,8 m. ¿Cuál es el cambio en su momento lineal durante el choque con el piso?

Resolución :



Considerar $g = 9{,}81$ m/s²

$E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow \quad m.gh = \frac{1}{2} m\, v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81)(2)}$

$\therefore \quad v_B = 6{,}26$ m/s

$P_{inicial} = (6 \times 10^{-2}$ kg$) \times (0) = 0$

$P_{final} = (6 \times 10^{-2})(6{,}26) = 0{,}38$ kg.m/s $\quad \therefore \quad \Delta P = 0{,}38$ kg.m/s

5. La fuerza F_x que actúa sobre una partícula de 2,0 kg varía en el tiempo, como se muestra en la figura P9.5. Encuentre a) el impulso de la fuerza, b) la velocidad final de la partícula si inicialmente está en reposo, c) su velocidad final si al principio se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de −2,0 m/s, y d) la fuerza promedio ejercida sobre la partícula en el espacio de tiempo $t_i = 0$ a $t_f = 5{,}0$ s.

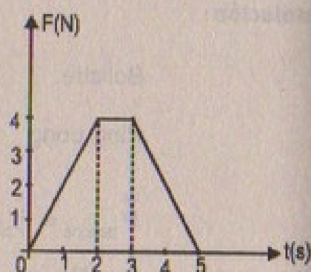


Figura P9.5

Resolución :

Parte (a)

$$\text{Impulso} = \text{Área de la curva} = \int_0^5 F_x . dt$$

$$\Rightarrow \quad \text{Impulso} = \left(\frac{5+1}{2}\right)(4) = 12 \text{ kg.m/s}$$

Parte (b)

$I = \Delta P = P_{final} - P_{inicial} \quad \Rightarrow \quad 12 = 2\, v_{final}$

$\therefore \quad v_{final} = 6$ m/s

Parte (c)

$v_f = ? \qquad v_i = -2{,}0$ m/s

$\Rightarrow \quad I = P_{final} - P_{inicial} \quad \Rightarrow \quad 12 = 2\, v_f - 2(-2)$

$\therefore \quad v_{final} = 4$ m/s

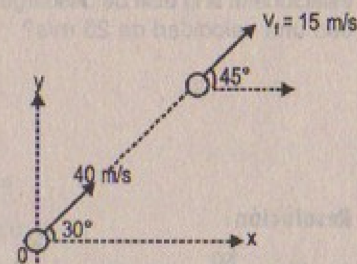
Parte (d) $F_{prom} \times \Delta t = I$

$\Rightarrow \quad F_{promedio} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ N

6. En un juego de softbol de lanzamientos lentos, una pelota de softbol de 0,200 kg cruza el plato a una velocidad de 15,0 m/s y a un ángulo de 45,0° debajo de la horizontal. La pelota fue golpeada a 40,0 m/s, 30,0° sobre la horizontal. a) Determine el impulso aplicado a la pelota. b) Si la fuerza sobre la pelota aumenta linealmente durante 4,00 ms, se mantiene constante durante 20,0 ms y luego disminuye hasta cero linealmente en otros 4,00 ms, encuentre la fuerza máxima sobre la pelota.

Resolución :

$m_{pelota} = 0{,}2$ kg



Parte (a) $\quad \vec{I} = \Delta\vec{P}$

$= (15)(0{,}2) - (4{,}0)(0{,}2)$

$= -5$ kg.m/s

Parte (b) $\quad F_{promedio} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{5}{20-4} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$ N

7. Una curva fuerza–tiempo estimada para una pelota de beisbol golpeada por un bate se muestra en la figura P9.7. A partir de esta curva, encuentre, a) el impulso dado a la pelota, b) la fuerza ejercida sobre la pelota, y c) la fuerza máxima ejercida sobre la misma.

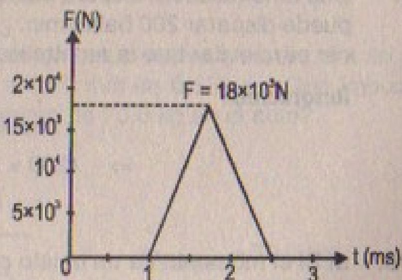


Figura P9.7

Resolución :

Parte (a)

$$\text{Impulso} = \int_1^{2{,}5} F.dt = \text{Área de la curva}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Impulso} = \text{Área del triángulo} = \frac{(1{,}5)(18\times10^3)}{2}\times10^{-3}$$

$\therefore$ Impulso = 13,5 kg.m/s

Parte (b) Sabemos que: $I = \vec{F}\,\Delta t$

$$\Rightarrow \quad 13{,}5\ \text{kg.}\frac{m}{s} = \vec{F}\ (2{,}5-1)\times10^{-3}$$

$$\therefore \quad F = \frac{(13{,}5)\times10^3}{1{,}5} = 9{,}00\times10^3\ \text{N}$$

Parte (c)
La fuerza máxima ejercida por la misma, es el máximo punto alcanzado en la gráfica que es de 18×10^3 N

$\therefore \quad F_{máx} = 18\ 000$ N

8. Una manguera de jardín se mantiene de la manera indicada en la figura P9.8. ¿Qué fuerza es necesaria para mantener la boquilla estacionaria si la tasa de descarga es 0,60 kg/s con una velocidad de 25 m/s?



Figura P9.8

Resolución :

$$F = (0{,}6)\ \frac{kg}{s}\times 25\ m/s \qquad \therefore \quad F_{necesaria} = 15\ \text{N}$$

9. Una ametralladora dispara balas de 35,0 g a una velocidad de 750,0 m/s. Si el arma puede disparar 200 balas/min, ¿cuál es la fuerza promedio que el tirador debe ejercer para evitar que la ametralladora se mueva?

Resolución :

$$\text{Impulso} = \Delta P = F_{prom}\,.\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad (200\times35\times10^{-3})(750) = F_{promedio}$$

$$\therefore \quad F_{promedio} = 5\ 250\ \text{N}$$

10. a) Si el momento de un objeto se duplica en magnitud, ¿qué ocurre con su energía cinética? b) Si la energía cinética de un objeto se triplica, ¿qué sucede con su momento?

Resolución :

Parte (a): Sea: inicialmente $P = m.v \Rightarrow E_{K\,inicial} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P.v$

Si "P" se duplica $\Rightarrow \quad E_{K\,inicial} = \frac{1}{2}(2P)\ v \qquad \therefore \quad E_{K\,final} = P.v$

Luego: $\quad E_{K\,final} = 2\,E_{K\,inicial}$

En consecuencia la energía cinética se duplica.

Parte (b): Inicialmente

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P.v \Rightarrow P = \frac{2E_K}{v}$$

Si "E_K" se triplica $\Rightarrow \quad E_{K\,final} = 3E_{K\,inicial} = 3\,\frac{1}{2}(P.v)$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{2}{3}\ \frac{E_K}{v} = \frac{1}{3}(P_{inicial})$$

$\therefore$ El momento final disminuye en 2/3

11. Un balón de futbol de 0,50 kg se lanza con una velocidad de 15 m/s. Un receptor estacionario atrapa la pelota y la detiene en 0,020 s. a) ¿Cuál es el impulso dado al balón? b) ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre el receptor?

Resolución :

v = 15 m/s

m = 0,5 kg

t = 0,023

Parte (a) $\quad \text{Impulso} = \Delta P = P_{final} - P_{inicial}$

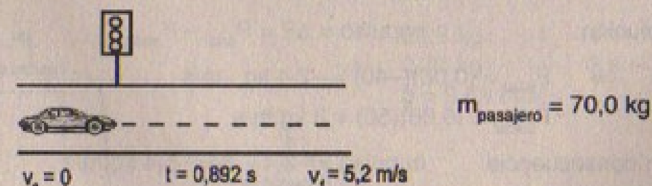
$$\Rightarrow \quad I = 0-(0{,}5)(15) = -7{,}5\,\hat{i}\ \text{kg.m/s}$$

Parte (b) $\quad \vec{F}_{promedio} = \dfrac{\text{Impulso}}{\Delta t} = -\dfrac{7{,}5}{0{,}02}$

$$\therefore \quad |\vec{F}_{promedio}| = 375\ \text{N}$$

12. Un auto se detiene frente a un semáforo. Cuando la luz vuelve a verde, el auto se acelera, aumentando su velocidad de cero a 5,20 m/s en 0,832 s. ¿Qué impulso lineal y fuerza promedio experimenta un pasajero de 70,0 kg en el auto?

Resolución :



$m_{pasajero} = 70{,}0$ kg

Parte (a) $\quad \text{Impulso} = \Delta P = P_{final} - P_{inicial}$

$$\Rightarrow \quad \text{Impulso} = 70\ (5{,}2) - 70(0) = 364\ \text{kg.m/s}$$

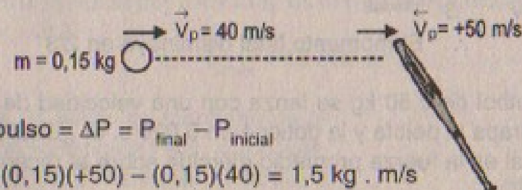
Luego la fuerza promedio será

$$F_{promedio} = \frac{1}{\Delta t} \cdot I = \left(\frac{1}{0,832\ s}\right)(364)$$

$$\therefore\ F_{promedio} = 437,5\ N$$

13. Una pelota de beisbol de 0,15 kg se lanza con una velocidad de 40 m/s. Luego es bateada directamente hacia el lanzador con una velocidad de 50 m/s. a) ¿Cuál es el impulso que recibe la pelota? b) Encuentre la fuerza promedio ejercida por el bate sobre la pelota si los dos están en contacto durante $2,0 \times 10^{-3}$ s. Compare este valor con el peso de la pelota y determine si es válida o no la aproximación del impulso en esta situación.

Resolución :



Parte (a) Impulso $= \Delta P = P_{final} - P_{inicial}$

$\Rightarrow\ I = (0,15)(+50) - (0,15)(40) = 1,5$ kg . m/s

Parte (b) $I = F_{promedio} \cdot \Delta t$

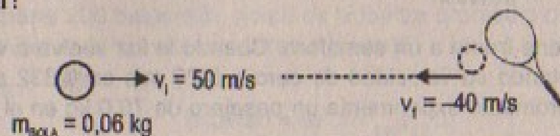
$$\Rightarrow\ F_{promedio} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{1,5}{2,0 \times 10^{-3} s} = 750\ N$$

Peso del balón: (0,15)(9,8) = 1,47 N

$\therefore$ F >> peso luego, es válido la aproximación del impulso

14. Un jugador de tenis recibe un tiro con la bola (0,060 kg) que viaja horizontalmente a 50 m/s y lo regresa con la bola moviéndose horizontalmente a 40 m/s con la dirección opuesta. ¿Cuál es el impulso dado a la bola por la raqueta?

Resolución :



Solución: Impulso $= \Delta P = P_{final} - P_{inicial}$

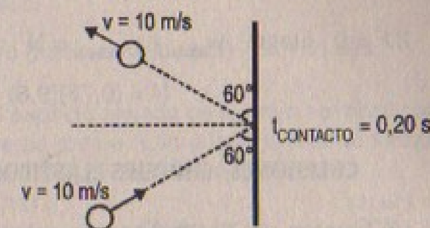
$\Rightarrow\ P_{final} = (0,06)(-40) = -2,4$ kg . m/s

$P_{inicial} = (0,06)(50) = 3$ kg.m/s

En consecuencia: Impulso $= -2,4 - 3 = -5,4$ kg.m/s

15. Una bola de acero de 3,0 kg golpea una pared con una velocidad de 10 m/s a un ángulo de 60° con la superficie. Rebota con la misma velocidad y ángulo (Fig. P9.15). Si la bola está en contacto con la pared durante 0,20 s, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la bola?

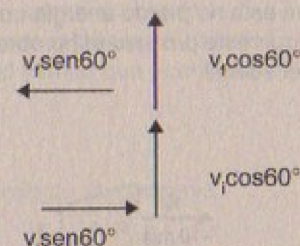
15A. Una bola de acero de masa *m* golpea una pared con una velocidad de *v* a un ángulo θ con la superficie. Rebota con la misma velocidad y ángulo (Fig. P9.15). Si la bola está en contacto con la pared durante un tiempo *t*, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la bola?



Masa del acero = 3 kg

Figura P9.15

Resolución :



Sabemos que $P_{fy} - P_{iy} = (v_f \cos 60° - v_i \cos 60°)(3\ kg) = 0$

Así también: $P_{fx} - P_{ix} = \vec{F} \cdot \Delta t$

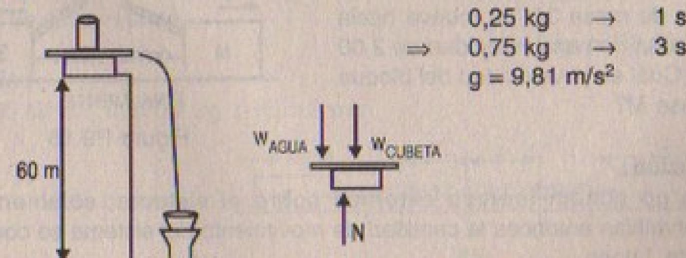
$\Rightarrow\ (-v_f \operatorname{sen}60° - v_i \operatorname{sen}60°)(3) = F_{prom}\,(0,20)$

$$\therefore\ F_{promedio} = \frac{\left(-10\frac{\sqrt{3}}{2} - 10\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3)}{0,20} = 259,8 = 260\ N$$

(hacia la izquierda)

16. Desde una altura de 60 m y a una tasa de 0,25 litros/s cae agua sin salpicar dentro de una cubeta de 0,75 kg que está sobre una balanza. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿cuánto registra la balanza después de 3,0 s?

Resolución :



0,25 kg → 1 s

$\Rightarrow$ 0,75 kg → 3 s

g = 9,81 m/s²

A una altura de 60 m cae 0,25 litros/s = 0,25 kg/s, entonces como cae sin salpicar sobre la cubeta, que se conserva la cantidad de movimiento; en consecuencia:

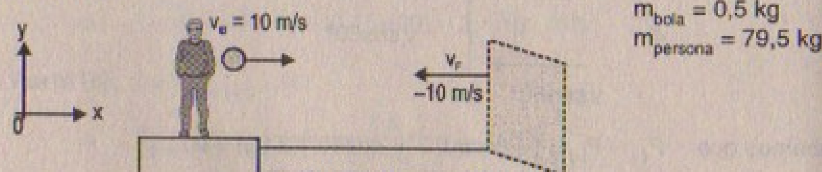
$\Sigma F = 0$ luego: $w_{agua} + w_{cubeta} = N$

$\therefore \quad N = (0,75)(9,8) + (0,75)(9,8) = 14,7$ N

COLISIONES: CHOQUES ELÁSTICOS E INELÁSTICOS EN UNA DIMENSIÓN

17. Un hombre de 79,5 kg parado sobre un estanque congelado cercano a un muro sostiene una bola de 0,500 kg. Lanza la bola al muro con una velocidad 10,0 m/s (en relación con el suelo) y atrapa la bola después de que ésta rebota en el muro. a) ¿A qué velocidad se mueve después de atrapar la bola? (Ignore el movimiento de proyectil de la bola y suponga que ésta no pierde energía en su choque con el muro). b) ¿Cuántas veces tiene que seguir este proceso el hombre antes de que su velocidad llegue a 1,00 m/s respecto del suelo?

Resolución:



$m_{bola} = 0,5$ kg
$m_{persona} = 79,5$ kg

Parte (a) $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$

$-(0,5)(10) = (80)\,v_f \quad \therefore \quad \vec{V}_f = -0,0625\ \hat{i}$ m/s

Parte (b) $-n\,(0,5)(10) = -80 \quad \Rightarrow \quad n = 16$ veces

18. Dos bloques de masa *M* y 3*M* se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se une a uno de ellos, y los bloques son empujados juntos, con el resorte entre ellos (Fig. P9.18). Una cuerda que los mantiene unidos se quema y después de eso el bloque de masa 3*M* se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2,00 m/s. ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa *M*?

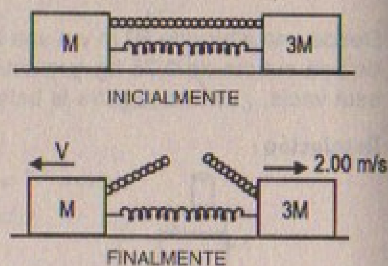


Figura P9.18

Resolución:

Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema, solamente internas y conservativas entonces la cantidad de movimiento del sistema se conserva en todo instante. Luego

$P_{inicial} = 0 \ \wedge \ P_{final} = M(v) + 3M(2)$

$\Rightarrow \quad P_{inicial} = P_{final} = 0 = M(v) + 3M(2)$

$\therefore \quad$ Velocidad de M = 6 m/s (hacia la izquierda) ó $-6\hat{i}$ m/s

19. Una astronauta de 60,0 kg camina en el espacio alejada de la nave espacial cuando la línea que la mantiene unida a la nave se rompe. Ella puede lanzar su tanque de oxígeno de 10,0 kg de manera que éste se aleje de la nave espacial con una velocidad de 12,0 m/s para impulsarse a sí misma de regreso a la nave (Fig. P9.19). Suponiendo que inicia su movimiento desde el reposo (respecto de la nave), determine la distancia máxima a la cual puede estar del vehículo espacial cuando la línea se rompe e incluso regresar en menos de 60,0 s (es decir, el tiempo que puede estar sin respirar).

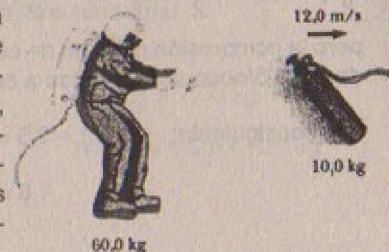


Figura P9.19

Resolución:

La cantidad de movimiento se conserva

$\Rightarrow \quad P_{inicial} = P_{final}$

$\Rightarrow \quad 60(0) + 10(12) = (60 + 10)\ v_{regreso}$

$\Rightarrow \quad \therefore \quad v_{regreso} = 2$ m/s

Luego $\quad D_{máx} = (2)(60) = 120$ m

20. Carros de aire idénticos (m = 200 g) están equipados con resortes idénticos (k = 3 000 N/m). Los carros, que se mueven uno hacia el otro con velocidades de 3,00 m/s sobre una pista de aire horizontal, chocan y comprimen los resortes (Fig. P9.20). Encuentre la compresión máxima de cada resorte.

20A. Carros de aire idénticos, cada uno de masa *m* están equipados con resortes idénticos cada uno con una constante de fuerza *k*. Los carros, que se mueven uno hacia el otro con velocidades v sobre una pista de aire horizontal, chocan y comprimen los resortes (Fig. P9.20). Encuentre la compresión máxima de cada resorte.

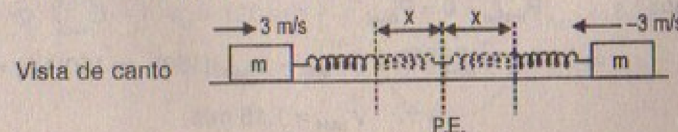


Figura P9.20

Resolución:

k = 3 000 N/m ; m = 0,2 kg ; |v| = 3 m/s

Vista de canto



Como no actúan fuerzas externas, entonces se conserva la cantidad de movimiento en la colisión elástica y por lo tanto también la energía del sistema. Luego:

$$P_{inicial} = P_{final} \Rightarrow (0,2)(3) - 0,2(3) = 0,2\,v_1 + 0,2\,v_2$$

$$\therefore\; v_1 = -v_2$$

Por otro lado:

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}(0,2)(3)^2 + \frac{1}{2}(0,2)(-3)^2 = \frac{1}{2}(0,2)v_1^2 + \frac{1}{2}(0,2)(-v_1)^2 + \frac{1}{2}k(x)^2 + \frac{1}{2}k(x)^2$$

pero la compresión máxima de cada resorte va a ser cuando las velocidades finales de cada bloque sean iguales a cero.

Por consiguiente: $0,9 + 0,9 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(3\,000)(x)^2 + \frac{1}{2}(3\,000)x^2$

$$1,8 = (1,500)x^2$$

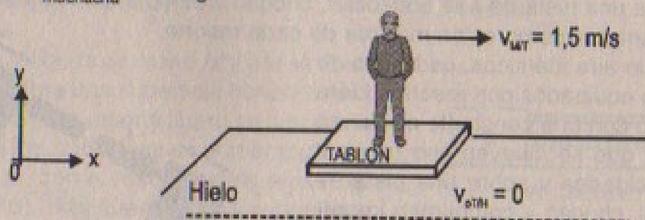
$$\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1,8}{1\,500}\times\frac{1}{2}} \approx 0,0245\ \text{m}$$

21. Una muchacha de 45,0 kg está parada sobre un tablón que tiene una masa de 150 kg. El tablón, originalmente en reposo, puede deslizarse libremente sobre un lago congelado, el cual es una superficie de soporte plana y sin fricción. La muchacha empieza a caminar a lo largo del tablón a una velocidad constante de 1,5 m/s en relación con el tablón. a) ¿Cuál es su velocidad en relación con la superficie del hielo? b) ¿Cuál es la velocidad del tablón respecto de la superficie de hielo?

Resolución:

$m_{tablón} = 150$ kg

$m_{muchacha} = 45$ kg



Parte (a) Sabemos que: $\vec{V}_{T/H} + \vec{V}_{M/T} = \vec{V}_{M/H}$

$$\therefore\; \vec{V}_{M/H} = \vec{V}_{T/H} + \vec{V}_{M/T}$$

Luego: $P_{inicial} = 0 = P_{final}$

$$\Rightarrow\; 0 = \vec{V}_{M/H}(45) + (\vec{V}_{M/H} - \vec{V}_{M/T})(150) \Rightarrow 150(1,5) = 195\,\vec{V}_{M/H}$$

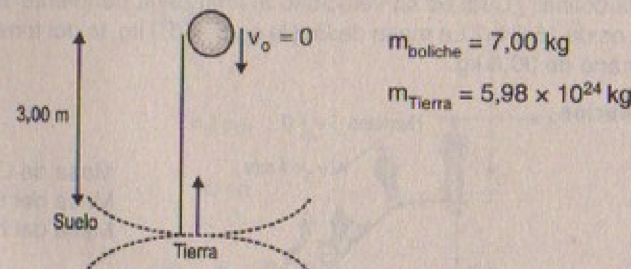
$$\therefore\; \vec{V}_{M/H} = 1,15\ \text{m/s}$$

Parte (b) $\vec{V}_{T/H} = \vec{V}_{M/H} - \vec{V}_{M/T}$

$$\Rightarrow\; \vec{V}_{T/H} = 1,15 - 1,5 = -0,35\ \text{m/s}$$

22. Una bola de boliche de 7,00 kg inicialmente en reposo se deja caer desde una altura de 3,00 m. a) ¿Cuál es la velocidad de la Tierra aproximándose a la bola justo antes de que ésta golpee el suelo? Utilice $5,98 \times 10^{24}$ kg como la masa de la Tierra. b) Con su respuesta del inciso a) justifique, no se toma en cuenta el movimiento de la Tierra cuando se trabaja con los movimientos de objetos terrestres.

Resolución:



$m_{boliche} = 7,00$ kg

$m_{Tierra} = 5,98 \times 10^{24}$ kg

Parte (a)

Fuerza de atracción de los cuerpos, es decir la fuerza gravitacional es una fuerza interna dentro del sistema, por consiguiente se conserva la cantidad de movimiento.

Luego: $P_{inicial} = P_{final}$

Previamente: $v_{f\,boliche} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(3)} \approx 7,67$ m/s

(por conservación de energía)

Luego: $0 = 7,67(7) - v_T(5,98 \times 10^{24})$

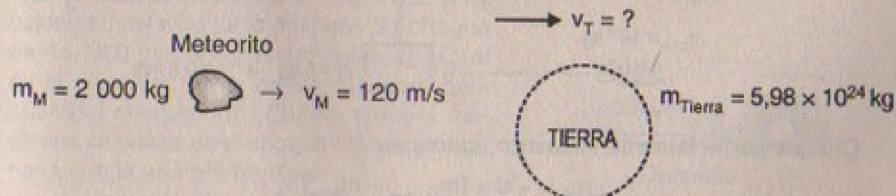
$$\therefore\; v_{Tierra} = 8,98 \times 10^{-24}\ \text{m/s}$$

Parte (b)

Efectivamente, ya que la velocidad de la tierra al ser una cantidad infinitamente pequeña, prácticamente para minimizar los cálculos se considera despreciable.

23. Un meteorito de 2 000 kg tiene una velocidad de 120 m/s justo antes de chocar de frente con la Tierra. Determine la velocidad de retroceso de la Tierra ($5,98 \times 10^{24}$ kg de masa).

Resolución:



Como es una colisión perfectamente inelástica se cumple que

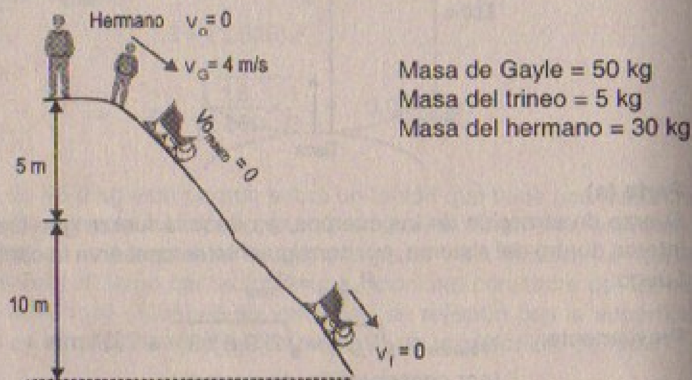
$$P_{inicial} = P_{final}$$

$\Rightarrow$ $(120)(2\ 000) + 0 = (2\ 000 + 5{,}98 \times 10^{24})v_f$

$\therefore$ $v_f \approx v_T = 25 \times 10^{-18}$ m/s

24. Gayle corre a una velocidad de 4,0 m/s y se lanza sobre un trineo que está inicialmente en reposo sobre la cima de una colina cubierta de nieve sin fricción. Después de que ella y el trineo han descendido una distancia vertical de 5,0 m, su hermano, que está inicialmente en reposo, se monta detrás de ella y juntos continúan bajando por la colina. ¿Cuál es su velocidad al final de la pendiente si el descenso vertical total es de 15,0 m? La masa de Gayle es de 50,0 kg, la del trineo de 5,0 kg y la de su hermano de 30,0 kg.

Resolución :



Masa de Gayle = 50 kg
Masa del trineo = 5 kg
Masa del hermano = 30 kg

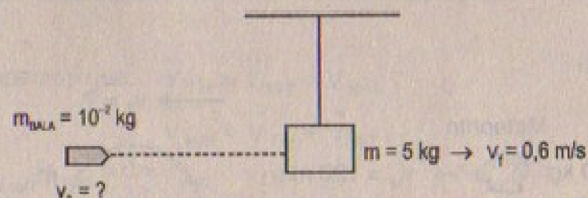
La cantidad de movimiento se conserva entonces:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$\Rightarrow$ $(4)(50) + 0 + 0 = (85)\ v_{fs}$ $\Rightarrow$ $v_{F\ total} = \dfrac{200}{85} = 2{,}35$ m/s

25. Una bala de 10,0 g es detenida por un bloque de madera ($m = 5{,}00$ kg). La velocidad de la combinación bala más madera inmediatamente después del choque es 0,600 m/s. ¿Cuál fue la velocidad original de la bala?

Resolución :



Choque perfectamente inelástico, entonces:

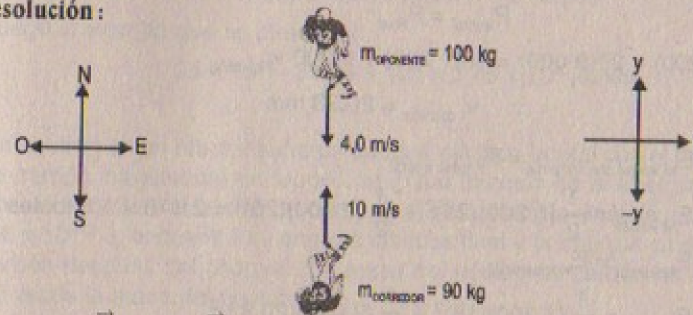
$$m_B\ v_i + 0 = (m_{bloque} + m_{bala})\ v_f$$

$\Rightarrow$ $10^{-2} \cdot v_{i\ bala} = (10^{-2} + 5)(0{,}6)$

$\therefore$ $v_{i\ bala} = 300{,}6$ m/s

26. Un corredor rápido de fútbol americano de 90 kg que se desplaza hacia el norte con una velocidad de 10 m/s es derribado por un oponente de 120 kg que corre hacia el sur con una velocidad de 4,0 m/s. Si el choque es perfectamente inelástico y de frente, a) calcule la velocidad y dirección de los jugadores justo después del derribe y b) determine la energía perdida como consecuencia del choque. Explique dónde queda la energía faltante.

Resolución :



Parte (a) $\vec{P}_{inicial\ y} = \vec{P}_{final\ y}$

$\Rightarrow$ $10\ \hat{j}\ (90) - 40\ \hat{j}\ (120) = 210\vec{V}_f$

$\Rightarrow$ $v_f = +2{,}00\ \hat{j}$ m/s (se dirige hacia el norte)

Parte (b) $E_{inicial\ cinética} = \frac{1}{2}(90)(10)^2 + \frac{1}{2}(120)(4)^2$

$\Rightarrow$ $E_{inicial} = 5\ 460$ J

$E_{final} = \frac{1}{2}(210)(2)^2 = 420$ J

Por lo tanto

La energía que se "pierde" durante la colisión, que es de 5 040 J, se transforma en energía térmica al interactuar los cuerpos quedando adherida en ellos.

27. Un auto de 1 200 kg que viaja inicialmente con una velocidad de 25,0 m/s con rumbo al este choca con la parte trasera de una camioneta de 9 000 kg que se mueve en la misma dirección a 20,0 m/s (Fig. P9.27). La velocidad del auto justo después del choque es de 18,0 m/s en dirección este. a) ¿Cuál es la velocidad de la camioneta justo después del choque? b) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en el choque? Explique qué pasa con la energía perdida.

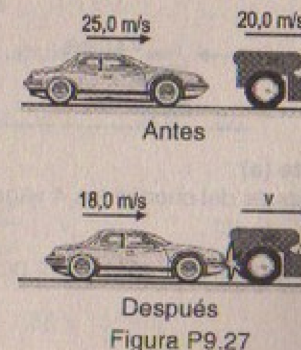


Figura P9.27

Resolución :



Inicialmente: $\vec{25}$ m/s $\quad \vec{20,0}$ m/s

Finalmente: $\vec{18}$ m/s $\quad \vec{V}$

Parte (a) $\quad P_{inicial} = P_{final}$

$\Rightarrow \quad 25(1\,200) + 20(9\,000) = 18(1\,200) + 9\,000\, v_{f\,camión}$

$\therefore \quad v_{f\,camión} = 20,93$ m/s

Parte (b) $E_{M\,inicial\,del\,sistema} = E_{K\,total\,inicial}$

$\Rightarrow \quad E_{M\,inicial} = \frac{1}{2}(1\,200)(25)^2 + \frac{1}{2}(9\,000)(20)^2 = 2\,175 \times 10^3$ joules

$E_{M\,inicial} = E_{K\,total\,final}$

$\Rightarrow \quad E_{M\,final} = \frac{1}{2}(1\,200)(18)^2 + \frac{1}{2}(9\,000)(20,93)^2$

$\therefore \quad E_{M\,final} = 2165,7 \times 10^3$ joules

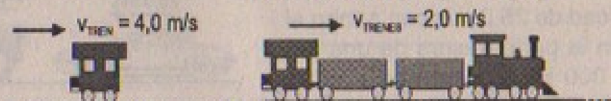
Luego la energía perdida será:

$(2\,175 - 2\,165,7) \times 10^3 = 9,3 \times 10^3$ joules

esta energía que se "pierde" se transforma en térmica

28. Un vagón de ferrocarril de $2,5 \times 10^4$ kg de masa que se mueve con una velocidad de 4,0 m/s choca y se conecta con otros tres vagones de ferrocarril acoplados, cada uno de la misma masa que el primero y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 2,0 m/s. a) ¿Cuál es la velocidad de los cuatro vagones después del choque? b) ¿Cuánta energía se pierde en el choque?

Resolución :28



Parte (a)

Después del choque los 4 vagones se adhieren, entonces:

$P_{inicial} = P_{final}$

$\Rightarrow \quad 4,0 \times (2,5 \times 10^4\text{ kg}) + 2,0(3)(2,5 \times 10^4\text{ kg}) = 4\, v_{final}\,(2,5 \times 10^4\text{ kg})$

$\therefore \quad v_{final\,de\,trenes} = 2,5$ m/s

Parte (b)

Energía perdida será:

Energía inicial: $\frac{1}{2}(2,5 \times 10^4)(4)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)(2,5 \times 10^4)(2)^2$

$\therefore \quad$ Energía inicial $= 35 \times 10^4$ joules

Energía final: $4\left(\frac{1}{2}\right)(2,5 \times 10^4)(2,5)^2$

$\therefore \quad$ Energía final $= 31,25 \times 10^4$ joules

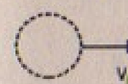
Luego la energía que se pierde es:

$35 \times 10^4 - 31,25 \times 10^4 = 3,75 \times 10^4$ joules

29. Un neutrón en un reactor sufre un choque elástico frontal con el núcleo de un átomo de carbón inicialmente en reposo. a) ¿Qué fracción de la energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de carbón? b) Si la energía cinética inicial del neutrón es $1,6 \times 10^{-13}$ J, encuentre su energía cinética final y la energía cinética del núcleo de carbón después del choque. (La masa del núcleo de carbón es aproximadamente 12 veces la masa del neutrón).

Resolución :

NEUTRON



CARBON



Masa del núcleo del carbón = 12 masa del neutrón

Masa del neutrón $= 1,675 \times 10^{-27}$ kg

Parte (a) Sea la masa del neutrón = m

$\Rightarrow$ La masa del núcleo del carbón = 12 m

Por otro lado: $E_{K\,inicial\,neutrón} = 1,6 \times 10^{-13}$ J

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_i^2 = 1,6 \times 10^{-13}$ J

$\therefore \quad v_i^2 = \frac{3,2}{m} \times 10^{-13}\text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \ldots (1)$

Así también como es un choque elástico se cumple que:

$$v_{1\,final} = v_{final\,del\,núcleo\,neutrón} = \left(\frac{M_{neutrón} - M_{carbón}}{M_{núcleo} + M_{neutrón}}\right) \cdot v_i \quad \ldots (2)$$

$$v_{2\,final} = v_{final\,del\,núcleo\,del\,carbón} = \left(\frac{2 \cdot M_{neutrón}}{M_{núcleo} + M_{neutrón}}\right) \cdot v_i \quad \ldots (3)$$

Reemplazando en (1): $v_i = \sqrt{\frac{3,2}{1,675} \times 10^{14}} = 1,38 \times 10^7$ m/s

Reemplazando en (2): $\vec{V}_{1\,final} = (1{,}38 \times 10^7)$

$\therefore \quad \vec{V}_{1\,final} = \vec{V}_{neutrón} = -1{,}68 \times 10^7 \hat{i}$ m/s

Reemplazando en (3):

$$v_{2\,final} = v_{final\ del\ núcleo\ del\ carbón} = \left(\frac{2.M}{M+12M}\right) 138 \times 10^7$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{2\,final} = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$$

En consecuencia:

$$E_{K\,final\ del\ neutrón} = \frac{1}{2}(1{,}675 \times 10^{-27}\text{ kg})(-1{,}168 \times 10^7)^2$$

$$\therefore \quad E_{K\,final\ del\ neutrón} = 1{,}143 \times 10^{-13} \text{ joules}$$

$$E_{K\,final\ del\ carbón} = \frac{1}{2}(12)(1{,}675 \times 10^{-27}\text{ kg})(2 \times 10^6)^2$$

$$\therefore \quad E_{K\,final\ del\ carbón} = 40{,}2 \times 10^{-15} \text{ joules}$$

30. Una bola de masa *m* está suspendida por una cuerda de longitud *L* arriba de un bloque que descansa sobre uno de sus extremos, como se muestra en la figura P9.30. La bola se desplaza hacia atrás un ángulo θ y se suelta, en el ensayo A rebota elásticamente en el bloque. En el ensayo B una cinta adhesiva por los dos lados hace que la bola se fije al bloque en un choque totalmente inelástico. ¿En cuál caso es más probable que la bola derribe el bloque? Explique.

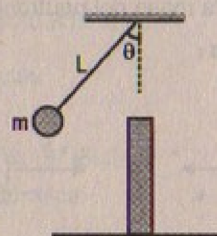


Figura P9.30

Resolución :

Ensayo "A":

Por conservación de energía:

$$E_{MA} = E_{MB} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

Por otro lado por haber un choque elástico:

Entonces se conserva la energía cinética, luego:

$$E_{K\,i} = E_{K\,final} = mgh = mgL\,(1 - \cos\theta) = W_{FC} \quad \ldots (1)$$

Ensayo "B":

Se produce un choque perfectamente inelástico, entonces se cumple:

$$\sqrt{2gh}\ .\ m = (M_{bloque} + m)\, v_{final}$$

$$\Rightarrow \quad v_{final} = \frac{m}{(M+m)}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

Luego la energía final será:

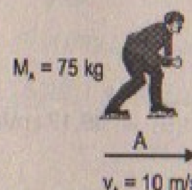
$$mgL\,(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}(M+m)\left[\frac{m^2}{(M+m)^2}(2gL)(1-\cos\theta)\right]$$

$$\therefore \quad E_{K\,final} = mgL\,(1-\cos\theta) - \frac{m^2}{(M+m)}\, g\, L(1-\cos\theta)$$

Como la energía final en el ensayo "B" es menor que la energía final en el ensayo "A", puesto que hay pérdida de energía, entonces en "A" hay más probabilidad de que el bloque se rompa debido a que va a realizar mayor trabajo, entonces por consiguiente ejercerá mayor fuerza.

31. Un patinador de hielo de 75 kg que se mueve a 10 m/s choca contra un patinador estacionario de igual masa. Después del choque, los dos patinadores se mueven como uno solo a 5,0 m/s. La Fuerza promedio que un patinador humano puede experimentar sin romperse un hueso es de 4 500 N. Si el tiempo de impacto de 0,10 s, ¿se rompe algún hueso?

Resolución :





Según el problema se produce un choque perfectamente inelástico:

$$P_{final} - P_{inicial} = F\ .\ \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad 150(5) - (75)(10) = F_{prom}\,(0{,}10)$$

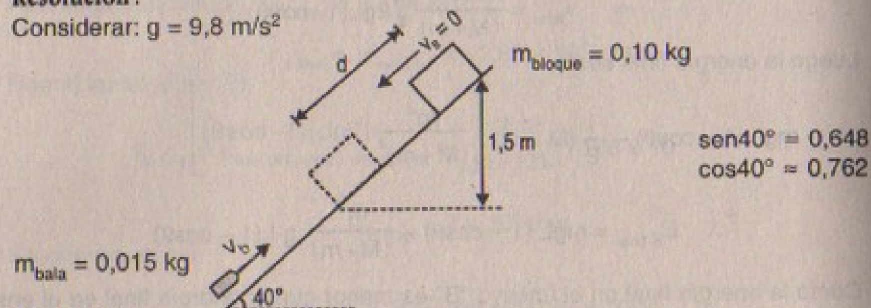
$$\therefore \quad F_{prom} = 0$$

Debido a que la fuerza promedio de impacto es cero y es menor que 4 500 N, en consecuencia no se romperá ningún hueso.

32. Un bloque 0,10 kg se suelta desde el reposo desde la parte superior de una pendiente sin fricción de 40,0°. Cuando ha descendido una distancia vertical de 1,5 m, una bala de 0,015 kg se dispara contra el bloque a lo largo de una trayectoria paralela a la pendiente y momentáneamente detiene el bloque. a) Encuentre la velocidad de la bala justo antes de hacer impacto. b) ¿Qué velocidad de la bala es necesaria para llevar el bloque hacia arriba de la pendiente hasta su posición inicial?

Resolución :

Considerar: $g = 9,8\ m/s^2$



sen40° = 0,648
cos40° ≈ 0,762

Parte (a)

$$\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$$

$$\Rightarrow\ m_{bala} \cdot \vec{V}_{bala} - M_{bloque} \cdot \vec{V}_{bloque} = 0$$

$$\Rightarrow\ \vec{V}_{bala} = \frac{M_{bloque}}{m_{bala}} \cdot \vec{V}_{bloque}$$

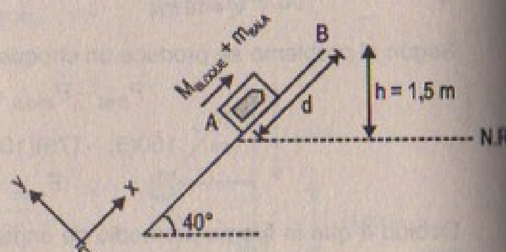
Por otro lado:

Se conserva la energía en el bloque, entonces:

$$\frac{1}{2} m\, v^2_{bloque} = mgh \Rightarrow \vec{V}_{bloque} = \sqrt{2(9,81)(1,5)}\ \hat{i}$$

Reemplazando: $\vec{V}_{bala} = \left(\frac{0,10}{0,015}\right)\sqrt{2(9,81)(1,5)} = 36,17\,\hat{i}$ m/s

Parte (b)



Por conservación de energía

Sabemos que: $E_{KA} = E_{KB} + E_{PB}$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}(M + m)\, v_f^2 = (m + M)\, gh$$

$$\therefore\ v_{final} = \sqrt{2(g)h} = \sqrt{2(9,81)(1,5)} = 5,42\ m/s$$

Luego:

Por colisión perfectamente inelástica se cumple que:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

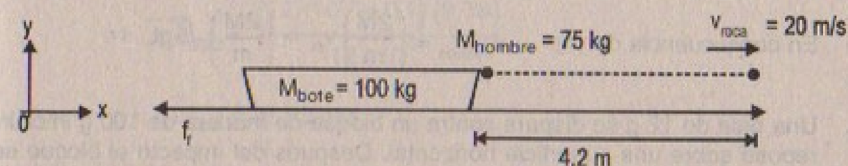
$$\Rightarrow\ M_{bala}\, \vec{V}_{bala} - M_{bloque}\, \vec{V}_{bloque} = (M + m)\, \vec{V}_f$$

$$\Rightarrow\ (0,015)\ \vec{V}_{bala} - (0,10)\sqrt{2g(1,5)} = (0,115)(5,42)$$

$$\therefore\ \vec{V}_{bala} = \frac{(0,115)(5,42) + (0,10)\left(\sqrt{2(9,81)(1,5)}\right)}{0,015} = 77,69\ m/s$$

33. Un hombre de 75,0 kg permanece en un bote de remos de 100,0 kg en reposo en agua tranquila. Mira hacia la parte de atrás del bote y lanza una roca de 5,00 kg en esa dirección fuera de la embarcación a una velocidad de 20,0 m/s. El bote se mueve hacia delante y se detiene a 4,2 m de su posición original. Calcule, a) la velocidad de retroceso inicial del bote, b) la pérdida de energía mecánica debido a la fuerza de fricción ejercida por el agua, y c) el coeficiente efectivo de fricción entre el bote y el agua.

Resolución :



Parte (a) $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$

$$0 = (m_{roca})\ \vec{V}_{roca/0} + (M_{bote} + M_{hombre})\ \vec{V}_{bote/0}$$

$$\Rightarrow\ 5(20)\,\hat{i} + (175)\ \vec{V}_{bote/0} = 0 \qquad \therefore\ \vec{V}_{bote} = -0,57\,\hat{i}\ m/s$$

Parte (b) $W_{fricción} = \Delta E_M = E_{M\ final} - E_{M\ inicial}$

$$\Rightarrow\ \text{Pérdida de energía} = \frac{1}{2}(175)(0,571)^2$$

$$\therefore\ \Delta E_M = 28,6\ \text{joules}$$

Parte (c)

$$28,6 = f_r\,(d) = \mu_k\,(175)(9,81)(4,2)$$

$$\therefore\ \mu_k = 0,00397$$

34. Como se indica en la figura P9.34, una bala de masa *m* y velocidad *v* atraviesa la plomada de un péndulo de masa *M*. La bala sale con una velocidad *v*/2. La plomada del péndulo está sostenida por medio de una barra rígida de longitud L y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de *v* para que la plomada del péndulo apenas realice un círculo vertical completo.

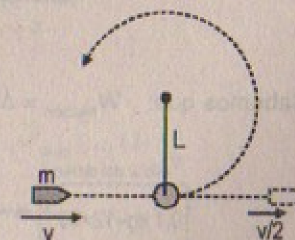


Figura P9.34

Resolución :

Por colisión elástica:

$$m.v + 0 = M\,v_p + m\,v/2 \Rightarrow v_p = \left(\frac{m}{M}\right)\frac{v}{2} \quad ...(1)$$

por otro lado:

por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M\,v_p^2 = \frac{1}{2}M\,v_B^2 + mg(2L)$$

Por movimiento circular en "B"

$$Mg + T = \frac{M}{L}v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = gL \text{ ya que: "}v_p\text{" tiene que ser mínima}$$

Luego: $\frac{1}{2}M\,v_p^2 = \frac{1}{2}MgL + 2MgL \therefore v_p = \sqrt{5gL}$

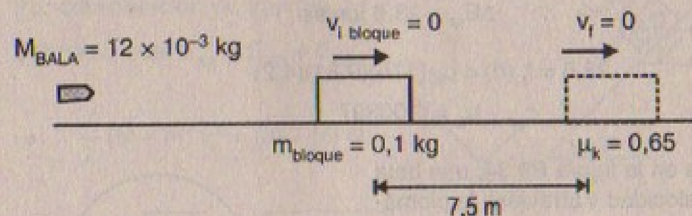
En consecuencia de (1): $v_{mínima} = \left(\frac{2M}{m}\right)v_p = \left(\frac{2M}{m}\right)\sqrt{5gL}$

35. Una bala de 12 g se dispara contra un bloque de madera de 100 g inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto el bloque se desliza 7,5 m antes de detenerse. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0,65, ¿cuál es la velocidad de la bala inmediatamente antes del impacto?

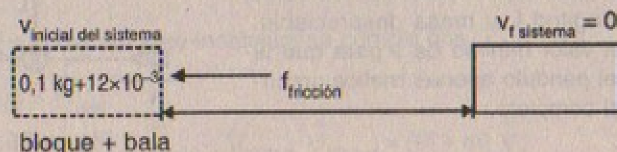
35A. Una bala de masa m_1 se dispara contra un bloque de madera de masa m_2 inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto el bloque que se desliza una distancia d antes de detenerse. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ, ¿cuál es la velocidad de la bala inmediatamente antes del impacto?

Resolución :

Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$



Sabemos que: $W_{fricción} = \Delta E_M = E_{K\,final} - E_{K\,inicial}$



$$\Rightarrow \quad -f_f\,(d) = 0 - \frac{1}{2}(0{,}1 + 12\times10^{-3})\,v^2_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad -(12\times10^{-3} + 0{,}1)(9{,}81)(0{,}65)(7{,}5) = -\frac{1}{2}(0{,}1 + 12\times10^{-3})\,v^2_{inicial}$$

$$\therefore \quad v_{inicial} = \sqrt{2(9{,}81)(0{,}65)(7{,}5)} \approx 9{,}78\ m/s$$

Por otro lado:

Antes: $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$ (por colisión perfectamente inelástica)

$$\Rightarrow \quad (M_{bala})\,\vec{V}_{bala} + 0 = (M_{bala} + M_{bloque})\,\vec{V}_{inicial}$$

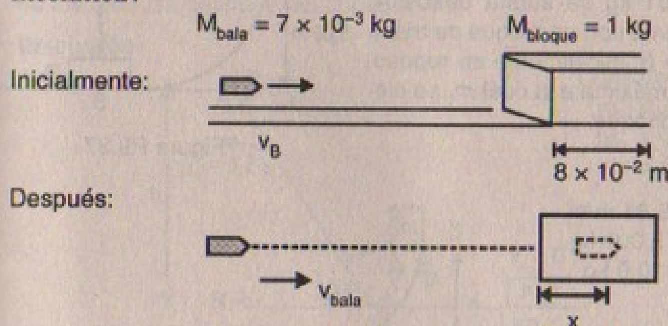
$$\Rightarrow \quad (12\times10^{-3}\ kg)\,\vec{V}_{bala} = (12\times10^{-3} + 0{,}1)(9{,}78)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{bala} = \frac{(12\times10^{-3} + 0{,}1)(9{,}78)}{12\times10^{-3}}$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{bala} = 91{,}28\ m/s$$

36. Una bala de 7,00 g disparada contra un bloque de madera de 1,00 kg fijo en una prensa de tornillo penetra hasta una profundidad de 8,00 cm. Después de que se quita la prensa, el bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción, y se dispara contra él otra bala de 7,00 g. ¿A qué profundidad penetra esta segunda bala?

Resolución :



Inicialmente: $W_f \times d = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad -F\times(8\times10^{-2}\ m) = 0 - \frac{1}{2}M_{bala}\cdot v^2_{bala} \quad ...(1)$$

Después: $W_f \cdot d = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad -F(x) = 0 - \frac{1}{2}M_{bala}\cdot v^2_{bala\ sist.}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} M_{bala} \cdot v^2_{bala\ sist.} \quad \text{... (2)}$$

Por otro lado: $\vec{P}_{Inicial} = \vec{P}_{final}$

$$\Rightarrow \quad M_{bala} \cdot v_{bala} = (M_{bala} + M_{bloque})\, v_{f.s.\ bala}$$

$$\Rightarrow \quad v_{f.s(bala+bloque)} = \frac{M_{bala} \cdot V_{bala}}{M_{bala} + M_{bloque}} \quad \text{... (3)}$$

Luego: (1) en (2)

$$\left(\frac{1}{16} \times 10^2 . M_{bala} \cdot v_{bala}^2\right) x = \frac{1}{2} M_{bala} \left[\frac{M_{bala} \cdot v_{bala}}{M_{bala} + M_{bloque}}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100\ x}{16} = \frac{1}{2} M_{bala}^2 \times \frac{1}{(M_{bala} + M_{bloque})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100\ x}{8} = \frac{(7 \times 10^{-3})^2}{(1{,}007)^2} \qquad \therefore \quad x = 38 \times 10^{-7}\ m$$

37. Considere una pista sin fricción *ABC* como la mostrada en la figura P9.37. Un bloque de masa m_1 = 5,001 kg se suelta desde A. Choca frontalmente con un bloque de masa m_2 = 10,0 kg en *B*, inicialmente en reposo. Calcule la altura máxima a la cual m_1 se eleva después del choque.

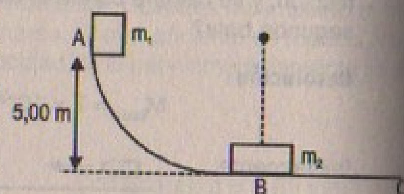
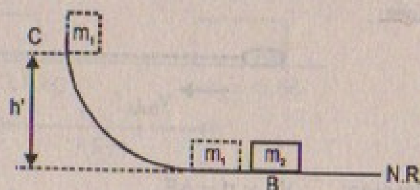


Figura P9.37

Resolución :37

Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$
$m_1 = 5{,}001$ kg
$m_2 = 10{,}0$ kg



$E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2(9{,}81)(5)} \approx 9{,}905\ m/s$$

por otro lado: por colisión elástica se cumple que:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 v_B + 0 = m_1\, v_1 + m_2\, v_2 \quad \text{... (1)}$$

$$\vec{E}_{K\,i} = \vec{E}_{K\,final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_B^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{... (2)}$$

resolviendo las ecuaciones: (1) y (2)

resulta que: $$\vec{V}_1 = \frac{17{,}8 \pm \sqrt{(17{,}8)^2 + 4(1)(98{,}01)}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_1 = -4{,}41\,\hat{i}\ \ m/s$$

Luego por conservación de energía

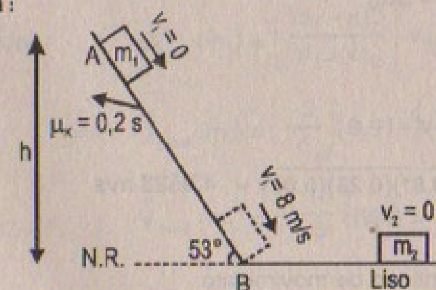
$$E_{MB} = E_{MC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 (-4{,}41)^2 = m_1 gh' \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{(-4{,}41)^2}{2(9{,}81)}$$

$$\therefore \quad h' = 0{,}99\ m$$

38. Un bloque de masa m_1 = 2,0 kg se mueve desde el reposo sobre una superficie inclinada a 53° respecto de la horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre la superficie y el bloque es μ_c = 0,25. a) Si la velocidad del bloque en el pie de la pendiente es 8,0 m/s hacia la derecha, determine la altura desde la cual se suelta al bloque. b) Otro bloque de masa m_2 = 6,0 kg se encuentra en reposo sobre la superficie horizontal lisa. El bloque m_1 choca contra el bloque m_2. Después del choque los bloques se mantienen unidos y se mueven hacia la derecha. Determine la velocidad de los bloques después del choque.

Resolución :



Considerar:
$m_1 = 2$ kg
$m_2 = 6$ kg
$g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (a)

$$E_{MB} - E_{MA} = W_{fricción}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1\, v_B^2 - mgh = -f_f\,(d) = -(\mu_k\, m_1\, g\cos 53°)\left(\frac{h}{sen 53°}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(2)(8)^2 - 2(9{,}81)h = -(0{,}25)(2)(9{,}81)h\ (0{,}75)$$

$$64 = -3,67875\ h + 19,62\ h$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{64}{15,94} = 4,01\ m$$

Parte (b)

Cuando chocan ambos bloques se produce una colisión perfectamente inelástica, entonces se cumple:

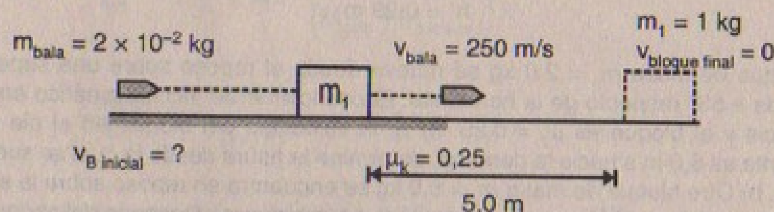
$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad 8(2) + 6(0) = (2 + 6)v_{final}$$

$$\therefore \quad v_{final} = 2\ m/s$$

39. Una bala de 20,0 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 1,0 kg que descansa sobre una superficie horizontal (μ_k = 0,25). La bala atraviesa el bloque y sale de él con una velocidad de 250 m/s. Si el bloque se desplaza 5,0 m antes de detenerse, ¿cuál es la velocidad inicial de la bala?

Resolución:



Sea "v_1" la velocidad inicial del bloque cuando impacta con la bala

$\Rightarrow$ Por energía: $W_{fricción} = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad -f_t(d) = 0 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_k m_1 g(d) = -\frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\mu_k d} = \sqrt{2(9,81)(0,25)(5,00)} \approx 4,9523\ m/s$$

Por otro lado:

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad M_{bala} \cdot \vec{V}_{B\ inicial} = M_{bala} \cdot \vec{V}_{bala} + V_{bloque} \cdot \vec{V}_1$$

$$\Rightarrow \quad (2 \times 10^{-2})(\vec{V}_{B\ inicial}) = (2 \times 10^{-2})(250) + (1)(4,9523)$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{B\ inicial} = 497,615\ \hat{i}\ m/s$$

40. Dos bloques de masas m_1 = 2,00 kg y m_2 = 4,00 kg se sueltan desde de una altura de 5,00 m sobre una pista sin fricción, como la que se muestra en la figura P9.40. Los bloques sufren un choque frontal elástico. a) Determine las dos velocidades justo antes del choque. b) Con las ecuaciones 9.20 y 9.21 determine las dos velocidades exactamente después del choque. c) Determine la altura máxima a la cual sube cada bloque después del choque.

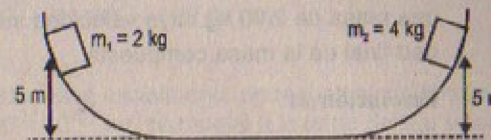


FIGURA P9.40

Resolución :40

Parte (a)

$$\vec{V}_{m_1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,81)(5)} \approx 9,9\hat{i}\ m/s$$

$$\vec{V}_{m_2} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,81)(5)} \approx -9,9\hat{i}\ m/s$$

Parte (b)

Como la colisión que se produce es elástica se produce:

$$\vec{V}_{final\ (m_2)} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{m_1} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{f\ m_2} = \left(\frac{2(2)}{6}\right)(9,9) + \left(\frac{2}{6}\right)(-9,9)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{f\ m_2} = \left(\frac{1}{3}\right)(9,9) = 3,3\hat{i}\ m/s$$

Por otro lado:
$$\vec{V}_{final}(m_1) = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{m_1} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{final}(m_1) = \left(\frac{-2}{6}\right)(9,9) + \left(\frac{8}{6}\right)(-9,9)$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{final}(m_1) = -\left(\frac{10}{6}\right)(9,9) = -16,5\hat{i}\ m/s$$

Parte (c)

$$E_{M\ inicial}(m_1) = E_{M\ final}(m_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1(-16,5)^2 = m_1 g h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{(-16,5)^2}{2(9,81)} = 13,88\ m$$

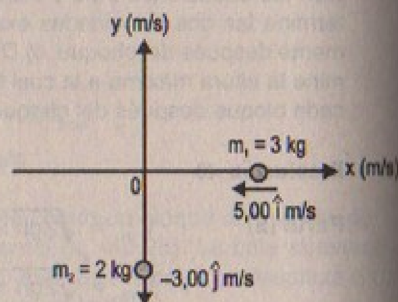
$$E_{M\ inicial}(m_2) = E_{M\ final}(m_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_2(3,3)^2 = m_2 g h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{(3,3)^2}{2(9,81)} = 0,555\ m$$

COLISIONES BIDIMENSIONALES

41. Una masa de 3,00 kg con una velocidad inicial de $5{,}00\hat{i}$ m/s choca y queda unida a una masa de 2,00 kg cuya velocidad inicial es de $-3{,}00\hat{j}$ m/s. Determine la velocidad final de la masa compuesta.

Resolución :41



$$\vec{P}_{inicial\,x} = \vec{P}_{final\,x}$$

$\Rightarrow$ $(5)(3) + 0 = (2 + 3)\vec{V}_f$

$\Rightarrow$ $\vec{V}_{fx} = 3\hat{i}$ m/s

$$\vec{P}_{inicial\,y} = \vec{P}_{final\,y}$$

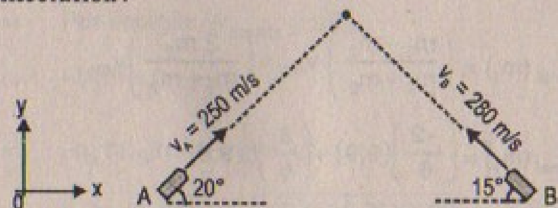
$\Rightarrow$ $0 - 3(2) = 5\,\vec{V}_{fy}$

$\Rightarrow$ $\vec{V}_{fy} = -1{,}2\hat{j}$ m/s

Luego la velocidad final es $v_f = \sqrt{(3)^2 + (-1{,}2)^2} = 3{,}23$ m/s

42. Durante la batalla de Gettysburg el tiroteo fue tan intenso que varios proyectiles chocaron en el aire y se fundieron. Suponga una bala de fusil de la Unión de 5,0 g que se mueve a la derecha a 250 m/s y 20,0° sobre la horizontal, y una confederada de 3,0 g que se mueve hacia la izquierda a 280 m/s y 15° sobre la horizontal. Inmediatamente después de que se funden, ¿cuál es su velocidad?

Resolución :



Tener en cuenta
sen20° ≈ 0,345
cos20° ≈ 0,9386
sen15° ≈ 0,259
cos15° ≈ 0,966

$$\vec{P}_{inicial\,x} = \vec{P}_{final\,x}$$

$\Rightarrow$ $(5 \times 10^{-3})(250)(0{,}9386)\hat{i} - (3 \times 10^{-3})(280)(0{,}966)\hat{i} = (5 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\,\vec{V}_{fx}$

$\therefore$ $\vec{V}_{fx} = 45{,}23\hat{i}$ m/s

$$\vec{P}_{inicial\,y} = \vec{P}_{final\,y}$$

$\Rightarrow$ $(5 \times 10^{-3})(250)(0{,}345)\hat{j} + (3 \times 10^{-3})(280)(0{,}259)\hat{j} = (5 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\,\vec{V}_{fy}$

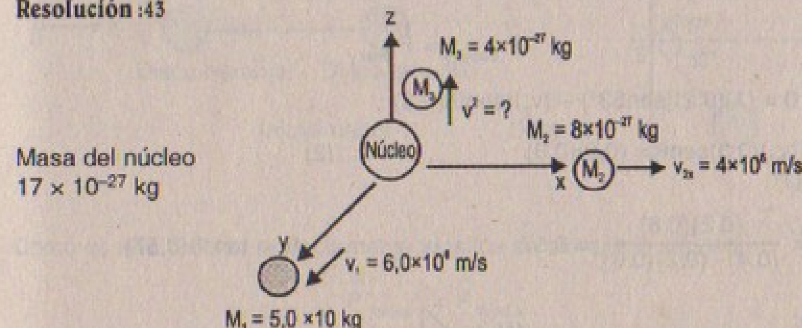
$\therefore$ $\vec{V}_{fy} = 81{,}10\hat{j}$ m/s

En consecuencia: $v_{final} = \sqrt{(45{,}23)^2 + (81{,}10)^2} = 92{,}86$ m/s

43. Un núcleo inestable de 17×10^{-27} kg de masa inicialmente en reposo se desintegra en tres partículas. Una de ellas, de $5{,}0 \times 10^{-27}$ kg, se mueve a lo largo del eje *y* con una velocidad de $6{,}0 \times 10^6$ m/s. Otra partícula, de masa $8{,}4 \times 10^{-27}$ kg, se mueve a lo largo del eje *x* con una velocidad de $4{,}0 \times 10^6$ m/s. Encuentre a) la velocidad de la tercera partícula y b) la energía total emitida en el proceso.

Resolución :43

Masa del núcleo
17×10^{-27} kg



Parte (a) $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$

$\Rightarrow$ $0 = 8 \times 10^{-27}(4 \times 10^6)\hat{i} + (5 \times 10^{-27})(6 \times 10^6)\hat{j} + 4 \times 10^{-27} \cdot v_3$

$\Rightarrow$ $\vec{V}_3 = -8{,}00 \times 10^6\hat{i} - 7{,}5 \times 10^6\hat{j}$ m/s

$\therefore$ $v_3 = \sqrt{(-8)^2 + (-7{,}5)^2} \times 10^3 = 10{,}97 \times 10^3$ m/s

Parte (b)

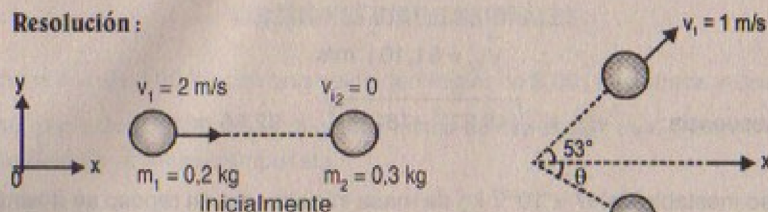
$$E_{K\,total} = \frac{1}{2}(M_1)v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 + \frac{1}{2}M_3 v_3^2$$

$$E_{K\,total} = \frac{1}{2}(5{,}0\times10^{-27})(6{,}0\times10^6)^2 + \frac{1}{2}(8\times10^{-27})(4\times10^6)^2 + \frac{1}{2}(4\times10^{-27})(10{,}97\times10^3)^2$$

$\therefore$ $E_{K\,total} = 384{,}68 \times 10^{-15}$ joules

44. Un disco de goma de 0,30 kg, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, es golpeado por otro disco similar de 0,20 kg que se mueve al principio a lo largo del eje *x* con una velocidad de 2,0 m/s. Después del choque, el disco de 0,20 kg tiene una velocidad de 1,0 m/s a un ángulo θ = 53° con el eje *x* positivo (Fig. 9.13). a) Determine la velocidad del disco de 0,30 kg después del choque. b) Encuentre la fracción de energía cinética perdida en el choque.

Resolución :



Parte (a) $\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$

$\Rightarrow \quad (0,2)(2) = (1)(\cos 53°)(0,2) + v_2\cos\theta(0,3)$

$\Rightarrow \quad 0,4 = (0,2)(0,6) + (0,3)v_2\cos\theta \qquad \text{... (1)}$

$$\vec{P}_{inicial\ y} = \vec{P}_{final\ y}$$

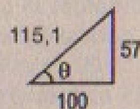
$\Rightarrow \quad 0 = (1)(0,2)(\text{sen}53°) - (v_2)(\text{sen}\theta)(0,3)$

$\Rightarrow \quad (v_2)(0,3)\text{sen}\theta = (0,2)(0,8) \qquad \text{... (2)}$

(2) ÷ (1)

$$\tan\theta = \frac{(0,2)(0,8)}{(0,4)-(0,2)(0,6)} = 0,57 \qquad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0,57)$$

luego:



Reemplazando en (1):

$$\frac{0,4-(0,2)(0,6)}{(0,3)\cos\theta} = \frac{0,28}{(0,3)(100)}(115,1) = v_2 \qquad \therefore \quad v_2 \approx 1,0752 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$$E_{K\,inicial} = \frac{1}{2}(0,2)(2)^2 = 0,4 \text{ joules}$$

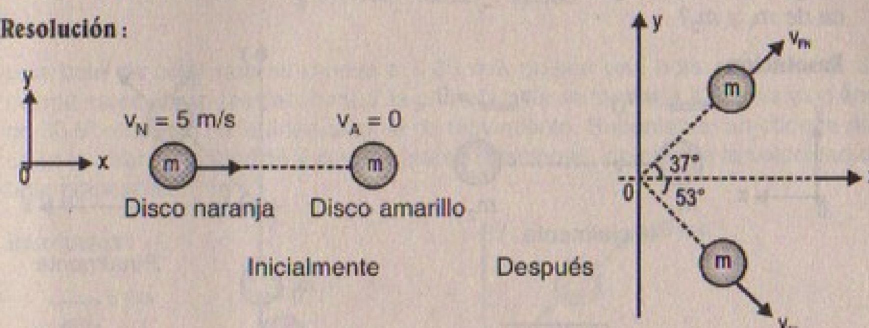
$$E_{K\,final} = \frac{1}{2}(0,2)(1)^2 + \frac{1}{2}(0,3)(1,0752)^2 = 0,273 \text{ joules}$$

Luego $\quad E_{K\,final} / E_{K\,inicial} = 0,684$

45. Dos discos de un juego de mesa de igual masa, uno naranja y el otro amarillo, sufren una colisión indirecta perfectamente elástica. El disco amarillo está inicialmente en reposo y es golpeado por el disco naranja que se mueve con una velocidad de 5,00 m/s. Después del choque el disco naranja se mueve por una dirección que forma un ángulo de 37,0° con su dirección inicial de movimiento, y la velocidad del disco amarillo es perpendicular a la del disco naranja (después del choque). Determine la velocidad final de cada disco.

45A. Dos discos de un juego de mesa de igual masa, uno naranja y el otro amarillo, sufren un choque indirecto perfectamente elástico. El disco amarillo está inicialmente en reposo y es golpeado por el disco naranja que se mueve con una velocidad de v_0. Después del choque el disco naranja se mueve por una dirección que forma un ángulo θ con su dirección inicial de movimiento, y la velocidad del disco amarillo es perpendicular a la del disco naranja (después del choque). Determine la velocidad final de cada disco.

Resolución :



Como es una colisión perfectamente elástica se cumple lo siguiente:

$$\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$$

$\Rightarrow \quad 5(m) + 0 = v_{fN} \cdot \cos 37°\,(m) + v_{fA}\cos 53° \cdot m$

$\Rightarrow \quad 5 = 0,8\,v_{fN} + 0,6\,v_{fA} \qquad \text{... (1)}$

$$\vec{P}_{inicial\ y} = \vec{P}_{final\ y}$$

$\Rightarrow \quad 0 = v_{fN}\,\text{sen}37° \cdot m - v_{fA}\,\text{sen}53° \cdot m$

$$\therefore \quad v_{fN}(0,6) = v_{fA}(0,8) \qquad \text{... (2)}$$

(2) en (1) $\quad 5 = 0,8\left[\frac{(0,8)}{0,6}v_{fA}\right] + (0,6)\,v_{fA}$

$\Rightarrow \quad 5(0,6) = 0,64\,v_{fA} + 0,36 \cdot v_{fA}$

$$\therefore \quad v_{fA} = \frac{5(0,6)}{0,64+0,36} = 3 \text{ m/s}$$

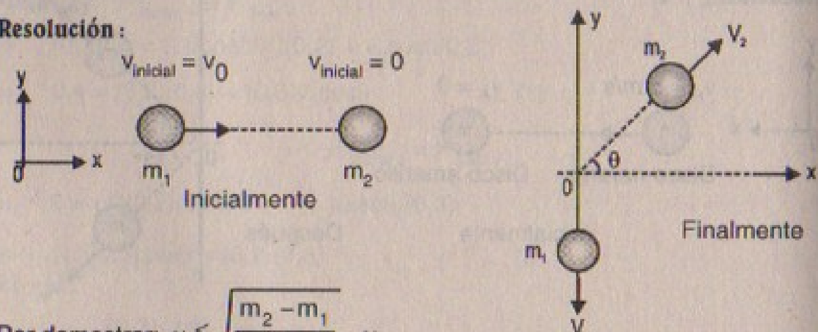
En consecuencia: $\quad v_{fN} = \dfrac{(3)(0,8)}{0,6} = 4$ m/s

46. Un bloque de masa m_1 se mueve hacia el este sobre una mesa, con una velocidad v_0 hacia el bloque de masa m_2, que se encuentra en reposo. Después del choque el primer bloque se mueve al sur con una velocidad v. a) Demuestre que

$$v \le \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}\; v_0$$

(*Sugerencia*: Suponga $K_{después} \le K_{antes}$). b) ¿Qué le dice esta expresión para v acerca de m_1 y m_2?

Resolución:



Por demostrar: $v \le \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}} \cdot v_0$

Entonces sabemos: $\vec{P}_{inicial\,x} = \vec{P}_{final\,x}$

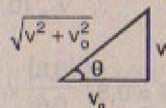
$$\Rightarrow \quad m_1 v_0 = -m_1 v + m_2 v_2 \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v_o + m_1 v}{m_2 \cos\theta} \quad \dots (1)$$

Así también: $\vec{P}_{inicial\,y} = \vec{P}_{final\,y}$

$$\Rightarrow \quad 0 = -m_1 v + m_2 \cdot v_2\, \text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v}{m_2 \cos\theta} \quad \dots (2)$$

Igualando (1) = (2)

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 v_o}{m_2 \cos\theta} = \frac{m_1 v}{m_2\, \text{sen}\,\theta}$$



$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v}{v_o}$$

luego: $v_2 = \frac{m_1 v_o}{m_2 \cos\theta} = \frac{m_1 v_o}{m_2 v_o} \cdot \sqrt{v^2 + v_0^2} \quad \therefore \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v^2 + v_0^2}$

Por hipótesis: $E_{K\,inicial} \ge E_{K\,final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \;\ge\; \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v^2 + v_0^2)$$

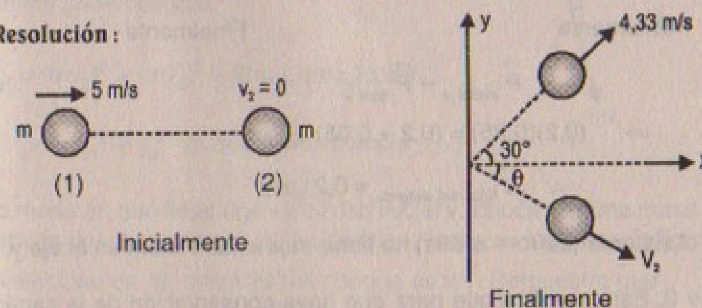
$$\Rightarrow \quad v_0^2 \ge v^2 + \frac{m_1}{m_2}(v^2 + v_0^2) \quad \Rightarrow \quad m_2 v^2 + m_1 v^2 + m_1 v_0^2 \le m_2 v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 (m_1 + m_2) \le (m_2 - m_1)\, v_0^2$$

$$\therefore \quad v \le \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}\; v_0 \qquad \text{l.q.q.d}$$

47. Una bola de billar que se mueve a 5,00 m/s golpea una bola estacionaria de la misma masa. Después del choque, la primera bola se mueve a 4,33 m/s y un ángulo de 30,0° respecto de la línea original de movimiento. Suponiendo un choque elástico (e ignorando la fricción y el movimiento rotacional), encuentre la velocidad de la bola golpeada.

Resolución:



$$\vec{P}_{inicial\,x} = \vec{P}_{final\,x}$$

$$\Rightarrow \quad m.5 + 0 = 4{,}33\, m \cos 30° + v_2\, m\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad 5 - 4{,}33\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = v_2 \cdot \cos\theta \quad \dots (1)$$

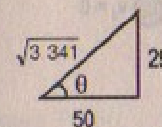
Por otro lado: $\vec{P}_{inicial\,y} = \vec{P}_{final\,y}$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4{,}33\, \text{sen}\,30° - v_2\, \text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}33\left(\frac{1}{2}\right) = v_2\, \text{sen}\,\theta \quad \dots (2)$$

Entonces: (2) ÷ (1)

resulta que: $\tan\theta = 0{,}58$



En consecuencia: $\frac{1{,}25}{\cos\theta} = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \left(\frac{1{,}25}{50}\right)\left(\sqrt{3\,341}\right)$

$$\therefore \quad v_2 = 1{,}445 \text{ m/s}$$

48. Un carro de 200 g se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción con una velocidad constante de 25,0 cm/s. Un pedazo de arcilla para moldear de 50,0 g se deja caer verticalmente sobre el carro. a) Si la arcilla se adhiere al carro, encuentre la velocidad final del sistema. b) Después del choque la arcilla no tiene momento en la dirección vertical. ¿Esto significa una violación a la ley de la conservación del momento?

Resolución :

Masa de la arcilla = 0,05 kg

Masa del carro —— v = 0,25 m/s —— v_f = ?

Inicialmente Finalmente

Parte (a) $\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$

$\Rightarrow$ $(0,2)(0,25) = (0,2 + 0,05)\ v_f$

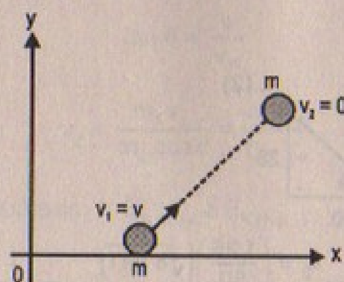
$\therefore$ $\vec{V}_{final\ del\ sistema} = 0,2\ \hat{i}$ m/s

Parte (b)

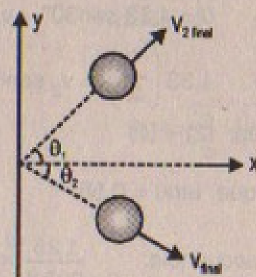
Inicialmente el sistema (carro + arcilla) no tiene *momentum* lineal en el eje y, entonces $\vec{P}_{inicial\ y} = 0$. Esto significa que para que haya conservación de la cantidad de movimiento, $\vec{P}_{final\ y} = 0$ lo cual se cumple ya que $v_{f\ sistema}$ es horizontal en x.

49. Una partícula de masa *m*, que se mueve con velocidad v, choca de manera oblicua con una partícula idéntica que está en reposo. Demuestre que si el choque es elástico las dos partículas se mueven a 90° una respecto de la otra después del choque. (*Sugerencia*: $(\vec{A}+\vec{B})^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$).

Resolución :



Inicialmente



Finalmente

Como es un choque elástico se cumple lo siguiente:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

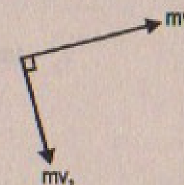
$\Rightarrow$ $m\,v = m\,v_1 + m\,v_2$

$\Rightarrow$ $v = v_1 + v_2$ ... (1)

Por otro lado: $E_{K\ inicial} = E_{K\ final}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,v_1^2 + \frac{1}{2}m\,v_2^2$

$\Rightarrow$ $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ ... (2)



Además sabemos que:

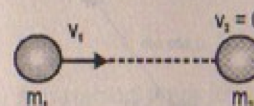
$P_{final}^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 + 2(mv_1)(mv_2)\cos 90°$

$\Rightarrow$ $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ ya que (2) se cumple

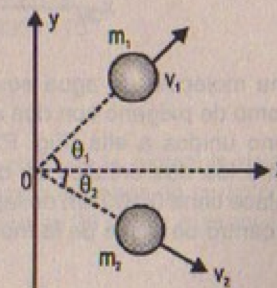
50. Una masa m_1 que tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_1$ choca con una masa estacionaria m_2. Después del choque m_1 y m_2 se desvían, como se indica en la figura P9.50. La velocidad de m_1 después del choque es $\mathbf{v'}_1$. Demuestre que

$$\tan\theta_2 = \frac{v'_1\,\text{sen}\theta_1}{v_1 - v_1\cos\theta_2}$$

De la información dada y del resultado que usted dedujo, ¿se puede suponer que el choque es perfectamente elástico?



Antes del choque



Después del choque

Figura P9.50

Resolución :

Por demostrar: $\boxed{\tan\theta_2 = \frac{v'_1\,\text{sen}\theta_1}{v_1 - v_1\cos\theta_2}}$

Sabemos que: $\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$

$\Rightarrow \quad m_1v_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$

$\Rightarrow \quad m_1v_1(1-\cos\theta_1) = m_2v_2\cos\theta_2 \qquad \ldots (1)$

Por otro lado: $\vec{P}_{final\ y} = \vec{P}_{inicial\ y}$

$\Rightarrow \quad 0 = m_1v'_1\operatorname{sen}\theta_1 - m_2v_2\operatorname{sen}\theta_2$

$\Rightarrow \quad m_1v_1\operatorname{sen}\theta_1 = m_2v_2\operatorname{sen}\theta_2 \qquad \ldots (2)$

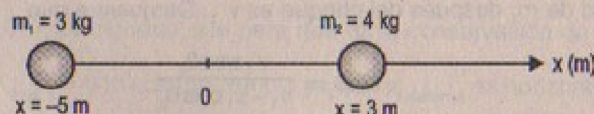
Luego: dividimos: (2) ÷ (1)

$$\therefore \quad \tan\theta_2 = \frac{v'_1\operatorname{sen}\theta_1}{v_1 - v_1\cos\theta_1} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

EL CENTRO DE MASA

51. Una partícula de 3,00 kg se localiza sobre el eje *x* en *x* = –5,00 m, y una partícula de 4,00 kg está sobre el eje *x* en x = 3,00 m. Encuentre el centro de masa de este sistema de dos partículas.

Resolución :



$$x_{CM} = \frac{3(-5)+4(3)}{7} = \frac{-3}{7} = -0{,}4285\ \text{m}$$

52. Una molécula de agua se compone de un átomo de oxígeno con dos átomos de hidrógeno unidos a ella (Fig. P9.52). El ángulo entre los dos enlaces es de 106°. Si cada enlace tiene 0,100 nm de largo, ¿dónde está el centro de masa de la molécula?

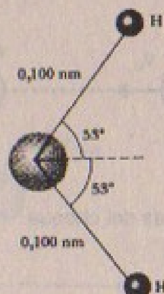


Figura P9.52

Resolución :

$$x_{CM} = \frac{m(0{,}1)\cos 53° + m(0{,}1)\cos 53°}{2m} = \frac{1}{2}(2)\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}6\ \text{nm}$$

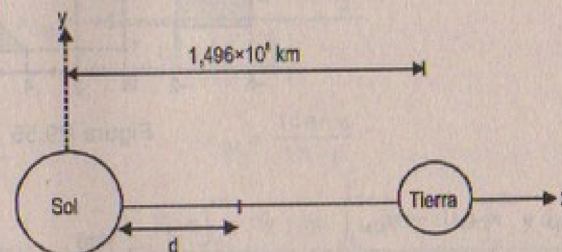
$$\Rightarrow \quad \vec{x}_{CM} = 0{,}6\,\hat{i}\ \text{nm}$$

$$y_{CM} = \frac{m(0{,}1)\operatorname{sen}53° - m(0{,}1)\operatorname{sen}53°}{2m} = 0$$

$$\therefore \quad r_{CM} = 0{,}6\ \text{nm}$$

53. La masa del Sol equivale a 329 390 masas de la Tierra, y la distancia media del centro del Sol al centro de la tierra es igual a 1,496 × 10⁸ km. Si se considera a la Tierra y al Sol como partículas, con cada masa concentrada en su respectivo centro geométrico, ¿a qué distancia del centro del Sol está el centro de masa del sistema Tierra–Sol? Compare esta distancia con el radio medio del Sol (6,960 × 10⁵ km).

Resolución :



Masa del Sol = 329 390 M_{Tierra}

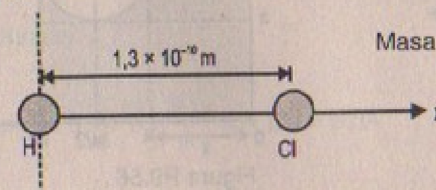
$$x_{CM} = \frac{(M_{Sol})(d) + (M_{Tierra})(1{,}496\times10^8 - d)}{M_{Sol} + M_{Tierra}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{0 + M_{Tierra}(1{,}496\times10^8)}{M_{Tierra}(329\ 391)} = \frac{1{,}496\times10^8}{3{,}29391\times10^5}$$

$$\therefore \quad x_{CM} = 454{,}17\ \text{km}$$

54. La separación entre los átomos de hidrógeno y cloro de la molécula de HCl es de casi 1,30 × 10⁻¹⁰ m. Determine la posición del centro de masa de la molécula cuando se mide desde el átomo de hidrógeno. (El cloro es 35 veces más masivo que el hidrógeno.)

Resolución :



Masa del cloro = 35 masa del hidrógeno

$$x_{CM} = \frac{0 + M_{cloro}\left(1{,}3\times10^{-10}\right)}{M_{cloro} + M_{hidrógeno}} \Rightarrow x_{CM} = \frac{35 \, . \, M_{hidrógeno}\left(1{,}3\times10^{-10}\right)}{35\, M_{hidrógeno} + M_{hidrógeno}}$$

$$\therefore \quad x_{CM} = \left(\frac{35}{36}\right)\left(1{,}3\times10^{-10}\right) = 1{,}264 \times 10^{-10}\text{ m}$$

55. La figura P9.55 muestra tres objetos uniformes –barra, triángulo rectángulo y cuadrado– con sus masas dadas junto con sus coordenadas. Determine el centro de masa para este sistema de tres objetos.

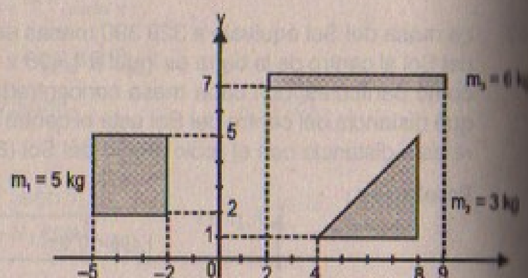


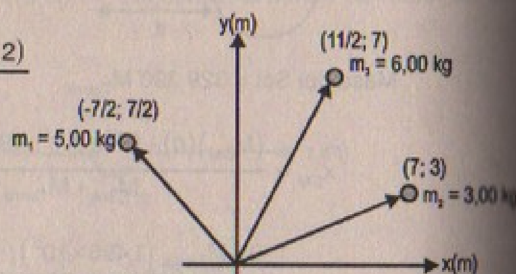
Figura P9.55

Resolución :

Luego: $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j}$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{5(-7/2)+3(7)+6(11/2)}{5+6+3}$$

$$\therefore \quad x_{CM} = 2{,}607 \text{ m}$$



Así también:

$$y_{CM} = \frac{5(7/2)+3(3)+6(7)}{5+6+3}$$

$$\therefore \quad y_{CM} = 4{,}893 \text{ m}$$

por lo tanto: $\vec{r}_{CM} = (2{,}607 \; ; \; 4{,}893)$ m

56. Un agujero circular de diámetro *a* se corta en una placa metálica cuadrada uniforme que tiene lados iguales a 2a, como en la figura P9.56, ¿dónde está el centro de masa de la porción restante?

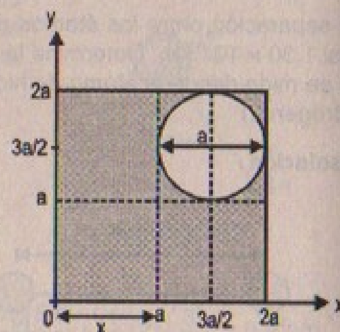


Figura P9.56

Resolución :

Sabemos que: $\frac{M}{A} = \rho \quad \Rightarrow \quad M = \left[(2a)^2 - \pi.\frac{a^2}{4}\right]\rho$

$$\therefore \quad M = a^2\rho\,[4 - \pi/4]$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{2a\rho\int_0^a x\,dx + a\rho\int_a^{2a} x\,dx + a\rho\int_a^{2a} x\,dx - \rho\pi\frac{a^2}{4}}{a^2\rho\left[4 - \frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{a^3\rho + 4a^3\rho - a^3\rho - \rho\pi\frac{a^2}{4}}{a^2\rho\left[4 - \frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\therefore \quad x_{CM} = \frac{16a - \pi}{16 - \pi}$$

Por otro lado: $y_{CM} = \frac{2\rho a\int_0^a y\,dy + a\rho\int_a^{2a} y\,dy + a\rho\int_a^{2a} y\,dy - \rho\,\pi\frac{a^2}{4}}{a^2\rho\left[4 - \frac{\pi}{4}\right]}$

$$\therefore \quad y_{CM} = \frac{16a - \pi}{16 - \pi}$$

57. Una pieza uniforme de lámina de acero tiene la forma mostrada en la figura P9.57. Calcule las coordenadas *x* e *y* del centro de masa de la pieza.

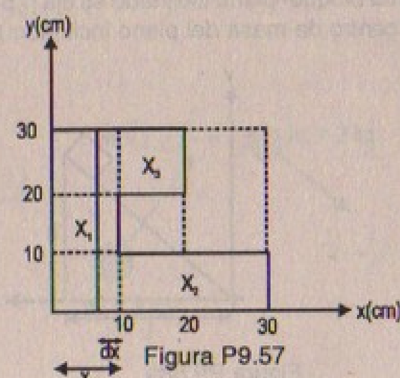


Figura P9.57

Resolución :

Sabemos que: $\rho = \frac{M}{A} \;\Rightarrow\; dM = \rho.dA$

Entonces: $$x_{CM} = \frac{\rho(30)\int_0^{10} x\,dx + \rho(10)\int_{10}^{20} x\,dx + \rho(10)\int_{10}^{30} x\,dx}{M_{total}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{30\rho.\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} + 10\rho.\frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{20} + 10\rho.\frac{x^2}{2}\Big|_{10}^{30}}{\rho\left[(30)^2 - \left((10)^2 + 10\times 20\right)\right]}$$

Luego: $$x_{CM} = \frac{15\rho(10)^2 + 5\rho(400-100) + 5\rho(900-100)}{\rho(600)}$$

$$\therefore \quad x_{CM} = \frac{1500 + 1500 + 4\,000}{600} = 11{,}67 \text{ cm}$$

de manera similar obtenemos: $y_{CM} = 13{,}33$ cm

MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

58. Un bloque de masa $m = 2{,}0$ kg se coloca sobre la parte superior de un plano inclinado de masa $M = 8{,}0$ kg, altura $h = 2{,}0$ m y longitud de la base $L = 6{,}0$ m. Si el bloque se suelta desde el reposo (Fig. P9.58a), ¿qué distancia se ha movido el plano cuando el bloque alcanza la parte inferior (Fig. P9.58b)? Suponga que todas las superficies son sin fricción. (*Sugerencia*: La coordenada *x* para el centro de masa del sistema bloque–plano inclinado es fija [¿por qué?] Vea el ejemplo 9.18 para determinar el centro de masa del plano inclinado.)

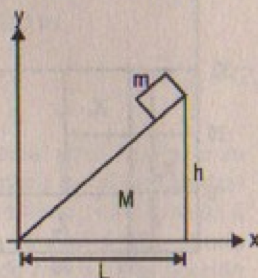


Figura P9.58a

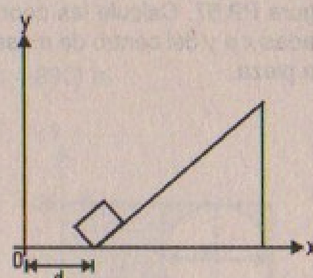


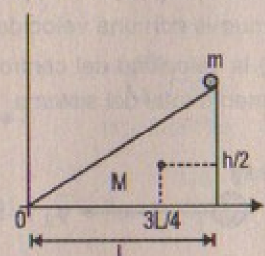
Figura P9.58b

Resolución:

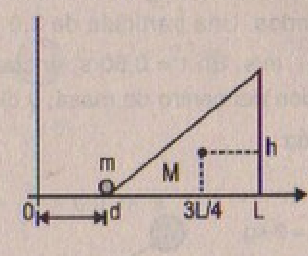
h = 2,0 m ; L = 6,0 m

m = 2,00 kg ; M = 8,00 kg

Inicialmente:



Finalmente:



Entonces: $x_{CM_{inicial}} = x_{CM_{final}}$

Luego: $$x_{CM\,inicial} = \frac{mL + \frac{3L}{4}M}{M+m} = \frac{2(6)+36}{10} = 4{,}8 \text{ m}$$

$$x_{CM\,final} = \frac{md + \left(\frac{3L}{4}+d\right)M}{M+m} = \frac{2d+36+8d}{10}$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}8 = \frac{10d+36}{10} \quad \Rightarrow 48 = 10d + 36$$

$$\therefore \quad 10d = 12 \quad \Rightarrow d = 1{,}2 \text{ m}$$

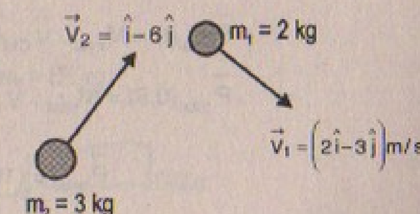
59. Una partícula de 2,0 kg tiene una velocidad $(2{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j})$ m/s y una partícula de 3,0 kg tiene una velocidad $(1{,}0\hat{i} + 6{,}0\hat{j})$ m/s. Encuentre a) la velocidad del centro de masa, y b) el momento total del sistema.

Resolución:

Parte (a)

$$\vec{V}_{CM} = \frac{3\left(1\hat{i}+6\hat{j}\right)+2\left(2\hat{i}-3\hat{j}\right)}{5} = \frac{7\hat{i}+12\hat{j}}{5}$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{CM} = \left(\frac{7}{5}\hat{i} + \frac{12}{5}\hat{j}\right) \text{m/s}$$



$\Rightarrow \quad |v_{CM}| = 2{,}778$ m/s

Parte (b)

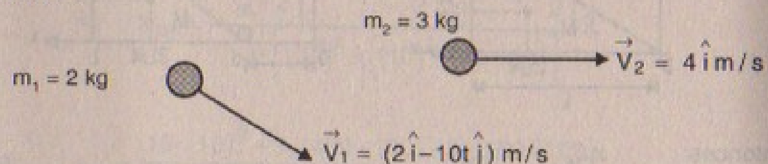
El momento total será: $P = M_{total} \cdot |v_{CM}|$

$\Rightarrow \quad P = 5(2{,}778) = 13{,}89$ kg.m/s

ó $\quad \vec{P} = \left(7\hat{i} + 12\hat{j}\right)$ kg.m/s

60. Una partícula de 2,0 kg tiene una velocidad de $v_1 = (2{,}0\hat{i} - 10t\hat{j})$ m/s, donde t está en segundos. Una partícula de 3,0 kg se mueve con una velocidad constante de $v_2 = 4{,}0\hat{i}$ m/s. En t = 0,50 s, encuentre a) la velocidad del centro de masa, b) la aceleración del centro de masa, y c) el momento total del sistema.

Resolución:



$$v_1(t) = v_1(0{,}5) = 2\hat{i} - 10\left(\frac{1}{2}\right)\hat{j} = (2\hat{i} - 5\hat{j})\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{CM} = \frac{2\left(2\hat{i}-5\hat{j}\right)+3\left(4\hat{i}\right)}{5} \qquad \therefore \quad \vec{V}_{CM} = \left(\frac{16}{5}\hat{i}-10\hat{j}\right)\text{m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\vec{V}_{CM}$ para cualquier instante de tiempo es:

$$\vec{V}_{CM}(t) = \frac{6\hat{i}-10\hat{j}}{5} = \left(\frac{6}{5}\hat{i}-2\hat{j}.t\right)\text{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}_{CM}(t) = -2\hat{j}\text{ m/s}^2 \text{ constante}$$

Parte (c)

El momento total del sistema es:

$$\vec{P}_{total}(t) = M_{total} \cdot \vec{V}_{CM}(t)$$

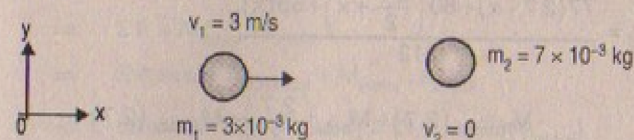
$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{total}(0{,}5) = M_{total} \cdot \vec{V}_{CM}(0{,}5) = 5\text{ kg}\left(\frac{16}{5}\hat{i}-10\hat{j}\right)\text{m/s}$$

$$\therefore \quad \vec{P}_{total} = (16\hat{i} - 50\hat{j})\text{ kg.m/s}$$

61. Una partícula de 3,00 g se mueve a 3,00 m/s hacia una partícula estacionaria de 7,00 g. a) ¿Con qué velocidad se aproxima cada una al centro de masa? b) ¿Cuál es el momento de cada partícula, con respecto del centro de masa?

61A. Una partícula de masa m_1 se mueve a una velocidad v_1 hacia una partícula estacionaria de masa m_2. a) ¿Con qué velocidad se aproxima cada una al centro de masa? b) ¿Cuál es el momento de cada partícula, respecto del centro de masa?

Resolución:



Parte (a) $$v_{CM} = \frac{3\left(3\times10^{-3}\right)+0}{(3+7)\times10^{-3}} = \frac{9}{10} = 0{,}9\text{ m/s}$$

Parte (b) $$\vec{P}_{1/CM} = \vec{P}_{1/0} + \vec{P}_{0/CM} = \vec{P}_{1/0} - \vec{P}_{CM/0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{1/CM} = 3(3\times10^{-3}) - 10\times(10)^{-3}(0{,}9)$$

$$\therefore \quad P_{1/CM} = 0{,}00\text{ kg.m/s}$$

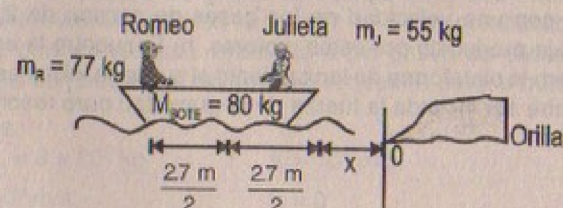
Por otro lado: $$\vec{P}_{2/CM} = \vec{P}_{2/0} + \vec{P}_{0/CM} = \vec{P}_{2/0} - \vec{P}_{CM/0}$$

$$\Rightarrow \quad P_{2/CM} = 0 - (10\times10^{-3})(0{,}9) = -0{,}09\text{ kg.m/s}$$

62. Romeo entretiene a Julieta tocando su guitarra en la parte trasera de su bote en agua tranquila. Después de la serenata, Julieta se mueve delicadamente hacia la parte posterior del bote (alejándose de la orilla) para besar la mejilla de Romeo. Si el bote de 80 kg apunta hacia la playa y si Julieta de 55 kg se mueve 2,7 m hacia Romeo de 77 kg, ¿cuánto se mueve el bote hacia la orilla?

62A. Romeo entretiene a Julieta tocando su guitarra en la parte trasera de su bote en agua tranquila. Después de la serenata, Julieta se mueve delicadamente hacia la parte posterior del bote (alejándose de la orilla) para besar la mejilla de Romeo. Si el bote (masa m_B) apunta hacia la playa y si Julieta (masa m_J) se mueve una distancia d hacia Romeo (masa m_R), ¿cuánto se mueve el bote hacia la orilla?

Resolución:



$$x_{CM\ Sistema\ Final} = \frac{M_{Romeo}(2{,}7+x)+M_{bote}\left(\frac{2{,}7}{3}+x\right)+M_{Julieta}(x)}{M_{Julieta}+M_{Romeo}+M_{bote}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM(sistema)\ final} = \frac{77(2,7+x)+80\left(\frac{2,7}{2}+x\right)+55(x)}{212}$$

Por otro lado: $x_{CM\ final} = \dfrac{M_{Romeo}(2,7)+M_{bote}\left(\frac{2,7}{2}\right)+M_{Julieta}(2,7)}{M_{Romeo}+M_{Julieta}+M_{bote}}$

$$\Rightarrow \quad x_{CM\ final} = \frac{132(2,7)+80\left(\frac{2,7}{2}\right)}{212} = 2,19 \text{ m}$$

Pero sabemos: $x_{CM\ inicial} = x_{CM\ final}$

$$\Rightarrow \quad 2,19 = \frac{315,9+212x}{212}$$

$$\Rightarrow \quad 464,28 = 315,9 + 212\,x \qquad \therefore \quad x = 0,699 \text{ m}$$

PROPULSIÓN DE COHETES

63. Un motor de cohete consume 80 kg de combustible por segundo. Si la velocidad de los gases de escape es de $2,5 \times 10^3$ m/s, calcule el empuje del cohete.

Resolución :

Por definición: $E = \left|v_e \cdot \frac{dM}{dt}\right| \Rightarrow E = \left|(2.5\times10^3)\left(80\frac{Kg}{s}\right)\right|$

$\therefore$ Empuje $= 2 \times 10^5$ kg . m/s^2 $= 2 \times 10^5$ N

64. La primera etapa del vehículo espacial Saturno V consume combustible a razón de $1,5 \times 10^4$ kg/s, con una velocidad de los gases de escape de $2,6 \times 10^3$ m/s. a) Calcule el empuje producido por estos motores. b) Encuentre la aceleración inicial del vehículo sobre la plataforma de lanzamiento si su masa inicial es de $3,0 \times 10^6$ kg. [*Sugerencia*: Debe ser incluida la fuerza de la gravedad para resolver el inciso b).]

Resolución :

Parte (a)

Por dato $\quad v_e = 2,6 \times 10^3$ m/s $\qquad \dfrac{dM}{dt} = 1,5 \times 10^4$ kg/s

$\Rightarrow$ Empuje $= |(2,6 \times 10^3) \times (1,5 \times 10^4)|$

$\therefore$ Empuje $= 39 \times 10^6$ N

Parte (b) Por dato: $M_{inicial} = 3,0 \times 10^6$ kg

$\Rightarrow \quad \Sigma F = M_{inicial} \cdot a_{inicial}$

$\Rightarrow \quad$ Empuje $- F_{gravedad} = M_{inicial} \cdot a_{inicial}$

$\Rightarrow \quad 39 \times 10^6 - 3,10^6\,(9,81) = (3,0 \times 10^6)(a_{inicial})$

$\therefore \quad a_{inicial} = 0,19$ m/s^2

65. Un cohete de 3 000 kg tiene 4 000 kg de combustible a bordo. El cohete se desplaza por el espacio a 100,0 m/s y necesita aumentar su velocidad hasta 300,0 m/s. Logra esto al encender sus motores y expulsando combustible a una velocidad deseada. ¿Qué cantidad de combustible queda a bordo después de esta maniobra?

Resolución :

$M_{total\ del\ cohete} = 7\ 000$ kg ; $\quad M_{combustible\ final} = ?$

$V_{inicial} = 100$ m/s ; $\quad v_e = 650$ m/s ; $\quad v_{final} = 300$ m/s

Entonces:

Sabemos que: $v_f - v_{inicial} = v_e \ln\left(\dfrac{M_{inicial}}{M_{final}}\right)$

$$\Rightarrow \quad (300 - 100) = 650 \ln\left(\frac{7\times10^3}{M_{final}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \exp(0,31) = \frac{7\times10^3}{M_{final}} \qquad \therefore \quad M_{final} = \frac{7\,000}{e^{(0,31)}} \text{ kg}$$

66. Un cohete que se va a usar en las profundidades del espacio tendrá la capacidad de mover una carga (más la estructura del cohete y el motor) de 3,0 tons métricas hasta una velocidad de 10 000 m/s con un motor y combustible diseñado para producir una velocidad de los gases de escape de 2 000 m/s. a) ¿Qué cantidad de combustible más oxidante se requiere? b) Si un combustible y diseño de motor diferentes podrían dar una velocidad a los gases de escape de 5 000 m/s, qué cantidad de combustible y oxidante se requeriría para la misma tarea?

Resolución :

$M_{inicial\ (total)} = 3 \times 10^3$ kg ; $\quad v_f = 10^4$ m/s

$v_e = 2 \times 10^3$ m/s ; $\quad v_i = 0$

Parte (a)

$$v_f - v_i = v_e \cdot \ln\left(\frac{M_{inicial}}{M_{final}}\right) \quad \Rightarrow \quad 10^4 - 0 = 2 \times 10^3 \ln\left(\frac{3\times10^3}{M_f}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^5 = \frac{3\,000}{M_f} \qquad \therefore \quad M_{final} = \frac{3\,000}{\exp(5)}\ kg$$

Parte (b)

Si $v_e = 5\,000$ m/s

$$\Rightarrow \quad 10^4 = 5 \times 10^3 \ln\left(\frac{3\times10^3}{M_f}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^2 = \frac{3\,000}{M_f} \qquad \therefore \quad M_{final} = \frac{3\,000}{\exp(2)}\ kg$$

67. El combustible a bordo de un cohete tiene una densidad de $1{,}4 \times 10^3$ kg/m³ y se expulsa con una velocidad de $3{,}0 \times 10^3$ m/s. Si el motor va a brindar un empuje de $2{,}5 \times 10^6$ N, ¿qué volumen de combustible debe quemarse por segundo?

67.A. El combustible a bordo de un cohete tiene una densidad ρ y se expulsa con una velocidad v. Si el motor brinda un empuje F, ¿Qué volumen de combustible debe quemarse por segundo?

Resolución :

Datos: $v_e = 3{,}0 \times 10^3$ m/s ; $\rho = \frac{M}{V} = 1{,}4 \times 10^3$ kg/m³

$E = 2{,}5 \times 10^6$ N ; $v = ?$

Sabemos que: $E = 2{,}5 \times 10^6 = \left| v_e \times \frac{dM}{dt} \right|$

$$\Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = \frac{2{,}5\times10^6}{3{,}0\times10^3} = 0{,}83\times10^3\ \frac{kg}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V}{s} = \frac{M}{s} \cdot \rho = \left(0{,}83\times10^3\ \frac{kg}{s}\right)\left(\frac{1m^3}{1{,}4\times10^3\ kg}\right)$$

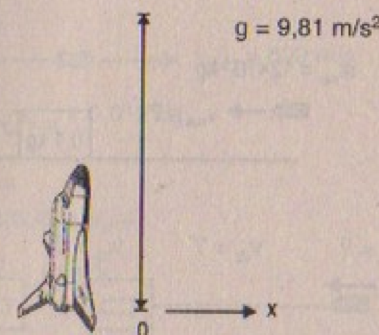
$$\therefore \quad \frac{V}{s} = 0{,}593\ m^3/s$$

68. Un cohete con una masa inicial M_i, se lanza verticalmente desde la superficie terrestre. Cuando el combustible de despegue se ha quemado completamente, el cohete ha alcanzado una altitud pequeña comparada con el radio de la Tierra (por lo que la intensidad del campo gravitacional puede considerarse constante durante el quemado). Demuestre que la velocidad final es $v = -v_e \ln (M_i/M_f) - gt$, donde el tiempo de quemado t_1 es $t_1 = (M_i - M_f)(dm/dt)^{-1}$. ($M_f$ es la masa total final del cohete, v_e es la velocidad del gas de escape, y *dm/dt* es la tasa constante de consumo de combustible).

Resolución :

por demostrar:

$$v_f = -v_e \ln\left[\frac{M_i}{M_f}\right] - gt$$



Dato: masa inicial = M_i

masa total = M_f

v_e = velocidad del gas de escape

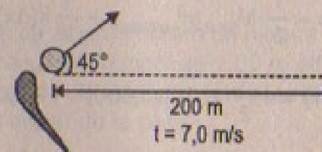
Ejercicio

PROBLEMAS ADICIONALES

69. Una bola de golf (m = 46 g) es golpeada de manera que sale disparada con un ángulo de 45° con la horizontal. El tiro alcanza 200 m sobre una pista plana. Si el palo de golf y la bola están en contacto durante 7,0 ms, ¿cuál es la fuerza promedio del impacto? (Ignore la resistencia del aire.)

Resolución :

$m = 46 \times 10^{-3}$ kg



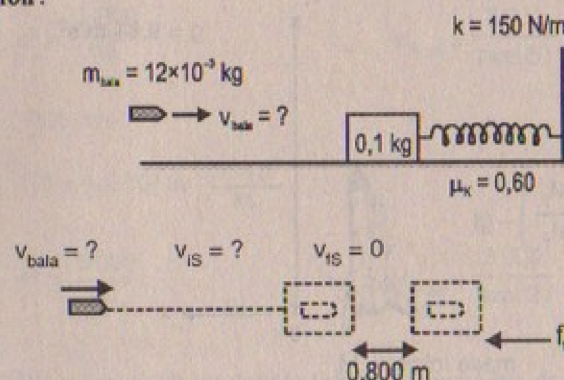
Sabemos: $F_{promedio} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Por otro lado: $v\cos45° \times t = 200 \Rightarrow v = \frac{200}{\sqrt{2}\times(7)}(2) \qquad \therefore\ v = 40{,}4\ \frac{m^2}{ms}$

Entonces: $F_{promedio} = \frac{(4{,}6\times10^{-3})\times(40{,}4)}{7{,}0\ ms} = 0{,}265\ kg \cdot m/(ms)^2$

70. Una bala de 12,0 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 100 g que está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa, conectada a un resorte sin masa de constante 150 N/m. Si el sistema bala-bloque comprime el resorte 0,800 m, ¿cuál era la velocidad de la bala justo al entrar al bloque? Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0,60.

Resolución :



antes de que el bloque se empiece a comprimir, se conserva la cantidad de movimiento entonces:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$$\Rightarrow \quad m_{bala} \cdot v_{bala} = (m_{bala} + m_{bloque})\, v_{inicial\ del\ sistema}$$

$$\therefore \quad v_{sistema} = 12 \times 10^{-3} \cdot v_{bala} / 0{,}112 \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $\quad W_{fricción} = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad -f_r\,(0{,}800) = E_{Kf} - E_{Ki} = -\frac{1}{2}\, M_{total}\, v^2_{i\ sistema} + \frac{1}{2} k(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_k\,(0{,}800)(0{,}112)(9{,}81) = +\frac{1}{2}\,(150)(0{,}800)^2 - \frac{1}{2}(0{,}112)\, v^2_{sistema}$$

$$\Rightarrow \quad +(0{,}6)(0{,}800)(0{,}112)(9{,}81) + \frac{1}{2}(150)(0{,}800)^2 = \frac{1}{2}(0{,}112)v^2_{iS}$$

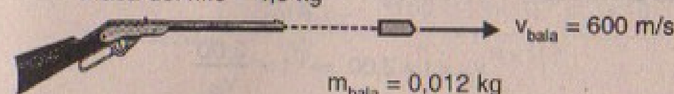
$$\therefore \quad v_{inicial\ sistema} = 29{,}44 \text{ m/s}$$

Luego: $\quad v_{bala} = \dfrac{(29{,}44)(0{,}112)}{0{,}012} = 274{,}75$ m/s

71. Un rifle de caza calibre 30–06 dispara una bala de 0,012 kg con una velocidad de orificio de 600 m/s hacia la derecha. El rifle tiene una masa de 4,0 kg. a) ¿Cuál es la velocidad de retroceso del rifle cuando sale la bala? b) Si el rifle es detenido por el hombro del cazador en una distancia de 2,5 cm, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida sobre el hombro por el rifle? C) Si el hombro del cazador está parcialmente restringido al retroceder, ¿la fuerza ejercida sobre el hombro sería la misma que en el inciso b)? Explique.

Resolución :

Masa del rifle = 4,0 kg



Parte (a) $\quad P_{inicial} = P_{final}$

$$\Rightarrow \quad 0 = (0{,}012)(600) + v_R(4)$$

$$\therefore \quad \vec{V}_{retroceso} = -1{,}8\,\hat{i} \text{ m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad v_f^2 = v_i^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2d}$

Entonces: $\quad F_{prom} = M_{rifle} \cdot a_{prom} = M_{rifle}\left[\dfrac{(-1{,}8)^2}{2(0{,}025)}\right]$

$$\therefore \quad F_{prom} = \frac{4{,}00}{2}\left(\frac{(-1{,}8)^2}{0{,}025}\right) = 259{,}2 \text{ N}$$

Parte (c)

Si sería la misma debido a que son un par de acción y reacción.

72. Una bala de 8,00 g se dispara contra un bloque de 2,50 kg inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de 1,00 m altura (Fig. P9.72). La bala permanece en el bloque y después del impacto éste aterriza a 2,00 m del pie de la mesa. Determine la velocidad inicial de la bala.

72A. Una bala de masa *m* se dispara contra un bloque de masa *M* inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura *h* (Fig. P9.72). La bala permanece en el bloque y después del impacto éste aterriza a una distancia *d* del pie de la mesa. Determine la velocidad inicial de la bala.

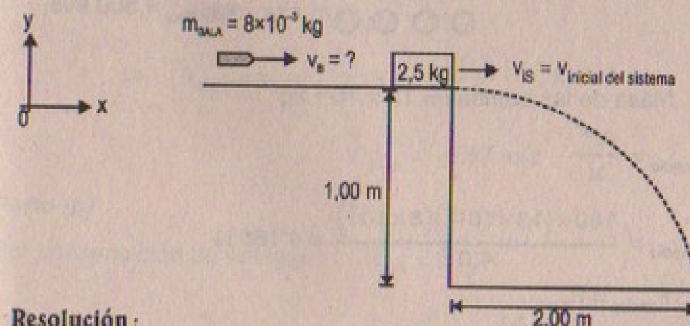


Figura P9.72

Resolución :

Considerar: g = 9,81 m/s²

Por movimiento de proyectiles: $1{,}00 = v_{iS} \times t + \frac{1}{2}(g)\,t^2$

$$v_{iS} \times t = 2{,}00 \Rightarrow t = \frac{2{,}00}{v_{iS}}$$

$$\Rightarrow 1{,}00 = v_{iS}\ t + \frac{1}{2}(9{,}81)\left(\frac{4}{v_{iS}^{\ 2}}\right)$$

$$\therefore v_{\text{inicial del sistema } x} = 6{,}26 \text{ m/s}$$

Por conservación del momento lineal:

$$\vec{P}_{\text{inicial } x} = \vec{P}_{\text{final } x}$$

$$\Rightarrow M_{bala} \cdot \vec{V}_{bala} = (M_{bala} + M_{bloque})\,\vec{V}_{\text{inicial sistema}}$$

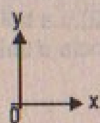
$$\Rightarrow \vec{V}_{bala} = \frac{(M_{bala} + M_{bloque})}{M_{bala}} \times \vec{V}_{i.S}$$

$$\therefore v_{bala} = \frac{(0{,}088 + 2{,}5)}{0{,}008} \times 6{,}26 = 1\,962{,}51 \text{ m/s}$$

73. Un helicóptero de ataque está equipado con un cañón de 20 mm que dispara bombas de 130 g con una velocidad de orificio de 800 m/s. El helicóptero completamente cargado tiene una masa de 4 000 kg. Una andanada de 160 bombas se lanza en un período de 4,0 s. ¿Cuál es la fuerza promedio resultante sobre el helicóptero y en qué cantidad se reduce su velocidad hacia delante?

Resolución :

Masa del helicóptero = 4 000 kg



$\rightarrow$ $v_{bombas} = 800$ m/s

Masa de las bombas = 13×10^{-2} kg

$$F_{promedio} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow F_{promedio} = \frac{160 \times (13 \times 10^{-2})(8 \times 10^{2})}{4{,}0} = 4\,160 \text{ N}$$

Por otro lado: $P_{inicial} = P_{final}$

$$\Rightarrow 0 = M_H\,v_H + n\,m_B\,v_B$$

$$\Rightarrow v_{helicóptero} = \frac{-n\,m_B v_B}{M_H} = \frac{160 \times (13 \times 10^{-2}) \times 8 \times 10^{2}}{4 \times 10^{3}}$$

$$\therefore \vec{V}_H = -41{,}6\,\hat{i} \text{ m/s}$$

74. Un pequeño bloque de masa m_1 = 0,500 kg se suelta desde el reposo en la parte superior de una cuña curva sin fricción de masa m_2 = 3.00 kg, que está sobre una superficie horizontal sin fricción, como muestra la figura P9.74a. Cuando abandona la cuña, la velocidad del bloque es de 4,00 m/s hacia la derecha, como se ve en la figura **P9.74b**. a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después de que el bloque llega a la superficie horizontal? b) ¿Cuál es la altura *h* de la cuña?

74A. Un pequeño bloque de masa m_1 se suelta desde el reposo en la parte superior de una cuña curva sin fricción de masa m_2, que está sobre una superficie horizontal sin fricción como muestra la figura P9.74a. Cuando abandona la cuña, la velocidad del bloque es de v_1 hacia la derecha, como se ve en la figura P9.74b. a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después de que el bloque llega a la superficie horizontal? b) ¿Cuál es la altura *h* de la cuña?

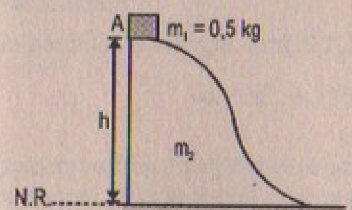


Figura P9.74a

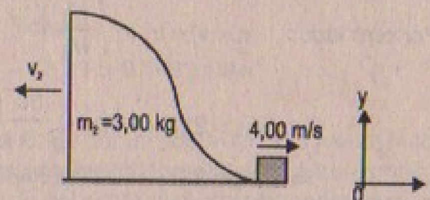


Figura P9.74b

Resolución :

$g = 9{,}81$ m/s²

Parte (a) $P_{inicial} = P_{final}$

$$0 = m_1\,v_1 + m_2\,v_2$$

$$\Rightarrow v_{cuña} = v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\,v_1 = -\left(\frac{0{,}5}{3}\right)(4{,}00)$$

$$\therefore \vec{V}_{cuña} = -0{,}67 \text{ m/s}$$

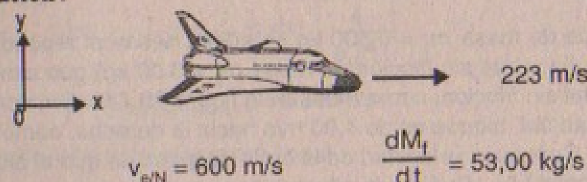
Parte (b)

Por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(4)^2}{2(9{,}81)} = 0{,}815 \text{ m}$$

75. Un avión jet se desplaza a 500 mi/h (223 m/s) en un vuelo horizontal. El motor toma aire a razón de 80,0 kg/s y quema combustible a una tasa de 3,00 kg/s. Si los gases de escape se expulsan a 600 m/s respecto de la aeronave, encuentre el empuje del motor jet y los caballos de potencia entregados.

Resolución :



$$v_{e/N} = 600 \text{ m/s} \qquad \frac{dM_f}{dt} = 53{,}00 \text{ kg/s}$$

$$\text{Empuje: } \left| v_e / \frac{dM}{dt} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \text{Empuje} = \left| (600 \text{ m/s}) \left(\frac{dM}{dt} \right) \right| \quad \Rightarrow \text{Empuje} = \left| (600 \text{ m/s})(53 \text{ kg/s}) \right|$$

$$\therefore \quad \text{Empuje} = 32 \text{ kN}$$

Por otro lado: $v_f - v_i = v_e \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$

$$\Rightarrow \quad v_f = 223 + 600 \ln \left(\frac{80}{3} \right)$$

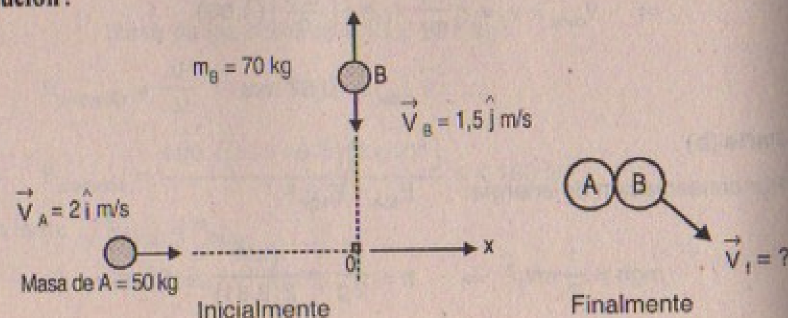
$$\Rightarrow \quad v_f = 223 + 600 \ln (26{,}67)$$

Finalmente:

Potencia = F.v = 32×10^3 (223 + 600 ln(26,67)) = 7,13 MW

76. Dos patinadores sobre hielo se aproximan uno al otro en ángulos rectos. El patinador A tiene una masa de 50,0 kg y viaja en la dirección $+x$ a 2,00 m/s. El patinador B tiene una masa de 70,0 kg y se mueve en la dirección $+y$ a 1,5 m/s. Chocan y se quedan unidos. Encuentre a) La velocidad final de la pareja, y b) La pérdida de energía cinética debida al choque.

Resolución :



Por choque inelástico: $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$

$$\Rightarrow \quad (50)(2)\hat{i} + 70(1{,}5)\hat{j} = (120)\ \vec{V}_f$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{final} = (0{,}83\hat{i} + 0{,}875\hat{j}) \text{ m/s}$$

Luego: $v_{final} = \sqrt{(0{,}83)^2 + (0{,}875)^2} \approx 1{,}206$ m/s

Parte (b)

Inicialmente: $E_{K\,inicial} = \frac{1}{2}(50)(2)^2 + \frac{1}{2}(70)(1{,}5)^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,inicial} = 178{,}75 \text{ joules}$$

Finalmente: $E_{K\,final} = \frac{1}{2}(70 + 50)(1{,}206)^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,final} = 87{,}27 \text{ joules}$$

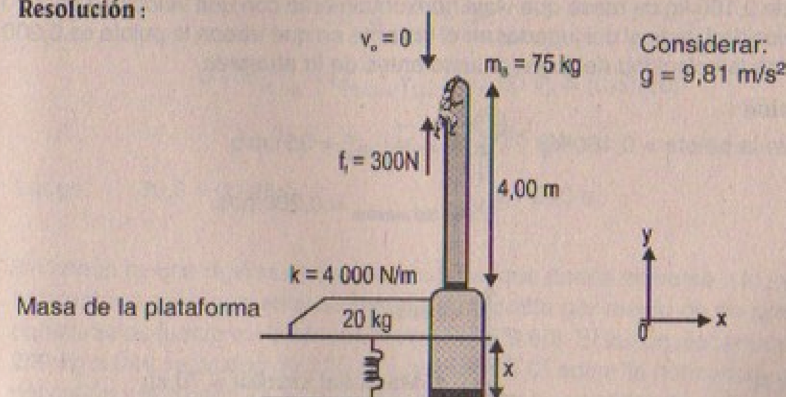
Por lo tanto:

La pérdida de energía será: $E_{K\,final} - E_{K\,inicial}$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_K = 178{,}75 - 87{,}27 = 91{,}48 \text{ joules}$$

77. Un bombero de 75 kg se desliza hacia abajo por un poste con una fuerza friccionante constante de 300 N que retarda su movimiento. Una plataforma horizontal de 20,0 kg es sostenida por un resorte en el pie del poste para amortiguar la caída. El bombero inicia su movimiento desde el reposo a 4,00 m sobre la plataforma, y la constante del resorte es 4 000 N/m. Determine, a) La velocidad del bombero justo antes de que choque con la plataforma, y b) La distancia máxima que se comprime el resorte. (Suponga que la fuerza friccionante actúa durante todo el movimiento).

Resolución :



Parte (a)

$m_B = 75 \times (9{,}81) = 735{,}75$ N



$f_{fricción} = 300$ N

Por energía: $\Delta E_M = W_{fricción}$

$\Rightarrow \quad E_{Kf} - (E_{Ki} + mgh) = -F_{fricción}\,(d)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_B \cdot v^2_{fB} - m_B\,gh = -300\,h \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(75)v^2_{fB} - (75)(9{,}81)(4) = -300(4)$

$\therefore \quad v^2_{fB} = \left[\dfrac{75(4)(9{,}81)-300(4)}{75}\right]^2 \qquad \therefore \; v_{f\,bombero} = 6{,}82$ m/s

Parte (b)

Por cantidad de movimiento: $P_{inicial} = P_{final}$

$\Rightarrow \quad (6{,}82)(75) = (75 + 20)\,v_{inicial\,del\,sistema}$

$\therefore \quad v_{i.sistema} = 5{,}38$ m/s

Por otro lado: $\Delta E_M = W_{fricción}$

$\Rightarrow \quad E_{K\,f\,sistema} = \frac{1}{2}k(x)^2 - E_{K\,inicial\,del\,sistema} = -f_f\,(x)$

$\Rightarrow \quad 0 + \frac{1}{2}(4\,000)x^2 - \frac{1}{2}(95)(5{,}38)^2 + 300(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 2\,000x^2 + 300x - 1\,375 = 0$

$\therefore \quad x = 0{,}76$ m

78. Un jugador de beisbol de 70 kg salta verticalmente hacia arriba para atrapar una pelota de 0,160 kg de masa que viaja horizontalmente con una velocidad de 35,0 m/s. Si la velocidad vertical del jugador en el instante en que atrapa la pelota es 0,200 m/s, determine la velocidad del jugador justo antes de la atrapada.

Resolución:

Masa de la pelota = 0,160 kg

$\vec{V}_{pelota} = 35\,\hat{i}$ m/s

$v_{final\,del\,sistema} = 0{,}200$ m/s

$\vec{V}_{inicial} = ?$



N.R. Masa del jugador = 70 kg

$P_{inicial} = P_{final}$

$\Rightarrow \quad M_j \vec{V}_i\,\hat{j} + M_p\,35\,\hat{i} = (M_j + M_p)(\vec{V}_f)$

$\Rightarrow \quad 70\vec{V}_i\,\hat{j} + (0{,}16)(35)\,\hat{i} = (70{,}16)\,\vec{V}_f$

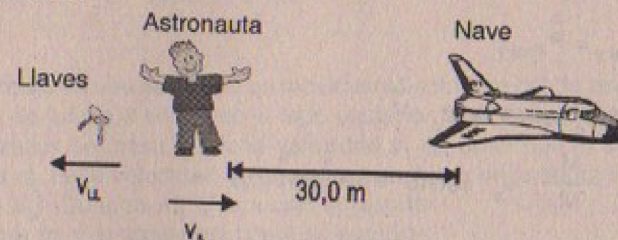
$\Rightarrow \quad \vec{V}_f = \dfrac{70}{70{,}16}\,\vec{V}_i\,\hat{j} + \dfrac{5{,}6}{70{,}16}\,\hat{i}$

Pero sabemos: $v_f = \sqrt{\left(\dfrac{70}{70{,}16}\right)^2 v_i^2 + \left(\dfrac{5{,}6}{70{,}16}\right)^2} = 0{,}2$

$\therefore \quad v_{inicial\,del\,jugador} = 0{,}184$ m/s

79. Un astronauta de 80 kg trabaja en los motores de su nave, la cual deriva por el espacio con velocidad constante. El astronauta, que desea una mejor vista del universo, se impulsa contra la nave y después se encuentra a sí mismo 30,0 m detrás de la nave. Sin un medio de impulsión, la única manera de regresar a la nave es lanzar su llave de tuercas de 0,500 kg lejos de la nave. Si lanza la llave con una velocidad de 20,0 m/s, ¿cuánto tarda el astronauta en llega a la nave?

Resolución:



Por conservación de la cantidad de movimiento

$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$

$0 = M_A\,v_A - M_{llaves}\,v_{LL} \;\Rightarrow\; 80\,v_A = (0{,}5)(20)$

$\therefore \quad v_{astronauta} = 0{,}125$ m/s

Luego: $30{,}0 = 0{,}125\,t \qquad \therefore \; t = 240$ s

80. Un cañón se une rígidamente a una cureña, que puede moverse a lo largo de rieles horizontales pero que está conectada a un poste por medio de un gran resorte de constante de fuerza $k = 2{,}00 \times 10^4$ N/m (Fig. P9.80). El cañón dispara un proyectil de 200 kg a una velocidad de 125 m/s dirigido 45,0° sobre la horizontal. a) Si la masa del cañón y la cureña es de 5 000 kg, encuentre la velocidac de retroceso del cañón.

b) Determine la extensión máxima del resorte. c) Considere el sistema compuesto del cañón, la cureña y el proyectil. ¿El momento de este sistema es constante durante el disparo? ¿Por qué sí y por qué no?

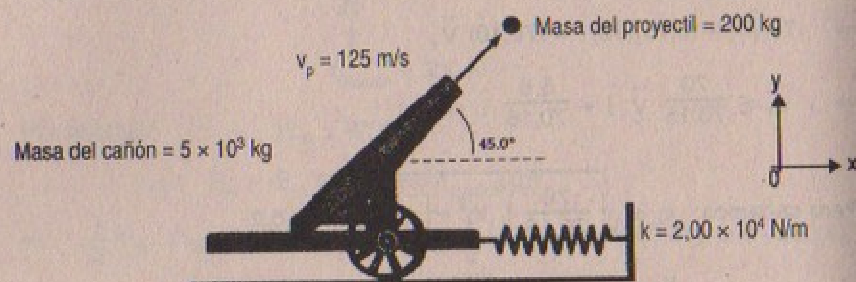


Figura P9.80

Resolución :

Parte (a) $\vec{P}_{\text{inicial }x} = \vec{P}_{\text{final }x}$

$$\Rightarrow \quad 0 = M_c\,\vec{V}_c + v_p \cos 45° \times M_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_c = -\frac{M_p}{M_c}\,.\,v_p \cos 45° = -3{,}536\ \hat{i}\ \text{m/s}$$

$$\vec{P}_{\text{inicial }y} = \vec{P}_{\text{final }y}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = M_p\,v_p\,\text{sen}45° + M_c\,.\,\vec{V}_c$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_c = -\frac{M_p}{M_c}\,.\,v_p\,.\,\text{sen}45° = -3{,}536\,\hat{j}\ \text{m/s}$$

En consecuencia: $\vec{V}_{\text{cañón}} = (-3{,}536\,\hat{i} - 3{,}536\,\hat{j})\ \text{m/s}$

Entonces: $v_{\text{cañón}} = \sqrt{(-3{,}536)^2 + (-3{,}536)^2} \approx 4{,}99 \approx 5\ \text{m/s}$

Parte (b) $E_{K\,\text{final}} = U_{P\,\text{elástica}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M_c v_c^2 + 0 = \frac{1}{2}k\,x^2 \quad \Rightarrow \quad 5000\,(5)^2 + 0 = (2 \times 10^4)\,x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{5000 \times (2^4)}{2 \times 10^4}} = 2\ \text{m}$$

Parte (c)

Durante el proceso existe un par de fuerzas de acción y reacción por consiguiente hay conservación en el momento. La fuerza del resorte es interna, y por lo tanto no interviene en la cureña y el cañón.

81. La figura P9.81a muestra una cadena de longitud L y masa total *M* que se suelta desde el reposo con su extremo inferior que toca la superficie de la cubierta de una mesa. Encuentre la fuerza ejercida por la mesa sobre la cadena después de que ésta ha descendido una distancia x, como se ve en la figura P9.81b. (Suponga que cada eslabón queda en reposo en el instante que llega a la mesa).

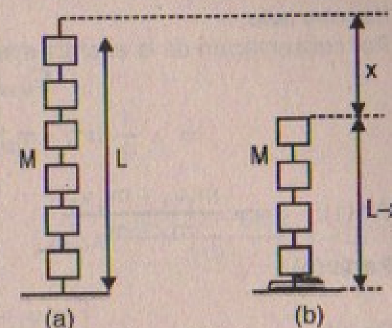


Figura P9.81

Resolución :

$$y_{\text{CM inicial}} = y_{\text{CM final}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{2} = \frac{m_1(x) + m_2\left(\frac{L+x}{2}\right)}{M} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2} \qquad \therefore\ L = 2x$$

Luego: $\vec{F}_{\text{ejercida}} = \frac{Mgx}{L} + \frac{MgL}{L} = \frac{Mgx}{L} + \frac{2Mgx}{L}$

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{ejercida por la mesa}} = \frac{3Mgx}{L}\,\hat{j}$$

82. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre un riel de aire. Un resorte de constante de fuerza *k* se fija en el lado posterior de uno de los deslizadores. El primer deslizador de masa m_1 tiene velocidad $\mathbf{v}_1$ en tanto que el segundo deslizador de masa m_2 tiene velocidad $\mathbf{v}_2$, como se puede ver en la figura P9.82 ($\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$). Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2 y lo comprime hasta su compresión máxima x_m, la velocidad de los deslizadores es **v**. En función de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, m_1, m_2 y *k*, encuentre. a) La velocidad **v** en la compresión máxima, b) La compresión máxima x_m, y c) Las velocidades de cada deslizador después de que m_1 ha perdido contacto con el resorte.

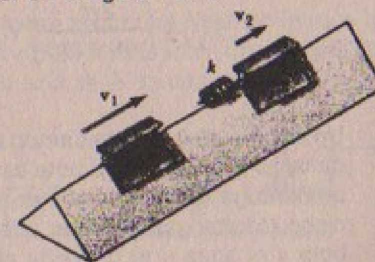


Figura P9.82

Resolución :

Parte (a)

Por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{P}_{\text{inicial}} = \vec{P}_{\text{final}}$$

$$\Rightarrow \quad m_1\,v_1 + m_2\,.\,v_2 = (m_1 + m_2)\,.\,v \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado:
Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 = \frac{1}{2}kx^2_m \quad \text{... (2)}$$

De (1): $\quad v = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$

Parte (b)

De (2): $$(m_1 + m_2)\left[\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\right]^2 = k\,.\,x^2_M$$

$$\Rightarrow \quad \frac{[(m_1v_1)+(m_2v_2)]^2}{(m_1+m_2)\,k} = x^2_M \qquad \therefore \quad x_M = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{k\,(m_1+m_2)}\sqrt{k(m_1+m_2)}$$

Parte (c) $\quad P_{inicial} = P_{final}$ (después de que se unen)

$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\,v = m_1\,v_{f1} + m_2\,v_{f2}$

$\Rightarrow \quad m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = m_1\,v_{f1} + m_2\,v_{f2}$ (choque perfectamente elástico)

Por otro lado: $\quad E_{K\,inicial} = E_{K\,final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\,v_{f_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\,v_{f_2}^2$$

$$\therefore \quad v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

83. Un niño de 40,0 kg está parado en un extremo de un bote de 70,0 kg que mide 4,00 m de largo (Fig. P9.83. El bote está inicialmente a 3,00 m del muelle. El niño observa una tortuga sobre una roca en el otro extremo del bote y comienza a caminar hacia dicho extremo para atrapar a la tortuga. Ignore la fricción entre el bote y el agua y a) describa el movimiento subsecuente del sistema (niño + bote).
b) ¿Dónde está el niño *respecto del muelle* cuando él alcanza el otro extremo del bote?
c) ¿Atrapará el niño a la tortuga? (Suponga que él puede alcanzar una distancia de 1,00 m fuera del bote desde el extremo de éste).

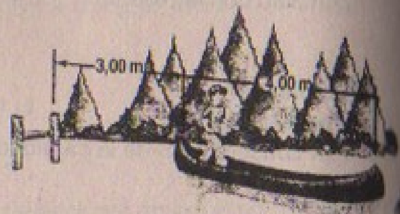
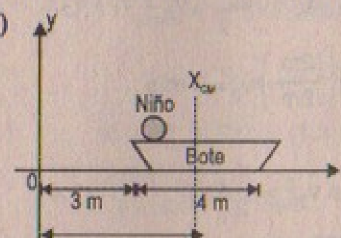


Figura P9.83

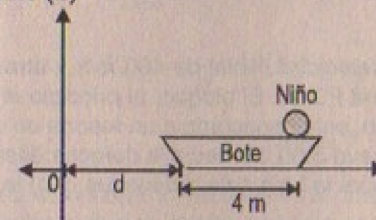
Resolución :83
Masa del niño = 40 kg ; masa del bote = 70 kg

Parte (a)



$$x_{CM} = \frac{(40)(3)+70(5)}{110} = 4{,}273 \text{ m}$$

Parte (b)



$$x_{CM} = \frac{40(4+d)+70(2+d)}{110}$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}273 = \frac{160+40d+140+70d}{110}$$

$\therefore \quad d = 1{,}546$ (el niño estará con respecto del muelle a 1,546 + 4 = 5,546 m)

Parte (c)
Cuando el niño alcanza el otro extremo del bote, el bote se ha movido una distancia de 1,546 m (hacia el muelle), esto quiere decir, que para que el niño pueda alcanzar o atrapar a la tortuga necesita tener un alcance de 1,454; lo cual no puede ser posible.

En conclusión: "No atrapará a la tortuga"

84. Dos carritos de igual masa, m = 0,250 k, se colocan sobre una pista sin fricción que tiene un resorte ligero de constante de fuerza k = 50,0 N/m unido a un extremo de la pista, como muestra la figura P9.84. Al carrito azul se le da una velocidad inicial de v_0 = 3,00 m/s hacia la derecha y el otro carrito está inicialmente en reposo. Si los carros chocan elásticamente, encuentre a) la velocidad de cada uno justo después del primer choque, y b) la compresión máxima en el resorte.

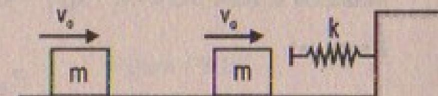


Figura P9.84

Resolución :

m = 0,250 kg ; k = 50,0 N/m ; v_0 = 3,00 m/s

Parte (a) $\quad P_{inicial} = P_{final}$

$$\Rightarrow \quad m\,v_0 + 0 = m\,v_1 + m\,v_2 \qquad \Rightarrow \quad v_0 = v_1 + v_2 \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{1}{2}m\ v_1^2 + \frac{1}{2}m\ v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad ...(2)$$

En conclusión: $v_{1f} = 0 \ \wedge \ v_{2f} = \left(\frac{2m}{2m}\right) v_0 = 3\ m/s$

Parte (b)

Por conservación de energía: $\frac{1}{2} m\ v_{2f}^2 = \frac{1}{2} kx^2$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{(3)^2}{(50)}} = 0{,}424\ m$$

85. Una bala de 5,00 g se mueve con una velocidad inicial de 400 m/s y atraviesa un bloque de 1,00 kg, como se ve en la figura P9.85. El bloque, al principio en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, está conectado a un resorte de constante de fuerza 900 N/m. Si el bloque se mueve 5,00 cm hacia la derecha después del impacto, encuentre a) la velocidad a la cual la bala sale del bloque, y b) la energía perdida en el choque.

85A. Una bala de masa *m* se mueve con una velocidad inicial v_0 y atraviesa un bloque de masa *M*, como en la figura P9.85. El bloque, al principio en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, está conectado a un resorte de constante de fuerza *k*. Si el bloque se mueve una distancia *d* hacia la derecha después del impacto, encuentre a) la velocidad a la cual la bala sale del bloque, y b) la energía perdida en el choque.

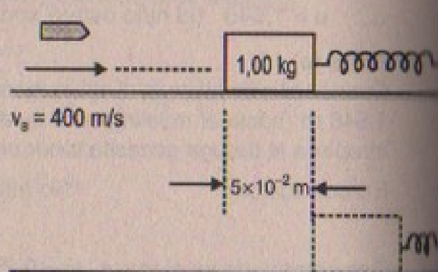


Figura P9.85

Resolución :

Masa de la bala = 5×10^{-3} kg ; k = 900 N/m

Parte (a)

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$$\Rightarrow (5 \times 10^{-3}\ kg)(400\ m/s) + 0 = (v_{bloque})(1) + (v_{f\ bala})(5 \times 10^{-3}) \quad ...(1)$$

Por otro lado:

Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{bloque}\ v^2_{bloque} = \frac{1}{2} k(5 \times 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(1)\ v^2_{bloque} = \frac{1}{2}(900)(25) \times 10^{-4}$$

$$\therefore \quad v_{bloque} = 1{,}5\ m/s \quad ...(2)$$

(2) en (1): $(5 \times 10^{-3})(400) = (1{,}5)(1) + v_{f\ bala}(5 \times 10^{-3})$

$$\Rightarrow \quad \frac{2{,}00 - 1{,}5}{5 \times 10^{-3}} = v_{f\ bala} \quad \therefore \quad v_{final\ bala} = 100\ m/s$$

Parte (b)

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-3})(4 \times 10^2)^2 = 400\ joules$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}(1)(1{,}5)^2 + \frac{1}{2}(5 \times 10^{-3})(100)^2 = 26{,}125\ joules$$

$$\therefore \quad E_{pérdida} = \Delta E = 373{,}875\ joules$$

86. Una estudiante efectúa un experimento de péndulo balístico utilizando un aparato similar al que se ilustra en la figura 9.11b. Obtiene los siguientes datos promedio: h = 8,68 cm, m_1 = 68,8 g y m_2 = 263 g. a) Determine la velocidad inicial v_{1i} del proyectil. b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1i} lanzando el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo eliminado de la trayectoria), midiendo su desplazamiento horizontal x, y su desplazamiento vertical, y (Fig. P9.86). Muestre que la velocidad inicial de este proyectil se relaciona con *x* e *y* mediante la relación

$$v_{1i} = \frac{x}{\sqrt{2y/g}}.$$

¿Qué valor numérico obtiene la estudiante para v_{1i} a partir de sus valores medidos de x = 257 cm y y = 85,3 cm? ¿Qué factores deben tomarse en cuenta para la diferencia en este valor comparado con el obtenido en el inciso a)?

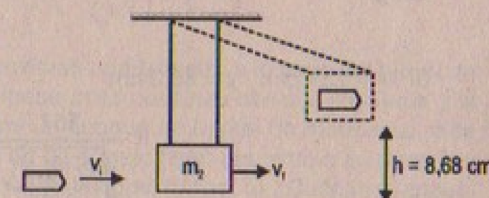


Figura P9.86

Resolución :

Considerar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

Datos: $m_1 = 68{,}8$ g

$m_2 = 263$ g

Parte (a) $P_{inicial} = P_{final}$

$$\Rightarrow \quad m_1\ v_i + 0 = (m_1 + m_2)\ v_f \quad ...(1)$$

Por otro lado: (por conservación de energía)

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ v_f^2 = (m_1 + m_2)(g)h \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$m_1 v_{inicial} = (m_1 + m_2)\sqrt{2gh}$$

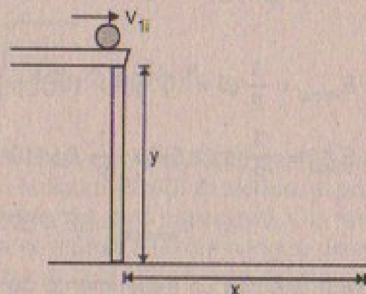
$$\Rightarrow \quad (68{,}8 \times 10^{-3})\, v_{inicial} = (331{,}8 \times 10^{-3})\sqrt{2(9{,}81)(8{,}68 \times 10^{-2})}$$

$$\therefore \; v_{inicial\ de\ la\ bala} = 6{,}29 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Por demostrar:

$$v_{1i} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2y}{3}}}$$



Por movimiento de proyectiles: $y = \frac{1}{2}gt^2$

$$x = v_{1i} \times t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_{1i}}$$

Luego: $y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{1i}}\right)^2 \qquad \therefore \; v_{1i} = \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{2y}{g}}}$ l.q.q.d.

Si $x = 257$ cm; $y = 85{,}3$ cm

$$\Rightarrow \; v_{1i} = \frac{257}{\sqrt{\dfrac{2(85{,}3)}{9{,}81}}} \approx 61{,}63 \text{ m/s}$$

La fuerza del aire y la tensión en el bloque, así mismo el peso del bloque.

87. Dos partículas, de masas *m* y 3*m*, se aproximan una a la otra a lo largo del eje *x* con las mismas velocidades iniciales v_0. La masa *m* se mueve hacia la izquierda y la masa 3*m* lo hace hacia la derecha. Chocan de frente y cada una rebota a lo largo de la misma línea en la que se aproximaba. Encuentre las velocidades finales de las partículas.

Resolución:



En esta colisión se produce un choque elástico, por consiguiente se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética, luego:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad 3m\, v_o\hat{i} - m\, v_o\hat{i} = 3m\, \vec{V}_{f1} + m\vec{V}_{f2}$$

$$\Rightarrow \quad 3v_o\,\hat{i} - v_o\,\hat{i} = 3\vec{V}_{f1} + \vec{V}_{f2} \qquad \dots (1)$$

Por otro lado: $E_{K\ inicial} = E_{K\ final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3m)v_0^2 + \frac{1}{2}m\,(v_0)^2 = \frac{1}{2}(3m)\,v_{f1}^2 + \frac{1}{2}(m)v_{f2}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}v_o^2 + \frac{1}{2}v_o^2 = \frac{3}{2}v_{f1}^2 + \frac{1}{2}v_{f2}^2 \qquad \dots (2)$$

Luego efectuando operaciones resulta que:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \;\Rightarrow\; v_{1f} = \left(\frac{2m}{4m}\right)v_o - \left(\frac{2m}{4m}\right)v_o$$

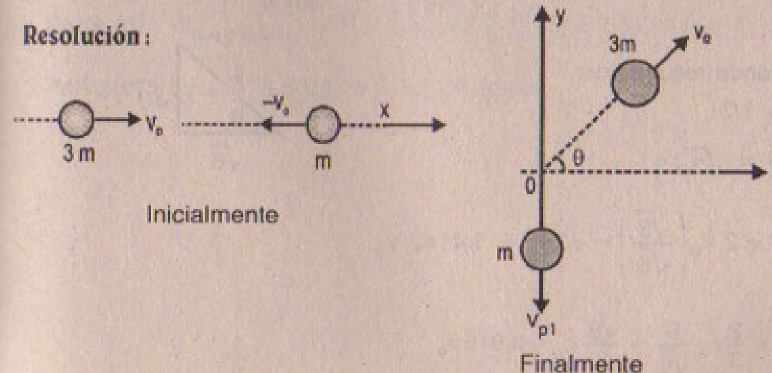
$$\therefore \; v_{1f} = 0$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \;\Rightarrow\; v_{2f} = \left(\frac{6m}{4m}\right)v_o - \left(\frac{2m}{4m}\right)v_o$$

$$\therefore \; v_{2f} = 2v_o$$

88. Dos partículas, de masas *m* y 3*m* se aproximan una a la otra a lo largo del eje *x* con las mismas velocidades iniciales v_0. La masa *m* se desplaza hacia la izquierda y la masa 3*m* hacia la derecha. Experimentan un choque no frontal de modo que *m* se mueve hacia abajo después del choque en un ángulo recto respecto a su dirección inicial. a) Encuentre las velocidades finales de las dos masas. b) ¿Cuál es el ángulo θ al cual se desvía 3*m*?

Resolución:



Inicialmente

Finalmente

Parte (a) $\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$

$\Rightarrow \quad 3m\,(v_o)\,\hat{i} - m\,v_o\,\hat{i} = 3m\,v_{f_2}\cos\theta\,\hat{i}$

$\Rightarrow \quad 2v_o = 3\,v_{f_2}\cos\theta \qquad ....(1)$

$\vec{P}_{inicial\ y} = \vec{P}_{final\ y}$

$\Rightarrow \quad 0 = 3m\,v_{f_2}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j} - m\,v_{f_1}\,\hat{j}$

$\Rightarrow \quad v_{f_1} = 3\,v_{f_2}\,\text{sen}\,\theta \qquad ....(2)$

Por otro lado: $E_{K\ inicial} = E_{K\ final}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3m)v_o^2 + \frac{1}{2}m(-v_o)^2 = \frac{1}{2}(3m)\,v_{f_2}^2 + \frac{1}{2}m\,v_{f_1}^2$

$\Rightarrow \quad 2v_o^2 = \frac{3}{2}v_{f_2}^2 + \frac{1}{2}v_{f_1}^2$

$\Rightarrow \quad 4v_o^2 = 3v_{f_2}^2 + v_{f_1}^2 \qquad ....(3)$

Asimismo:

Sabemos que: De (1) $\quad v_{f_2} = \dfrac{-2v_o}{3\cos\theta}$

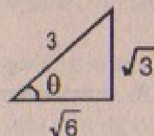
De (2) $\quad v_{f_1} = 3\,\text{sen}\theta\,v_{f_2} = 2v_o\tan\theta$

Entonces de (3): $\quad 4\,v_o^2 = 3\left[\dfrac{2v_o}{3\cos\theta}\right]^2 + \left[\dfrac{2\,v_o\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right]^2$

Desarrollando resulta que:

$\cos 2\theta = 1/3$

$\therefore \quad \text{sen}\,\theta = \sqrt{3}/3$



$\therefore \quad v_{f_1} = 2\,v_o\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{2}\,v_o = 1{,}4142\,v_o$

$v_{f_2} = \dfrac{2}{3}v_o\,\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}v_o = 0{,}816\,v_o$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \quad \theta = \text{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/3\right) = \text{arc sen}\left(\sqrt{3}/3\right)$

89. De una tolva estacionaria cae arena sobre una banda transportadora a una tasa de 5,0 kg/s, como muestra la figura P9.89. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción y se mueve a 0,75 m/s bajo la acción de una fuerza externa horizontal F_{ext}, suministrada por el motor que mueve la banda. Determine, a) la tasa de cambio del momento de la arena en la dirección horizontal, b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, c) la magnitud de F_{ext}, d) el trabajo efectuado por F_{ext} en un segundo, y e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. f) ¿Por qué la respuesta a la pregunta d) es diferente de la respuesta a la pregunta e)?

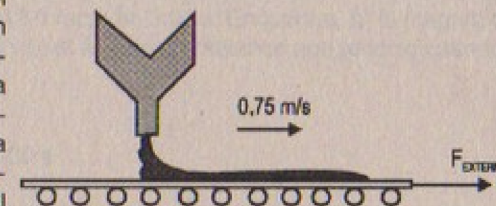


Figura P9.89

Resolución:

Parte (a) $\quad \dfrac{p}{t} = \left(5{,}0\,\dfrac{kg}{s}\right)\left(0{,}75\,\dfrac{m}{s}\right) = 3{,}75\ kg\,.\,m/s^2$

Parte (b) La fuerza de fricción: 2,75 N

Parte (c) La fuerza externa $= \dfrac{p}{t} = 3{,}75$ N

Parte (d) $W_{fuerza\ externa} = F \times d = 3{,}75 \times (0{,}75) = 2{,}81$ joules

Parte (e) $E_K = \frac{1}{2}(5{,}0)(0{,}75)^2 = 1{,}4$ joules

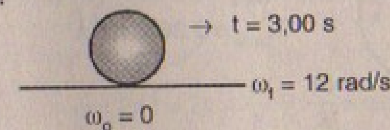
Capítulo 10

ROTACIÓN DE UN OBJETO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

CINEMÁTICA ROTACIONAL: MOVIMIENTO ROTACIONAL CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

1. Una rueda inicialmente en reposo empieza a girar con una aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 12,0 rad/s en 3,00 s. Encuentre, a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda, y b) el ángulo en radianes que recorre cuando gira en este tiempo.

Resolución :



Parte (a)

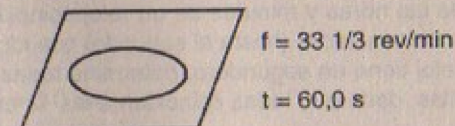
$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\omega_f}{t} = \dfrac{12 \text{ rad/s}}{3{,}00 \text{ s}} = 4 \text{ rad/s}^2$

Parte (b) $\quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2$

$\Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \Delta\theta = \dfrac{1}{2}(4)(3)^2 = 18 \text{ rad} \equiv 1\,031{,}3°$

2. La tornamesa de un tocadiscos gira a razón de 33 1/3 rev/min y tarda 60,0 s en detenerse cuando se apaga. Calcule: a) la magnitud de su aceleración angular, y b) el número de revoluciones que realiza antes de detenerse.

Resolución :



Parte (a)

$\omega_f = \omega_i + \alpha . t \qquad$ pero $\omega_i = 2\pi . f \Rightarrow \omega_i = 2\pi\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{10}{9}\pi$ rad/s

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\omega_i}{t} = \dfrac{\dfrac{10}{9}\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}}{60 \text{ s}}$

$\therefore \quad \alpha = -\pi/54 \text{ rad/s}^2 = 0{,}058 \text{ rad/s}^2$

Parte (b)

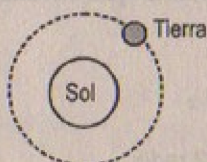
$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \;\Rightarrow\; \theta - \theta_0 = \Delta\theta = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{10}{9}\right)\pi(60)$$

$$\therefore \quad \Delta\theta = \frac{100\pi}{3}\ \text{rad}$$

Luego el n.° de revoluciones será: $\dfrac{\frac{100}{3}\pi}{2\pi} = \dfrac{50}{3}$ revoluciones

3. ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo de: a) la Tierra en su órbita alrededor del Sol y b) de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra?

Resolución:



$T_{Tierra} = 3{,}156 \times 10^7$ s

$T_{Luna} = 2{,}36 \times 10^6$ s

Parte (a)

$$\omega_{Tierra} = 2\pi.f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}156\times10^7} = \frac{2(3{,}1416)}{3{,}156\times10^7} = 1{,}99 \times 10^{-7}\ \text{rad/s}$$

Parte (b)



$T = 2{,}36 \times 10^6$ s

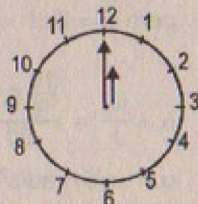
$$\Rightarrow \quad \omega_{Luna} = 2\pi\,.\,f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}36\times10^6} = \frac{2\,(3{,}1416)}{2{,}36\times10^6} = 2{,}66 \times 10^{-6}\ \text{rad/s}$$

4. a) Las manecillas de las horas y minutos de un reloj coinciden a las 12 en punto. Determine todas las demás veces (hasta el segundo) cuando estas dos manecillas coinciden. b) Si el reloj tiene un segundero, determine todas las veces que coinciden las tres manecillas, dado que todas coinciden a las 12 en punto.

Resolución:

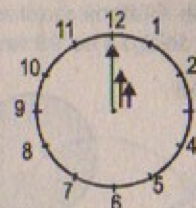
Parte (a)

12:00 (a.m.; p.m.) ; 1:05 (a.m.; p.m.) ;
2:10 (a.m.; p.m.) ; 3:15 (a.m.; p.m.)
4:20 (a.m.; p.m.) ; 5:25 (a.m.; p.m.) ;
6:30 (a.m.; p.m.) ; 7:35 (a.m.; p.m.)
8.40 (a.m.; p.m.) ; 9:45 (a.m.; p.m.) ;
10:50 (a.m.; p.m.) ; 11:55 (a.m.; p.m.)



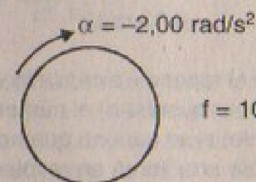
Parte (b)

12:00 (a.m.; p.m.) ; 1:05,05 (a.m.; p.m.);
2:10,10 (a.m.; p.m.) ; 3:15,15 (a.m.; p.m.)
4:20,20 (a.m.; p.m.) ; 4:25,25 (a.m.; p.m.);
5:30,30 (a.m.; p.m.) ; 7:35,35 (a.m.; p.m.)
8:40,40 (a.m.; p.m.) ; 9:45,45 (a.m.; p.m.)
10:50,50 (a.m.; p.m.); 11:55,55 (a.m.; p.m.)



5. Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molienda a 100 rev/min se apaga. Suponiendo aceleración angular constante negativa de 2,00 rad/s² de magnitud. a) ¿Cuánto tarda la rueda en detenerse? b) ¿Cuántos radianes gira durante el tiempo encontrado en a)?

Resolución:



$\alpha = -2{,}00\ \text{rad/s}^2$

$f = 100\ \text{rev/min} = \dfrac{5}{3}\ \text{rev/s}$

Parte (a) $\quad \omega = 2\pi f = 2\pi \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{3}\pi\ \text{rad/s}$

$\Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i - \alpha(t)$

$\Rightarrow \quad 0 = \dfrac{10}{3}\pi - (2{,}0)t \quad \therefore \quad t = \dfrac{5}{3}\pi\ \text{s} = 5{,}236\ \text{s}$

Parte (b) $\quad \Delta\theta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10}{3}\right)(5{,}236)\pi = 8{,}7267\ \pi\ \text{rad}$

$\therefore$ n.° radianes = 27,4 radianes

6. La posición angular de un punto sobre una rueda se describe por medio de $\theta = 5{,}0 + 10t + 2{,}0t^2$ rad. Determine la posición, velocidad y aceleración angulares del punto en t = 0 y t = 3,0 s.

Resolución:

Sea: $\theta(t) = 5{,}0 + 10t + 2{,}0\ t^2$ rad

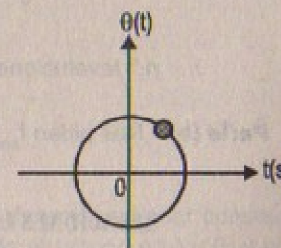
Entonces: $\theta(0) = 5{,}0$ rad
$\theta(3) = 53$ rad

$$\omega = \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 10 + 4{,}0\ t$$

$\Rightarrow \quad \omega = (0) = 10\ \text{rad/s} \ \wedge\ \omega(3) = 22\ \text{rad/s}$

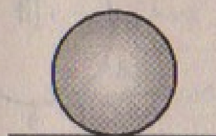
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4{,}0\ \text{rad/s}^2$$

$\therefore \quad \alpha(0) = \alpha(3) = 4{,}0\ \text{rad/s}^2$ (constante)



7. Una rueda rotatoria requiere 3,0 s para girar 37 rev. Su velocidad angular al final del intervalo de 3,0 s es 98 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular constante?

Resolución:



$t = 3{,}0\ s$

$f = \dfrac{37\ rev}{3{,}0\ s} = \dfrac{37}{3}\ rev/s$

$\omega_f = 98\ rad/s$

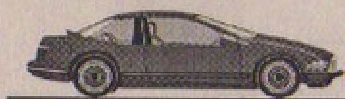
$\omega_i = 2\pi f = 2(3{,}1416)\left(\dfrac{37}{3}\right) = 77{,}5\ rad/s$

$\Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i + \alpha . t$

$\Rightarrow \quad 98 = 77{,}5 + \alpha(3) \qquad \therefore \quad \alpha = 6{,}83\ rad/s^2$

8. Un auto acelera uniformemente desde el reposo y alcanza la velocidad de 22 m/s en 9 s. Si el diámetro de la llanta es 58 cm, encuentre a) el número de revoluciones que la llanta realiza durante este movimiento, si se supone que no hay deslizamiento. b) ¿Cuál es la velocidad rotacional final de una llanta en revoluciones por segundo?

Resolución:



$t = 9\ s \qquad R = 0{,}29\ m$

$\rightarrow \quad v_o = 0 \qquad v_f = 22\ m/s$

Parte (a)
Sabemos que: $v = \omega . R$

$\Rightarrow \quad 22 = (\omega)(0{,}29) \qquad \therefore \quad \omega_f = 75{,}86\ rad/s$

por otro lado $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad 75{,}86 = 2\pi f$

$\therefore \quad f = 12{,}07\ rev/s$

entonces $\quad \theta - \theta_0 = \Delta\theta = \dfrac{1}{2}(75{,}86)(9) = 341{,}37\ rad$

$\therefore \quad n.^\circ\ revoluciones = \dfrac{(341{,}37)(360)}{6{,}2832} = 54{,}3\ revoluciones$

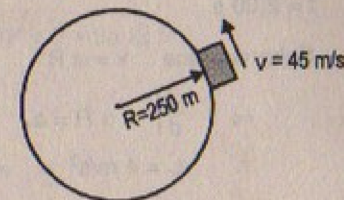
Parte (b) Nos piden $f_{angular} = 12{,}07\ rev/s$

RELACIONES ENTRE CANTIDADES ANGULARES Y LINEALES

9. Un carro de carreras viaja sobre una pista circular de 250 m de radio. Si el auto se mueve con velocidad lineal constante de 45,0 m/s, encuentre a) su velocidad angular y b) la magnitud y dirección de su aceleración.

9A. Un carro de carreras viaja sobre una pista circular de radio R. Si el auto se mueve con velocidad lineal constante v, encuentre a) su velocidad angular y b) la magnitud y dirección de su aceleración.

Resolución:



Parte (a) $\quad v = \omega . R \quad \Rightarrow \quad 45 = \omega\ (250)$

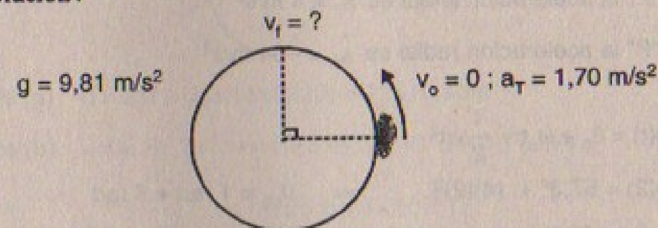
$\therefore \quad \omega = 0{,}18\ rad/s$

Parte (b) $\quad a_R = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{45 \times 45}{250} = 8{,}1\ m/s^2$

$a_T = \dfrac{d|v|}{dt} = 0 \qquad \therefore \quad |a| = 8{,}1\ m/s^2$

10. Un auto que viaja sobre una pista circular plana (no peraltada) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de 1,70 m/s². El auto hace lo anterior durante un cuarto del trayecto en círculo antes de patinar y salir de la pista. Determine el coeficiente de fricción estática entre el auto y la pista.

Resolución:



$F_{fricción} = F_{tangencial}$

Por otro lado: $\quad F_{fricción} = \mu_e . Normal = \mu_e\, mg$

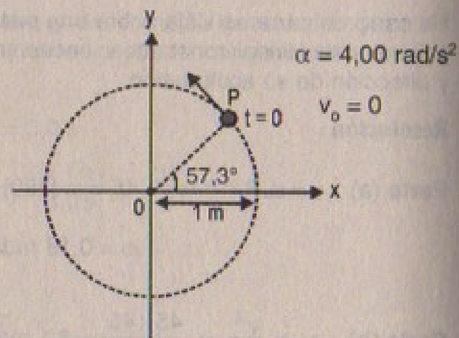
$\Rightarrow \quad m\, a_T = \mu_e\, mg$

$\therefore \quad \mu_e = \dfrac{a_T}{g} = \dfrac{1{,}7\ m/s^2}{9{,}8\ m/s^2} = 0{,}173$

11. Una rueda de 2,00 m de diámetro gira con una aceleración angular constante de 4,00 rad/s². La rueda empieza su movimiento desde el reposo en t = 0, y el radio vector en el punto P sobre el borde de la rueda forma un ángulo de 57,3° con la horizontal en este tiempo. En t = 2,00 s, encuentre a) la velocidad angular de la rueda, b) la velocidad y aceleración lineales del punto P, y c) la posición del punto P.

Resolución :

Parte (a)



t = 2,00 s

Sabemos que $v = \omega.R$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dt} = \alpha.R = a_T$

$\therefore \quad a_T = 4\ m/s^2$

$\Rightarrow \quad v_f = v_0 + a_T\ .\ t$

$\Rightarrow \quad v_f = (4)(2) = 8\ m/s$

Luego: $v = \omega.R \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{8}{1} = 8\ rad/s$

Parte (b) $a_{lineal} = a_T = 4\ m/s^2$

En el punto "P" la velocidad lineal es igual a "cero"

En el punto "P" la aceleración lineal es $\vec{a}_T = 4\ m/s^2$

En el punto "P" la aceleración radial es $\vec{a}_R = -64\ m/s^2$

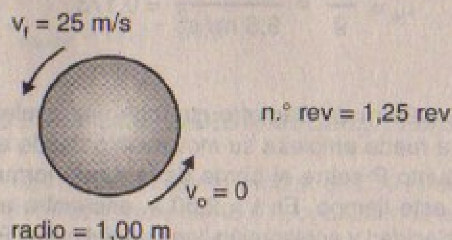
Parte (c) $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$

$\Rightarrow \quad \theta(2) = 57{,}3° + (4)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{(2)} = 1\ rad + 8\ rad$

$\therefore \quad \theta(2) = 9{,}00\ rad$

12. Un lanzador de disco acelera un disco desde el reposo hasta una velocidad de 25,0 m/s haciéndolo girar 1,25 rev. Suponga que el disco se mueve sobre el arco de un círculo de 1,00 m de radio. a) Calcule la velocidad angular del disco. b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, suponiendo que será constante. c) Calcule el tiempo de aceleración.

Resolución :



Parte (a) $1{,}25\ rev = \dfrac{\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta = 2{,}5\ \pi.rad$

$v_f = \omega.R \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{25}{1} = 25\ rad/s$

Parte (b) $\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,(\theta) \quad \Rightarrow \quad (25)^2 = 0 + 2\alpha\,(2{,}5\pi)$

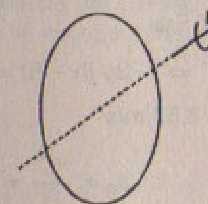
$\therefore \quad \alpha = 39{,}8\ rad/s^2$

Parte (c) $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$

$\Rightarrow \quad 25 = (39{,}8)\ t \quad \therefore \quad t = 0{,}63\ s$

13. Un disco de 8,00 cm de radio gira a una tasa constante de 1 200 rev/min alrededor de su eje central. Determine a) su velocidad angular, b) la velocidad lineal en un punto a 3,00 cm de su centro, c) la aceleración radial de un punto sobre el borde del disco, y d) la distancia total a un punto sobre el borde que se mueve en 2,00 s.

Resolución :



radio = 8×10^{-2} m

f = 20 rev/s

Parte (a) $\omega = 2\pi f = 2(3{,}1416)(20) = 125{,}6\ rad/s$

Parte (b) $v = \omega.R \quad \Rightarrow \quad v = (125{,}6)(3 \times 10^{-2}) = 3{,}77\ m/s$

Parte (c) $\vec{a}_r = -\dfrac{v^2}{R} = -\left[\dfrac{(125{,}6)(8\times10^{-2})}{(8\times10^{-2})}\right]^2 = -1\ 262\ m/s^2$

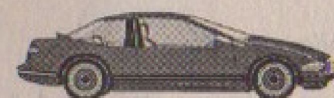
Parte (d) $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}a_T\ t^2 \quad \Rightarrow \quad S(2) = (125{,}6)(8 \times 10^{-2})(2)$

$\therefore \quad s(2) = 20{,}1\ m$

14. Un auto viaja a 36 km/h sobre un camino recto. El radio de las llantas es de 25 cm. Encuentre la velocidad angular de las llantas con su eje tomado como el eje de rotación.

Resolución :

R = 0,25 m



→ v = 10 m/s

$\omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{10}{0{,}25} = 40\ rad/s$

15. Un bloque de 6,00 kg se suelta desde A sobre una pista sin fricción, como la mostrada en la figura P10.15. Determine las componentes radial y tangencial de la aceleración del bloque en P.

15A. Un bloque de masa m se suelta desde A sobre una pista sin fricción, como la mostrada en la figura P10.15. Determine las componentes radial y tangencial de la aceleración del bloque en P.

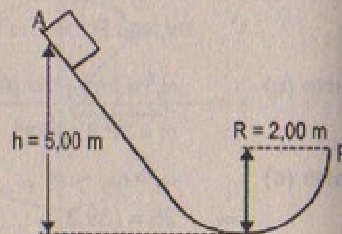


Figura P10.15

Resolución :

$g = 9,81\ m/s^2$

Por conservación de energía

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$\Rightarrow \quad mg(h-R) = \frac{1}{2}m\ v_p^2 \quad \Rightarrow \quad 2g\,(h-R) = v_p^2$$

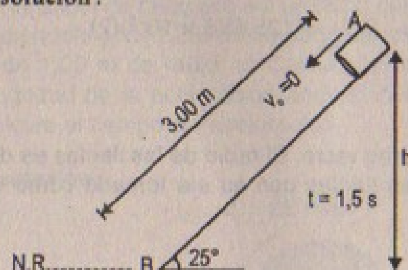
$$\therefore \quad v_p = 7,67\ m/s$$

$$a_T = a_{grav} = 9,81\ m/s^2 \quad \wedge \quad a_R = \frac{{v_p}^2}{R} = 29,43\ m/s^2$$

ENERGÍA ROTACIONAL

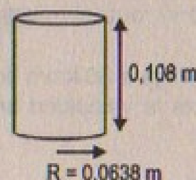
16. Una lata de sopa tiene una masa de 215 g, altura de 10,8 cm y diámetro de 6,38 cm. Se coloca en reposo sobre la parte superior de una pendiente que mide 3,00 m de largo y a 25,0° con la horizontal. Con métodos de energía, calcule el momento de inercia de la lata si tarda 1,50 s en alcanzar el pie de la pendiente.

Resolución :



masa de la lata = 0,215 kg

considerar = g = 9,81 m/s²



Por conservación de energía $E_{MA} = E_{MB}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I.\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2(g)h = 2(9,81)(3)\ \text{sen}25°$$

Por otro lado: $mgh = \frac{1}{2}I.\frac{v^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2R^2 mgh}{v^2}$

Luego: $I = \text{Momento de inercia} = \frac{2(0,0638)^2(0,215)(9,81)(3)\text{sen}25°}{2(9,81)(3)\text{sen}25°}$

$$\therefore \quad I = 8751 \times 10^{-7}\ kg.m^2$$

17. Las cuatro partículas de la figura P10.17 están conectadas por medio de barras de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. Si el sistema gira en el plano xy en torno del eje z con una velocidad angular de 6,00 rad/s, calcule a) el momento de inercia del sistema en torno del eje z, y b) la energía rotacional del sistema.

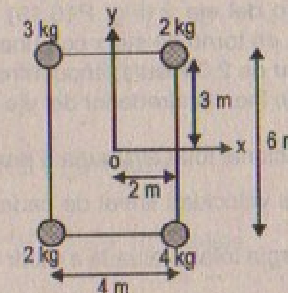


Figura P10.17

Resolución :17

$$I_z = I_x + I_y$$

$$\Rightarrow \quad I_x = 2(3)^2 + 4(3)^2 + 3(3)^2 + 2(3)^2 = 99\ kg.m^2$$

$$I_y = 2(2)^2 + 4(2)^2 + 2(2)^2 + 3(2)^2 = 44\ kg.m^2$$

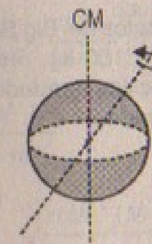
$$\therefore \quad I_z = 99 + 44 = 143\ kg.\ m^2$$

18. El centro de masa de una pelota de beisbol lanzada (radio = 3,8 cm) se mueve a 38 m/s. La pelota gira en torno de un eje que pasa por su centro de masa con una velocidad angular de 125 rad/s. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética traslacional. Considere la pelota como una esfera uniforme.

18A. El centro de masa de una pelota de beisbol lanzada de radio R se mueve a una velocidad v. La pelota gira en torno de un eje que pasa por su centro de masa con una velocidad angular ω. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética traslacional. Considere la pelota como una esfera uniforme.

Resolución :

R = 0,038 m



$$\text{Razón} = \frac{E_{rotacional}}{E_{cinetica}} = \frac{\frac{1}{2}I\,.\,\omega^2}{\frac{1}{2}M.v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Razón} = \frac{R^2\omega^2}{v^2} = \frac{(0{,}038)^2(125)^2}{(38)^2} = 0{,}0156$$

19. Tres partículas están conectadas por medio de barras rígidas de masa despreciable a lo largo del eje *y* (Fig. P10.19). Si el sistema gira en torno de eje *x* con una velocidad angular de 2.00 rad/s, encuentre a) el momento de inercia alrededor del eje *x* y la energía rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\,\omega^2$ y b) la velocidad lineal de cada partícula y la energía total evaluada a partir de $\Sigma\,\frac{1}{2}\,m_i v_i^2$.

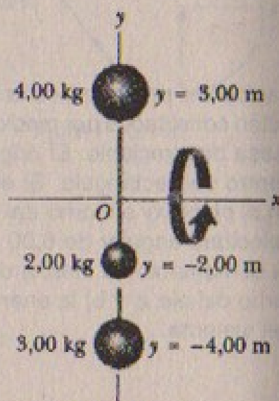


Figura P10.19

Resolución :

$\omega_s = 2{,}00$ rad/s

Parte (a) $\quad I_x = 4(3)^2 + 2(-2)^2 + 3(-4)^2 = 92$ kg.m²

$$\therefore \quad E_{rotacional} = \frac{1}{2}\,I_x\,.\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,(92)(2)^2 = 184 \text{ joules}$$

Parte (b) $\quad \vec{V}_1 = \omega(3) = 6{,}00$ m/s

$$\vec{V}_2 = -\omega(2) = -4{,}00\,\hat{j} = -4\,\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_3 = -\omega(4) = -8{,}00\,\hat{j} = -8{,}0\,\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Energía total} = \frac{1}{2}(4)(6)^2 + \frac{1}{2}(2)(-4)^2 + \frac{1}{2}(3)(-8)^2$$

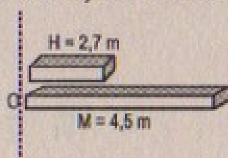
$$\therefore \quad \text{Energía total} = 184{,}0 \text{ joules}$$

20. Las manecillas de las horas y los minutos del Big Ben en Londres miden 2,7 m y 4,5 m de largo y tienen masas de 60 kg y 100 kg, respectivamente. Calcule la energía cinética rotacional de las dos manecillas alrededor del eje de rotación. (Modele las manecillas como largas barras delgadas).

Resolución :

Masa del horario = 60 kg

Masa del minutero = 100 kg



Sabemos que el momento de inercia de una barra que rota por uno de sus extremos es $\frac{1}{3}ML^2$ entonces: $\quad I_{horario} = \frac{1}{3}(60)(2{,}7)^2 = 145{,}8$ kg.m²

$$I_{minutero} = \frac{1}{3}(100)(4{,}5)^2 = 675 \text{ kg.m}^2$$

Por otro lado: $\qquad \omega_{hora} = \frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{T}\right) \qquad \omega_{minutero} = 2\pi\,.\left(\frac{1}{T}\right)$

como los períodos son iguales, luego:

$$\omega_{horario} = \frac{\pi}{6(3\,600\text{ s})} = \frac{3{,}1416}{6\,(3\,600)} = 145\times10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$\omega_{minutero} = \frac{2\pi}{3\,600\text{ s}} = \frac{2(3{,}1416)}{3\,600} = 175\times10^{-5} \text{ rad/s}$$

por último: $E_{rotacional\ horario} = \frac{1}{2}(145{,}8)(145\times10^{-6})^2 = 1{,}5\times10^{-6}$ joules

$$E_{rotacional\ minutero} = \frac{1}{2}(675)(175\times10^{-5})^2 = 103{,}36\times10^{-5} \text{ joules}$$

21. Dos masas *M* y *m* están conectadas por medio de una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se ve en la figura P10.21. Para un eje perpendicular a la barra, demuestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa por el centro de masa. Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM / (m + M)$.

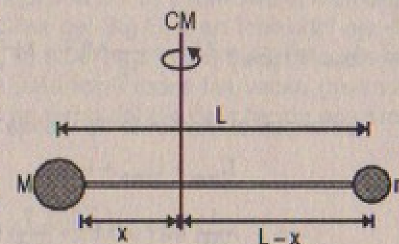


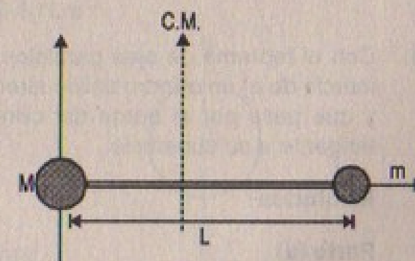
Figura P10.21

Resolución :

$$x_{CM} = \frac{mL}{M+m} + 0$$

$$\Rightarrow \quad I_{CM} = M\left(\frac{mL}{M+m}\right)^2 + m\left(L - \frac{mL}{M+m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{CM} = \frac{M\,m^2L^2}{(M+m)^2} + \frac{m\,M^2.L^2}{(M+m)^2}$$



$$\therefore \quad I_{CM} = \frac{mML^2(M+m)}{(M+m)^2} = \frac{mML^2}{M+m}$$

Pero: $\mu = \dfrac{mM}{m+M} \Rightarrow I_{CM} = \mu L^2$ l.q.q.d.

CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

22. Tres barras idénticas de longitud L, masa m y radio r se colocan perpendiculares entre sí, como se indica en la figura P10.22. El arreglo se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a otra. Determine el momento de inercia de esta configuración.

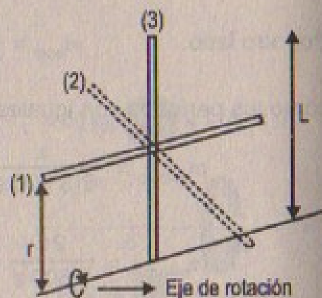


Figura P10.22

Resolución :

$$I_{1/eje} = I_{1/CM} + Mr^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mr^2$$

$$I_{2/eje} = I_{2/CM} + Mr^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mr^2 \Rightarrow I_{3/eje} = I_{3/extremo} = \frac{1}{3}ML^2$$

Entonces el momento de inercia de la configuración será:

$$I_{1/eje} + I_{2/eje} + I_{3/eje}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}ML^2 + Mr^2 + \frac{1}{12}ML^2 + Mr^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

$$\therefore \quad I_{configuración} = \frac{1}{2}ML^2 + 2Mr^2 = M\left(\frac{L^2}{2} + 2r^2\right)$$

23. Con el teorema de ejes paralelos y con la tabla 10.2 encuentre los momentos de inercia de a) un cilindro sólido alrededor de un eje paralelo al eje del centro de masa y que pase por el borde del cilindro, y b) una esfera sólida alrededor de un eje tangente a su superficie.

Resolución :

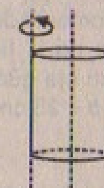
Parte (a)

Hallando el momento de inercia de un cilindro sólido alrededor de un eje paralelo al eje del centro de masa.

Sabemos: $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$

$$\Rightarrow \quad I = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{3MR^2}{2}$$



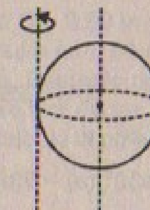
Parte (b)

Hallando el momento de inercia de una esfera sólida alrededor de un eje tangente a su superficie

Sabemos: $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

$$\Rightarrow \quad I = I_{CM} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{7MR^2}{5}$$



MOMENTO DE TORSIÓN

24. Con las longitudes y masas indicadas en el problema 20, a) determine el momento de torsión total debido al peso de las manecillas del Big Ben en torno del eje de rotación cuando la hora marca i) 3:00, ii) 5:15, iii) 6:00, iv) 8:20, v) 9:45. (Modele las manecillas como largas barras delgadas.) b) Determine todas las veces (hasta el segundo) cuando el momento de torsión total en torno del eje de rotación es cero.

Resolución :

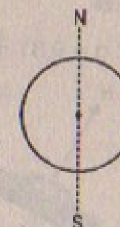
(3:00) $\tau_H \neq 0 \quad \tau_M = 0 \Rightarrow \tau_{eje} = (60)(9{,}81)\left(\frac{2{,}7}{2}\right) = 795$ N.m

(5:15) $\tau_H \neq 0 \quad \tau_M \neq 0 \Rightarrow \tau_{eje} = \tau_H + \tau_M = 100\,(9{,}81)\left(\frac{4{,}5}{2}\right) - (60)(9{,}81)\left(\frac{2{,}7}{2}\right)\text{sen}30°$

$\Rightarrow \quad \tau_{eje} = 2\,207{,}25 - 397{,}305 = 1\,809{,}9$ N.m

Parte (b)

Nota: cuando el momento total de torsión sea cero, las agujas del reloj deben coincidir con el eje de rotación ya sea en la dirección norte o sur.



En consecuencia marcará las siguientes horas:

12:00 (a.m.; p.m.); (12:30)(a.m.; p.m.); 6:00 (a.m.; p.m.); 6:30 (a.m.; p.m.); y también cuando las sumas de momentos de torsión del minutero, segundero y hora sean iguales a cero.

25. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.25 alrededor de un eje que pase por O si a = 10 cm y b = 25 cm.

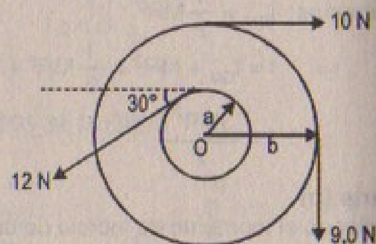
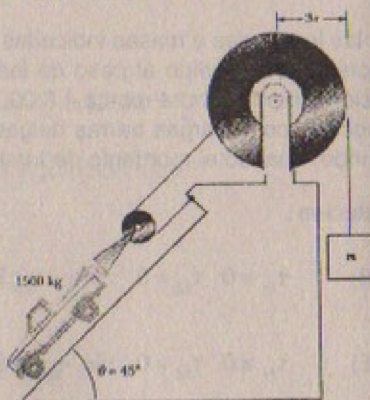


Figura P10.25

Resolución :

a = 0,1 m ; b = 0,25 m

$\Sigma\tau_O = \Sigma F \cdot d$



$\Rightarrow$ $(12\cos 30°)(a) - 9(b) - 10(b) = \tau_o$

$\Rightarrow$ $12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}(0,1) - 9(0,25) - 10(0,25) = \tau_o$

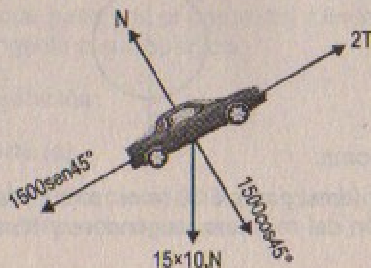
$\therefore$ $\tau_{total/O} = -3,711$ N.m

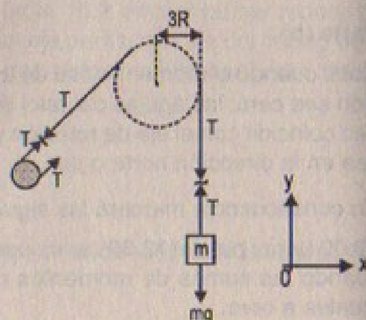
26. Encuentre la masa m necesaria para equilibrar la camioneta de 1 500 kg sobre la pendiente mostrada en la figura P10.26. Suponga que todas las poleas son sin fricción y sin masa.

Figura P10.26

Resolución :26

Considerar: g = 9,81 m/s²





Para la camioneta: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 1\,500 \text{ sen}45 = 2T$

$\Rightarrow 1\,500 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2T$

$\therefore T = 375\sqrt{2} = 530,325$ N

Por otro lado:

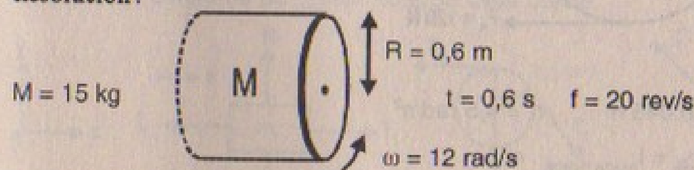
Para la masa: $T - mg = 0 \Rightarrow 532,325 = m(9,81)$

$\therefore m = 54,06$ kg

27. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio R = 0,60 m y masa M = 15 kg puede llevarse hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0,60 s por medio de un motor que ejerce un momento de torsión constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante durante la rotación). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción?

Resolución :

M = 15 kg



$I_{cilindro\ sólido} = \dfrac{1}{2} M.R^2 = \dfrac{1}{2}(15)(0,6)^2 = 2,7$ kg.m²

$\Rightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha.t$

$\Rightarrow 12 = 0 + \alpha(0,6) \quad \therefore \alpha = 20,0$ rad/s²

Entonces: $\tau_{motor} = \alpha.I = \dfrac{1}{2}(20,00)(15)(0,6)^2$

$\therefore \tau_{motor} = 54,00$ N.m

Hallando la potencia generada por el motor:

$\tau \cdot \omega = 54 \times 12 = 648$ watts

Por otro lado: $20 = \dfrac{1}{T} \Rightarrow T = 0,05$ s

Potencia de la fricción: 54 × (0,3348)

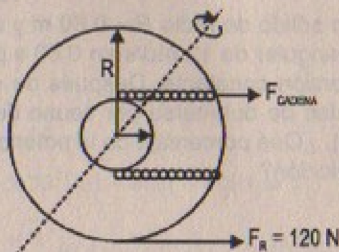
Si: 648 → 100%

54 × (0,3348) → x $\therefore$ x = 2,79%

RELACIÓN ENTRE MOMENTO DE TORSIÓN Y ACELERACIÓN ANGULAR

28. Una rueda de bicicleta tiene un diámetro de 64,0 cm y una masa de 1,80 kg. La bicicleta se sitúa sobre una plataforma estacionaria sobre unos rodillos, y se aplica una fuerza resistiva de 120 N al borde de la llanta. Suponga que toda la masa de la rueda se concentra sobre el radio exterior. Para brindar a la rueda una aceleración de 4,5 rad/s², ¿qué fuerza debe aplicar una cadena que pasa por: a) un diente de engranaje de 9,0 cm de diámetro, y b) por uno de 5,6 cm de diámetro.

Resolución:



Masa de la cuerda = 1,80 kg
R = 0,32 m

Parte (a)

Para $r = 0,045$ m $\qquad \alpha = 4,5$ rad/s²

$$\Sigma\tau_{eje} = I_{rueda\ hueca}\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F\times r - 120\,R = \frac{1}{2}M\,(R^2 + r^2)\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F\,(0,045) = 120\,(0,32) + \frac{1}{2}(1,80)\ [(0,32)^2 + (0,045)^2]\,(4,5)$$

$$\therefore \quad F = 862,73\ N$$

Parte (b)

Para $r = 0,028$ m $\qquad \alpha = 4,5$ rad/s²

$$\Sigma\tau_{eje} = I_{rueda\ hueca}\times\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F.r - 120\,R = \frac{1}{2}M\,(R^2 + r^2)\,.\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad F(0,028) = 120\,(0,32) + \frac{1}{2}(1,80)\ [(0,32)^2 + (0,028)^2]\,(4,5)$$

$$\therefore \quad F = 1\,386,36\ N$$

29. Un bloque de masa m_1 = 2,00 kg y uno de masa m_2 = 6,00 kg se conectan por medio de una cuerda sin masa sobre una polea que tiene la forma de un disco con radio R = 0,25 m y masa M = 10,0 kg. Asimismo, se deja que los bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña con un ángulo θ = 30,0° como muestra la figura P10.29. el coeficiente de fricción cinético es 0,36 para ambos bloques. Determine a) la aceleración de los bloques, y b) la tensión en la cuerda.

29.A Un bloque de masa m_1 y uno de masa m_2 se conectan por medio de una cuerda sin masa sobre una polea que tiene la forma de un disco con radio *R* y masa *M*. asimismo, se deja que los bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña con un ángulo θ como muestra la figura P10.29. el coeficiente de fricción cinético es μ para ambos bloques. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) la tensión en la cuerda.

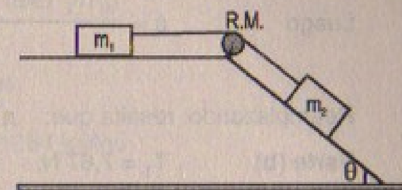


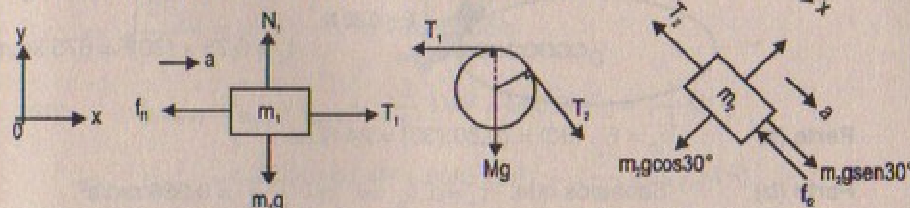
Figura P10.29

Resolución:

$m_1 = 2$ kg ; $m_2 = 6$ kg $\qquad R = 0,25$ m ; $M = 10$ kg
$\theta = 30°$; $\mu_k = 0,36$
considerar: $g = 9,81$ m/s²

Parte (a)

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de cada objeto:



Por la segunda ley de Newton (para m_1)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1g$$

$$\Sigma F_x = m_1a \quad \Rightarrow \quad T_1 - f_{11} = m_1a$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = m_1a + m_1g\,.\,\mu_k \qquad \dots (1)$$

Por la segunda ley para m_2

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = m_2g\cos 30°$$

$$\Sigma F_x = m_2a \quad \Rightarrow \quad m_2\text{sen}30° - T_2 - f_{12} = m_2a$$

$$\therefore \quad T_2 = m_2g\,\text{sen}30° - \mu_k m_2\cos 30° - m_2a \qquad \dots (2)$$

Además: $\qquad T_1R - T_2R = I_{polea}\cdot\dfrac{a}{R}$

$$\Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R^2}\right) = -\frac{M(a)}{2} \qquad \dots (3)$$

Restando (1) – (2):

$$T_1 - T_2 = m_1a + m_1g\,\mu_k - m_2g\,\text{sen}30° + \mu_k m_2g\cos 30° + m_2a$$

$$-\frac{M(a)}{2} = (m_1 + m_2)a - m_2g\,(\text{sen}30° - \mu_k\cos 30°) + m_1g\,\mu_k$$

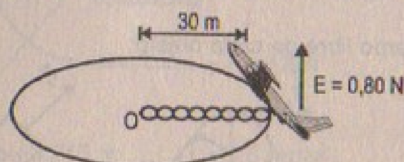
Luego $a = \dfrac{g[m_2 (\text{sen } 30° - \mu_k \cos 30°) - m_1 \mu_k]}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}\right)}$

Reemplazando: resulta que: $a = 0{,}309 \text{ m/s}^2$

Parte (b) $T_1 = 7{,}67$ N; $T_2 = 9{,}22$ N

30. Un avión a escala cuya masa es de 0,75 kg se ata a un alambre de manera que vuela en un círculo de 30 m de radio. El motor del avión brinda un empuje neto perpendicular al alambre de 0,80 N. a) Encuentre el momento de torsión que el empuje neto produce alrededor del centro del círculo. b) Encuentre la aceleración angular del avión cuando efectúa un vuelo nivelado. c) Encuentre la aceleración lineal del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

Resolución :



Masa del avión = 0,75 kg

$I_o = 0{,}75 \times (30)^2 = 675 \text{ kg.m}^2$

Parte (a) $\tau_o = E \,.\, (30) = (0{,}80)(30) = 24$ N.m

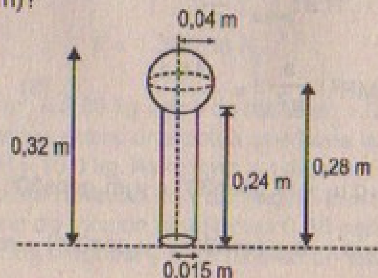
Parte (b) Sabemos que: $\tau_o = \alpha . I_o \Rightarrow \alpha = \dfrac{24}{675} = 0{,}036 \text{ rad/s}^2$

Parte (c) $a_{lineal} = a_T = \alpha . R \Rightarrow = (0{,}036)(30) = 1{,}067 \text{ m/s}^2$

TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ROTACIONAL

31. Una barra cilíndrica de 24 cm de largo tiene una masa de 1,2 kg y un radio de 1,5 cm. Una bola de 20 kg de 8,0 cm de diámetro está unida a uno de los extremos. El arreglo está originalmente vertical con la bola en el extremo superior y tiene libertad de girar alrededor del otro extremo. Después de que el sistema bola-barra ha recorrido un cuarto de giro, ¿cuáles son a) la energía cinética rotacional, b) la velocidad angular; y c) la velocidad lineal de la bola? d) ¿Cómo se compara la velocidad lineal de la bola con la velocidad si la bola hubiera caído libremente desde una distancia igual al radio (28 cm)?

Resolución :



$M_{barra} = 1{,}2$ kg
$M_{bola} = 20$ kg
$\theta = \pi/2$

Parte (a) $F = (20{,}0)(9{,}81) = 196{,}20$ N (F cte)

$\Rightarrow dW = F\, ds = (196{,}20)(0{,}28)$

$\therefore \int dW = W_{bola} = 54{,}936$ joules

Luego $W_{barra} = (12 \text{ kg})(9{,}81)(0{,}12) = 1{,}41264$ joules

Por el teorema del trabajo y la energía:

$$W = E_K = E_{rotacional}$$

$\Rightarrow E_R = W_{total} = 54{,}936 + 1{,}41264$

$\therefore E_{rotacional} = 56{,}3$ joules

Parte (b) $E_R = \dfrac{1}{2} I . \omega^2$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2E_R}{I}} = \omega \qquad \therefore \omega = 8{,}38$ rad/s

pero $I_{sistema} = I_{bola} + I_{barra} = [\frac{2}{5} MR^2 + M(0{,}28)^2] + [\frac{1}{3} ML^2]$

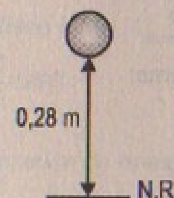
$\Rightarrow I_{sistema} = (\frac{2}{5}(20)(0{,}04)^2 + 20(0{,}28)^2) + (\frac{1}{3}(1{,}2)(0{,}24)^2)$

$\therefore I_{sistema} = 1{,}60384 \text{ kg.m}^2$

Parte (c) $v_{bola} = \omega . R = (8{,}38)(0{,}28)$

$\therefore v_{bola} = 2{,}35$ m/s

Parte (d)



$v_{bola} = \sqrt{2(9{,}81)(0{,}28)} \approx 2{,}344$ m/s

Son aproximadamente igual (c) con (d)

32. Una masa de 15 kg y una de 10 kg están suspendidas por una polea que tiene un radio de 10 cm y una masa de 3,0 kg (Fig. P10.32). La cuerda tiene una masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar. La polea gira sin fricción. las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia de 3,0 m. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine la velocidad de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.

32A. Una masa m_1 y una masa m_2 están suspendidas por una polea que tiene un radio R y una masa m_3 (Fig. P10.32). La cuerda tiene una masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar. La polea gira sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia d. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.

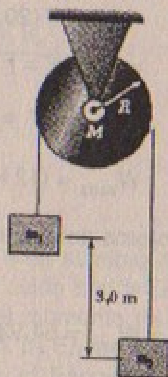
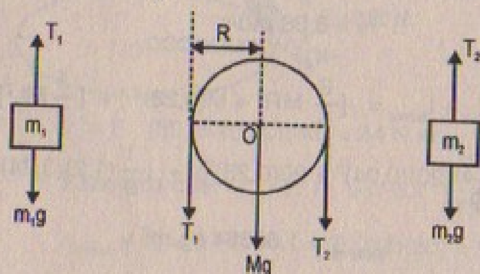


Figura P10.32

Resolución :

$g = 9{,}81\ m/s^2$; $I_{polea} = \dfrac{1}{2}MR^2$



Sabemos que: $$T_1(R) - T_2(R) = I\,\alpha = I\frac{(a)}{R} = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$\therefore \quad T_1 - T_2 = \frac{M}{2}(a) \qquad \dots (1)$$

Por conservación de la energía mecánica del sistema:

Entonces: $$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I_{polea}\cdot\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad m_1gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}M\cdot R^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m_1gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 + \frac{1}{4}M.v^2$$

$$\Rightarrow \quad m_1gh = \frac{1}{2}v^2\left[(m_1 + m_2) + \frac{M}{2}\right]$$

En consecuencia: $$v^2 = \frac{2m_1gh}{\left[m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}\right]}$$

$$\therefore \quad v = \left[\frac{2m_1gh}{(m_1 + m_2 + M/2)}\right]^{1/2}$$

Reemplazando: $h = 3{,}0\ m$; $m_1 = 15\ kg$; $m_2 = 10\ kg$

$M = 3{,}0\ kg$; $g = 9{,}81\ m/s^2$

Luego: $$v = \left[\frac{2(15)(9{,}81)(3)}{(15 + 10 + (3)/2)}\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad v = 5{,}77\ m/s$$

33. a) Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde (Fig. P10.33). Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo verde, ¿cuál es la velocidad de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada por el círculo punteado? b) ¿Cuál es la velocidad del punto más bajo sobre el disco en la posición del círculo punteado? c) Repita el inciso a) para un aro uniforme.

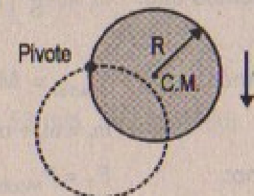


Figura P10.33

Resolución :

Masa del disco = M ; $I_{disco/C.M} = \dfrac{1}{2}M.R^2$

$I_{disco/piv} = \dfrac{1}{2}MR^2$

Parte (a)

Por conservación de energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow \quad MgR = \frac{1}{2}I_{piv}\,\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad MgR = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}^2}{R^2}\right) \qquad \therefore \quad v_{CM} = 2\left[\frac{gR}{3}\right]^{1/2}$$

Parte (b)

Por conservación de energía:

Como: $$v_{CM} = 2\left(\frac{gR}{3}\right)^{1/2} = \omega.R \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\left(\frac{g}{3R}\right)^{1/2}$$

Luego la velocidad en el punto más bajo será:

$$v = \omega\,.\,(2R) \quad \Rightarrow \quad v = 2R\left(2\left(\frac{g}{3R}\right)^{1/2}\right) = 4\left[\frac{gR}{3}\right]^{1/2}$$

Parte (c)

Para un aro es igual, solamente cambia I_{aro}

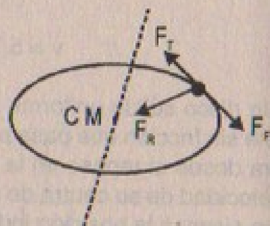
34. Un grueso disco de piedra de una rueda de alfarero de 0,50 m de radio y 100 kg de masa gira libremente a 50 rev/min. El alfarero puede detener la rueda en 6,0 s presionando su borde con un trapo húmedo y ejerciendo una fuerza radial hacia adentro de 70 N. Encuentre el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la rueda y el trapo húmedo.

Resolución:

$F_{radial} = 70$ N ; $t = 6{,}0$ s

$R = 0{,}5$ m ; $g = 9{,}81$ m/s²

$M = 100$ kg ; $f = 50$ rev/min



Sabemos que: $\omega_i = \left(\frac{5}{6}\right)(2\pi) = 5{,}24$ rad/s

Además: $F_{radial} = M\,.\,\frac{v^2}{R} = M\,\omega^2\,.\,R \Rightarrow \omega_{final} = 11{,}84$ rad/s

$\Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i + \alpha\,t \Rightarrow 11{,}84 = 5{,}24 + \alpha(6) \quad \therefore \quad \alpha = 1{,}1$ rad/s²

Como: $F_T = F_{fricción} = \mu_k\,.\,mg$

$\Rightarrow \quad \mu_k = \alpha/g.R = 1{,}1/(9{,}8)(0{,}5) \approx 0{,}22$

35. Un peso de 50,0 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una polea de 0,250 m de radio y 3,00 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno del eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6,00 m sobre el piso. a) Determine la tensión en la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso. b) Determine la velocidad calculada en el inciso a) empleando el principio de la conservación de la energía.

Resolución:

$R = 0{,}25$ m

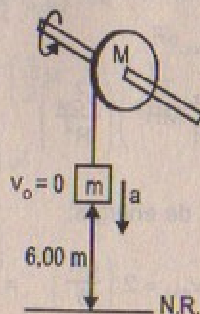
$M = 3{,}00$ kg

Peso de m = 50 N

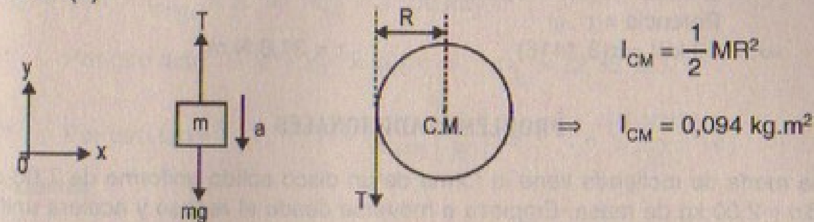
Masa de m = 5,1 kg

Considerar g = 9,81 m/s²

$I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2$



Parte (a)



$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_{CM} = 0{,}094\ \text{kg.m}^2$$

$$\tau_{CM} = I_{CM}\,.\,\alpha \Rightarrow T.R = I_{CM}\left(\frac{a}{R}\right) \quad \therefore \quad T = I_{CM}\frac{a}{R^2}$$

por otro lado: $mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad mg - I_{CM}\frac{a}{R^2} = ma$

$$\Rightarrow \quad a\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) = mg \quad \therefore \quad a = \frac{mg}{m + \frac{I_{CM}}{R^2}}$$

Reemplazando datos: $a = 7{,}575$ m/s² ; $T = 11{,}36$ N

Por el teorema del trabajo y la energía: $W_{total} = \Delta E_K$

$\Rightarrow \quad mg(6) - T(6) = \frac{1}{2}m\,v^2$

$\Rightarrow \quad 6(50 - 11{,}36) = \frac{1}{2}(5{,}1)\,v^2 \quad \therefore \quad v = 9{,}53$ m/s (hacia abajo)

Parte (b)

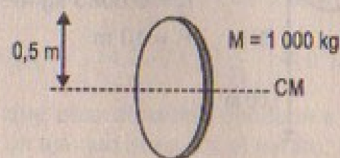
Por conservación de energía $\quad \Delta E_{K\ masa} = \frac{1}{2}m.v^2$

$\Rightarrow \quad \Delta U_{IC} + \Delta E_{k\,f\,ext} = \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow \quad mg\,6 + (T)(-6) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore \quad v = 9{,}53$ m/s

36. Un autobús está diseñado para extraer su potencia de un volante que se lleva a su máxima velocidad (3 000 rpm) por medio de un motor eléctrico. El volante es un cilindro sólido de 1 000 kg de masa y 1,00 m de diámetro. Si el autobús necesita una potencia promedio de 10,0 kW, ¿cuánto debe girar el volante?

Resolución:



f = 3 000 RPM = 50 rev/s

Potencia promedio = 10 kW

$\omega = 2\pi f = 2(3,1416)(50) = 314,16$ rad/s

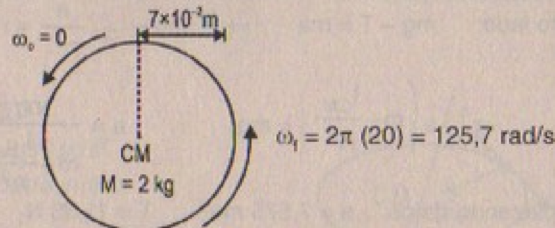
Potencia = $\tau \cdot \omega$

$\Rightarrow$ 10 kW = $\tau(3,1416)$ $\therefore$ $\tau = 31,8$ N.m

PROBLEMAS ADICIONALES

37. Una rueda de molienda tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7,00 cm de radio y 2,00 kg de masa. Empieza a moverse desde el reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0,600 N.m que el motor ejerce sobre la rueda. a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su velocidad final de 1 200 rev/min? b) ¿Cuántas revoluciones efectúa mientras se acelera?

Resolución:



$\omega_f = 2\pi\,(20) = 125,7$ rad/s

Parte (a) $\tau_{CM} = I_{CM} \cdot \alpha \Rightarrow 0,6 = \dfrac{(2)\left(7\times10^{-2}\right)^2}{2}(\alpha)$

$\therefore$ $\alpha = 122,45$ rad/s² $\Rightarrow$ $\omega_f = \omega_i + \alpha . t$

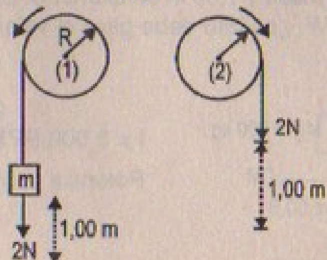
$\Rightarrow$ $125,7 = 0 + (122,45)\,.\,t$ $\therefore$ $t = 1,03$ s

Parte (b) $\theta = \frac{1}{2}(122,45)(1,03)^2$ $\therefore$ $\theta = 64,95$ rad

$\therefore$ n.° revoluciones = $\dfrac{64,95 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 10,34$ revoluciones

38. Dos discos idénticos que tienen un momento de inercia de 0,0080 kg.m² y 10 m de radio pueden girar libremente sobre ejes sin fricción. Un disco tiene un peso de 2,0 N unido a él mediante una cuerda enrollada alrededor de la circunferencia, el tanto que el otro tiene una fuerza de 2,0 N aplicada a su cuerda. ¿Cuál de los discos gira más rápido después de que 1,0 m de cuerda se ha desenrollado? Explique.

Resolución:



$I_1 = 0,0080$ kg.m²

$I_2 = 0,0080$ kg.m²

R = 10 m

$\tau_2 = T.R = I_{disco_2} \times \alpha \Rightarrow \alpha_{(2)} = 2\,500$ rad/s²

- Por otro lado: $v^2 = v_0^2 + 2\,a_T(3) \Rightarrow \omega_{t_2} = 22,36$ rad/s

- Por otro lado: $\tau_1 = T.R = I_{discos}\left(\dfrac{a}{R}\right) \Rightarrow T = \dfrac{(0,0080)}{100}(a)$

Además:

$2 - T = m(a) \Rightarrow 2 = 0,00008\,a + \dfrac{2}{(9,81)}(a)$ $\therefore$ $a = 9,8$ m/s²

$\Rightarrow$ $\alpha_{(2)} = 0,98$ rad/s²

En consecuencia el disco (2) se desenrrolla más rápido que el disco (1) porque $\alpha_{(2)} >> \alpha_{(1)}$

39. La caña de pescar de la figura P10.39 forma un ángulo de 20° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión ejercido por el pez alrededor de un eje perpendicular a la página y que pasa por la mano del pescador?

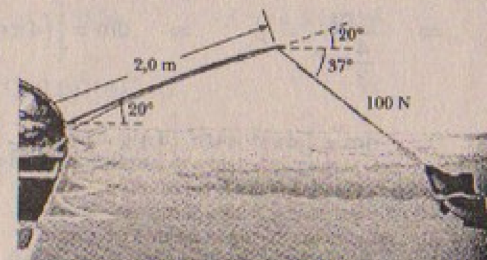
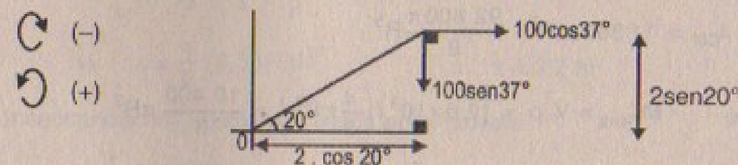


Figura P10.39

Resolución:

Considerar: sen 20° ≈ 0,345
cos 20° ≈ 0,9386



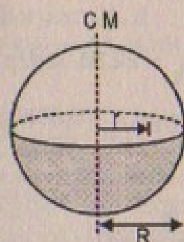
$\tau_o = -100\cos 37°\,(2\,\text{sen}\,20°) - 100\,\text{sen}\,37°\,(2\cos 20°)$

$\Rightarrow$ $\tau_o = -100\left(\dfrac{4}{5}\right)(2)(0,345) - 100\left(\dfrac{3}{5}\right)(2)(0,9386)$

$\therefore$ $\tau_o = 167,8$ N.m

40. La densidad de la Tierra, a cualquier distancia r desde su centro, es aproximadamente $\rho_{Tierra} = \left[14,2 - 11,6\left(\dfrac{r}{R}\right)\right]\times10^3\text{kg/m}^3$ donde R es el radio de la Tierra. Demuestre que esta densidad conduce a un momento de inercia I = 0,330 MR² en torno de un eje que pasa por el centro, donde *M* es la masa de la Tierra.

Resolución :



Radio de la Tierra = R

Masa de la Tierra = M

$$\rho_{Tierra} = \left[14,2 - 11,6\left(\frac{r}{R}\right)\right] \times 10^3 \text{kg/m}^3$$

Por demostrar: $I_{CM} = 0,330\ MR^2$

Sabemos que: $\frac{M}{V} = \rho$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \rho \quad \Rightarrow \quad dm = \left[\left(4\pi r^2\right)\rho + \rho'\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\right] dr$$

$$\therefore \quad dm = \left[4\pi r^2 \times 10^3 \left[14,2 - 11,6\left(\frac{r}{R}\right)\right] - \left(\frac{11,6}{R} \times 10^3\right)\frac{4}{3}\pi r^3\right] dr$$

Luego:

$$I_{CM} = \int r^2 dm = \left(4\times10^3 \pi \times 14,2\right)\int_0^R r^4\, dr - \frac{464\times10^2 \pi}{R}\int_0^R r^5\, dr - \frac{46\ 400\ \pi}{3R}\int_0^R r^5 dr$$

$$\Rightarrow \quad I_{CM} = \frac{4}{5}\pi R^5\ (14\ 200) - \frac{46\ 400}{6}\pi R^5 - \frac{46\ 400}{18}\pi R^5$$

$$\Rightarrow \quad I_{CM} = 11\ 360\ \pi R^5 - \frac{92\ 800\pi}{9} R^5$$

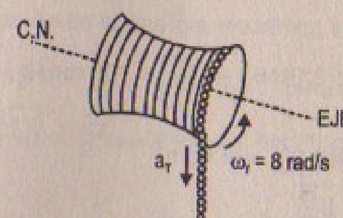
Como $\quad M_{Tierra} = V.\rho = \left(2,6\times10^3\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{10\ 400}{3}\pi R^3$

Entonces: $I_{CM} = \frac{9\ 440}{9}\pi R^5 = \left(\frac{10\ 400}{3}\pi R^3\right)\left(\frac{9\ 400}{10\ 400}\right)\left(\frac{1}{3}\right) R^2$

$$\therefore \quad I_{CM} = 0,330\ MR^2 \qquad \text{l.q.q.d}$$

41. Una ligera cuerda de nylon de 4,00 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0,500 m de radio y 1,00 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se jala del carrete con una aceleración constante de 2,50 m/s². a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8,00 rad/s? b) Suponiendo que no hay suficiente cuerda sobre el carrete, ¿cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular? c) ¿Hay la suficiente cuerda sobre el carrete?

Resolución :



$R = 0,5$ m
$M = 1$ kg
$L = 4$ m
$\omega_o = 0$

Parte (a)

Sabemos que: $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$

$$W = \Delta E_{rotacional} = \frac{1}{2} I\ \omega_f^2 - \frac{1}{2} I\ \omega_o^2$$

Por otro lado: $a_T = \alpha R \Rightarrow 2,5 = \alpha\ (0,5) \qquad \therefore\ \alpha = 5\ \text{rad/s}^2$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(1)\ (0,5)^2\ (8)^2 - 0$$

$$\therefore \quad W = 4,00 \text{ joules}$$

Parte (b) $\quad \omega_f = \omega_i + \alpha\ t$

$$\Rightarrow \quad 8 = 0 + 5t \Rightarrow t = 1,6 \text{ s}$$

Parte (c) $\quad \omega_f = \frac{v}{R} \Rightarrow v_f = (8)(0,5) = 4\ \text{m/s}$

$$\Rightarrow \quad s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}\, a_T\ t^2$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}\ (2,5)(1,6)^2 \qquad \therefore \quad s = 3,2 \text{ m}$$

En consecuencia hay suficiente cuerda en el carrete.

42. Un volante que tiene la forma de un pesado disco circular de 0,600 m de diámetro y 200 kg de masa se monta sobre un cojinete sin fricción. Un motor conectado al volante lo acelera desde el reposo hasta 1 000 rev/min. a) ¿Cuál es el momento de inercia del volante? b) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre éste durante la aceleración? c) Después de que se alcanzan 1 000 rev/min, se desengrana el motor. Con un freno de fricción se disminuye la tasa rotacional hasta 500 rev/min. ¿Cuánta energía se disipa como calor en el freno de fricción?

Resolución :

$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2} MR^2 \quad ; \quad \omega_o = 0$

$M_{disco} = 200$ kg $\quad ; \quad f = 100$ rev/min

$R_{disco} = 0,300$ m

Parte (a) $\tau_{CM} = I.\alpha$

Sabemos: $\omega_f = 2\pi.f = 2(3{,}1416)\left(\dfrac{1\,000}{60}\right) = 105 \text{ rad/s}$

$\Rightarrow \quad I_{CM} = \dfrac{1}{2}(200)(0{,}3)^2 = 9 \text{ kgm}^2$

Parte (b) $W = \dfrac{1}{2} I\omega_f^2 - \dfrac{1}{2} I\,\omega_o^2$

$\Rightarrow \quad W = \dfrac{1}{2}(9)(105)^2 = 49\,612{,}5 \text{ joules}$

Parte (c) $W_{fricción}$ = Energía de la fricción

Entonces: $W_{fricción} = \dfrac{1}{2} I.\omega^2$

Pero: $\omega = 2\pi f = 2(3{,}1416)\dfrac{(500)}{60} = 52{,}36 \text{ rad/s}$

$\Rightarrow \quad W_{fricción} = \dfrac{1}{2}(9)(52{,}36)^2 = 12337{,}1 \text{ joules}$

Luego la energía disipada será la variación de las energías:

$$\Delta E_{rotacional} = 4\,9612{,}5 - 12\,337{,}1 = 37275{,}4 \text{ joules}$$

43. Una larga barra uniforme de longitud L y masa M gira alrededor de un alfiler horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La figura P10.43 muestra como se suelta la barra desde el reposo en una posición vertical. En el instante en que la barra está horizontal, encuentre a) su velocidad angular, b) la magnitud de su aceleración angular, c) las componentes x y y de la aceleración de su centro de masa, y d) las componentes de la fuerza de reacción en el pivote.

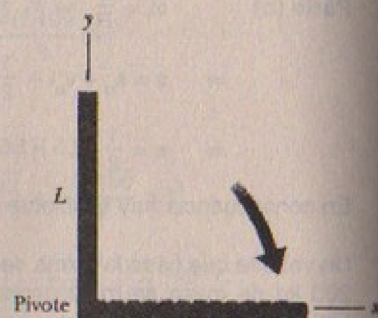
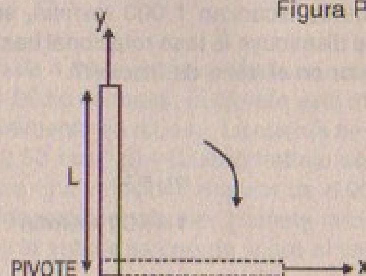


Figura P10.43

Resolución :

Dada la figura:



Parte (a)

Por la conservación de la energía mecánica se cumple que:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}(M)(g)(L) = \dfrac{1}{2} I_{barra}.\omega^2_{horizontal} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}M.L^2\right)\omega^2_{horizontal}$

$\therefore \quad \omega_{horizontal} = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

Parte (b)

Sabemos que: $\tau_{pivote} = I_{barra}\,.\,\alpha$

$\Rightarrow \quad M.g\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{1}{3}ML^2\alpha$

$\therefore \quad \alpha_{barra} = \dfrac{3g}{2L}$

Parte (c)

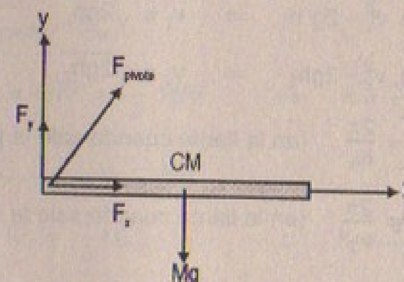
Sabemos que: $|V_{CM}| = r.\omega_H = \left(\dfrac{L}{2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\right)$

Entonces: $\vec{a}_c = -\dfrac{V_{CM}^2}{r}.\hat{i} = -\dfrac{2}{L}\left(\dfrac{L^2}{4}\right)\left(\dfrac{3g}{L}\right)\hat{i} = -\dfrac{3}{2}g\,\hat{i}$

Por otro lado: $\vec{a}_T = -\vec{\alpha}.r\,\hat{j} = -\dfrac{3g}{2L}\times\dfrac{L}{2}\hat{j} = -\dfrac{3g}{4}\hat{j}$

$\therefore \quad \vec{a}_{total} = -\dfrac{3}{2}g\,\hat{i} - \dfrac{3}{4}.g\,\hat{j}$

Parte (d)



* En el eje x: $F_x - Fg = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_x = Fg = -\dfrac{3}{2}M.g.\hat{i}$

* En el eje y: $Fg - Fy = M.\,\vec{a}_T$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_y = \vec{F}g - M.\vec{a}_T = Mg\,\hat{j} - M\left(\dfrac{3}{4}\right)g\,\hat{j} = \dfrac{1}{4}Mg\,\hat{j}$

$\therefore \quad \vec{F}_{pivote} = -\dfrac{3}{2}Mg\,\hat{i} + \dfrac{1}{4}Mg\,\hat{j}$

44. Una bicicleta se voltea hacia arriba mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga hace girar la otra rueda de 0,381 m de radio y observa que se despiden gotas de agua tangencialmente. La muchacha mide la altura alcanzada por las gotas cuando se mueven verticalmente (Fig. P10.44). Una gota que sale de la llanta en un giro asciende hasta h = 54,0 cm sobre el punto tangente. Una gota que se despide en la siguiente vuelta asciende 51,0 cm sobre el punto tangente. La altura a la cual las gotas ascienden disminuye porque la velocidad angular de la rueda también lo hace. Con esta información determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

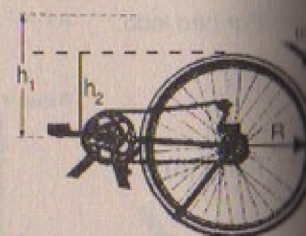
44A. Una bicileta se voltea hacia arriba mientras su propietario repara una llanta ponchada. Una amiga hace girar la otra rueda de radio R y observa que se despiden gotas de agua tangencialmente. La muchacha mide la altura alcanzada por las gotas cuando se mueven verticalmente (Fig. P10.44). Una gota que sale de la llanta en un giro asciende hasta h_1 sobre el punto tangente. Una gota que se despide en la siguiente vuelta asciende una distancia $h_2 < h_1$ sobre el punto tangente. La altura a la cual las gotas ascienden disminuye porque la velocidad angular de la rueda también lo hace. Con esta información determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.



Figura P10.44

Resolución:

Sea la figura:



Por cinemática se cumple que:

$$0 = v_1^2 - 2g.h_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$0 = v_2^2 - 2gh_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

Por otro lado: $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ (en la llanta cuando sale la primera gota)

$T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$ (en la llanta cuando sale la segunda gota)

Además: por definición: $\alpha_{prom} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\dfrac{v_2}{R} - \dfrac{v_1}{R}}{T_2 - T_1}$

Entonces: $$\alpha_{prom} = \frac{\dfrac{\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}}{R}}{2\pi\left(\dfrac{1}{\omega_2} - \dfrac{1}{\omega_1}\right)} = \frac{\omega_2\,\omega_1\left(\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}\right)}{2\pi R(\omega_1 - \omega_2)}$$

$$\alpha_{prom} = \frac{2gR^2\sqrt{h_1.h_2}\left(\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}\right)}{2\pi R\left(\dfrac{\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}}{R}\right)}$$

$$\alpha_{prom} = \frac{-g.R^2\sqrt{h_1.h_2}\left(\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}\right)}{\pi\left(\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}\right)} \quad \therefore \quad \alpha_{prom} = -\frac{gR^2\sqrt{h_1.h_2}}{\pi}$$

Donde:

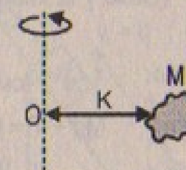
(–): significa que la aceleración va en sentido contrario de la velocidad angular.

45. Radio de giro: Para cualquier eje rotacional dado, el radio de giro, K, de un cuerpo rígido está definido por la expresión $K^2 = I/M$, donde M es la masa total del cuerpo e I es el momento de inercia alrededor del eje dado. En otras palabras, el radio de giro es la distancia entre una masa puntual imaginaria M, y el eje de rotación con I para la masa puntual en torno de ese eje es el mismo que para el cuerpo rígido. Encuentre el radio de giro de a) un disco sólido de radio R, b) una barra uniforme de longitud L, y c) una esfera sólida de radio R, los tres girando alrededor de un eje central.

Resolución:

Datos: $K^2 = \dfrac{I}{M}$

Donde "K" es el radio de giro



Parte (a) $I_{CM\,disco} = \dfrac{1}{2}MR^2$

$\Rightarrow I_{disco/O} = I_{CM}$

$\Rightarrow I/o = MK^2 = \dfrac{1}{2}MR^2 \quad \Rightarrow \quad K = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R = 0{,}707\,R$

Parte (b) $I_{Barra\times extremo} = \dfrac{1}{3}ML^2$

$\Rightarrow M.K^2 = \dfrac{1}{3}ML^2 \quad \therefore \quad K = \dfrac{\sqrt{3}}{3}L = 0{,}577\,L$

Parte (c) $I_{CM\,esfera} = \dfrac{2}{5}MR^2$

$\Rightarrow MK^2 = \dfrac{2}{5}MR^2 \quad \Rightarrow \quad K = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R = 0{,}632R$

46. Una brillante estudiante de física compra una veleta de viento para la cochera de su padre. La veleta consta de un gallo sobre la parte superior de una flecha. En la figura P10.46 se muestra la veleta, que está fija a un eje vertical de radio *r* y masa *m*

y que gira libremente en su montura de techo. La estudiante diseñó un experimento para medir la inercia rotacional del gallo y la flecha. Enrolla una cuerda alrededor del eje que pasa por una polea y se conecta a una masa M que cuelga sobre el borde del techo. Cuando la masa M se suelta, la estudiante determina el tiempo t que la masa tarda en descender una distancia h. De acuerdo con estos datos, la estudiante puede determinar la inercia rotacional I del gallo y la flecha. Encuentre la expresión para I en función de m, M, r, g, h y t.

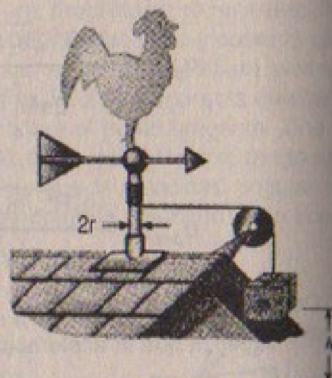


Figura P10.46

Resolución :46

Cuando «M» desciende una distancia «h» en un tiempo «t», la veleta hace un torque, en relación con su centro de masa, con un brazo de longitud h.

Entonces: $I_{CM} = \dfrac{1}{2}mr^2$

(Gallo y la flecha)

Por otro lado: $\tau_{CM} = I_{CM}.\alpha = Th \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{I_{CM}(a)}{rh}$ ...(1)

Así también: $Mg - T = Ma \quad \Rightarrow \quad T = Mg - Ma$ ....(2)

$(2) = (1) \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{Mg}{\left(\dfrac{I}{rh} + M\right)}$

Pero: $h = \dfrac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{Mg}\left(\dfrac{I}{rh} + M\right)} = \sqrt{\dfrac{mr + 2\,hM}{Mg}}$

47. El trompo de la figura P10.47 tiene un momento de inercia de $4{,}00 \times 10^{-4}$ kg m^2 y está inicialmente en reposo. Tiene libertad de girar alrededor de un eje estacionario AA'. Una cuerda enrollada alrededor de la cabeza que está sobre el eje del trompo es jalada de tal manera que mantiene una tensión constante de 5,57 N. Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla, ¿cuál es la velocidad angular del trompo después de que 80,0 cm de cuerpo se han jalado de la cabeza?

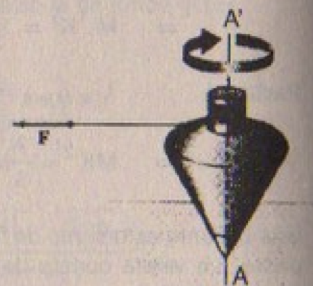


Figura P10.47

Resolución :

$I = 4{,}00 \times 10^{-4}$ kg.m^2 ; $F = 5{,}57$ N

$L = 0{,}8$ m

$$\tau_{A'A} = I.\alpha = FL$$

$$\Rightarrow \quad 4\times10^{-4}.\ \alpha = 5{,}57(0{,}8) \qquad \therefore \quad \alpha = 1{,}114 \times 10^4 \text{ rad/s}^2$$

Por otro lado: $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 0 + 2(1{,}114 \times 10^4)(0{,}8)$

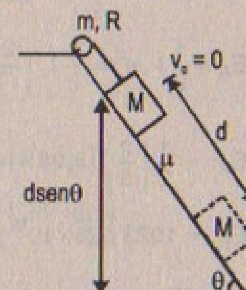
$$\therefore \quad \omega = 1{,}34 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

48. Una cuerda se enrolla alrededor de una polea de masa m y radio r. El extremo libre de la cuerda se conecta a un bloque de masa M. El bloque empieza a moverse desde el reposo y después se desliza hacia debajo de una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente es μ. a) Con métodos de energía demuestre que la velocidad del bloque como una función del desplazamiento d hacia debajo de la pendiente es

$$v = \left[4\,gd\left(\frac{M}{m+2M}\right)(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)\right]^{1/2}$$

b) Determine la magnitud de la aceleración del bloque en función de m, μ, M, g y θ.

Resolución :



Sabemos que:

$\Delta E_{K \text{ inicial del sistema}} = 0$

Por otro lado:

$\Delta E_{K \text{ final}} = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$

Entonces: $E_{M\text{ final}} - E_{M\text{ inicial}} = W_{\text{fricción}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg.d\operatorname{sen}\theta = -\mu_k\, Mg\cos\theta.d$$

Pero: $I_{\text{polea}} = \dfrac{1}{2}m.R^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 . \frac{v^2}{R^2}\right) - Mgd\operatorname{sen}\theta = -\mu_k\, Mg\cos\theta\, d$$

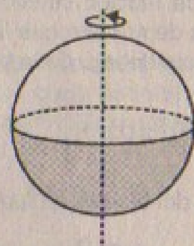
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2\left[M + \frac{m}{2}\right] = Mgd\,(\operatorname{sen}\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{4\,Mg\,d\,(\text{sen}\theta - \mu_k \cos\theta)}{2\,M + m}$$

$$\therefore \quad v = \left[4gd\left(\frac{M}{2M+m}\right)(\text{sen}\theta - \mu_k \cos\theta)\right]^{1/2}$$

49. a) ¿Cuál es la energía rotacional de la Tierra alrededor de su eje de rotación? El radio de la Tierra es de 6 370 km y su masa de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg. Considere a la Tierra como una esfera de momento de inercia igual a $\frac{2}{5}MR^2$. b) La energía rotacional de la Tierra disminuye de manera sostenida debido a la fricción de la marea. Encuentre el cambio de la energía rotacional en un día, dado que el período rotacional disminuye aproximadamente 10 ms cada año.

Resolución:



Radio de la Tierra = 637×10^4 m
Masa de la Tierra = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg

$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$

T = 3,156 × 107 s

Parte (a) $E_R = \frac{1}{2} I . \omega^2 = \frac{1}{2} I . \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad E_R = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(5{,}98\times10^{24})(637\times10^4)^2\left(\frac{2\pi}{3{,}156\times10^7}\right)^2$$

$$\therefore \quad E_R = 1923\ 525\times10^{18} \text{ joules}$$

Parte (b) $E_{rotacional}\,(1\text{ día}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(5{,}98\times10^{24})(637\times10^4)^2\left[\frac{2\pi}{864\times10^2}\right]^2$

$$\Rightarrow \quad E_{rot} = 25{,}67\times10^{28}\text{ J}$$

$E_{\text{rotacional de la fricción}}$:

T en un año disminuye ---- 10^{-5} s $\quad\quad \therefore \quad x = 274 \times 10^{-10}$ s

T en un día disminuye ---- x

$$\Rightarrow \quad E_R = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(5{,}98\times10^{24})(637\times10^4)^2.\left[\frac{2\pi}{274\times10^{-10}}\right]^2$$

$$\therefore \quad E_R = 255{,}2\times10^{52} \text{ joules}$$

Luego el cambio en la energía será:

$$255{,}2 \times 10^{52} - 25{,}67\times10^{28} = 10^{28}\,(255{,}2\times10^{24}) \text{ joules}$$

50. La velocidad de una bala en movimiento puede determinarse al permitir que ésta atraviese dos discos giratorios de papel montados sobre un mismo eje y separados una distancia *d* (Fig. P10.50). A partir del desplazamiento angular $\Delta\theta$ de los dos agujeros de la bala en los discos y de la velocidad rotacional podemos determinar la velocidad *v* de la bala. Encuentre la velocidad de la bala para los siguientes datos: d = 80 cm, ω = 900 rev/min y $\Delta\theta = 31°$.

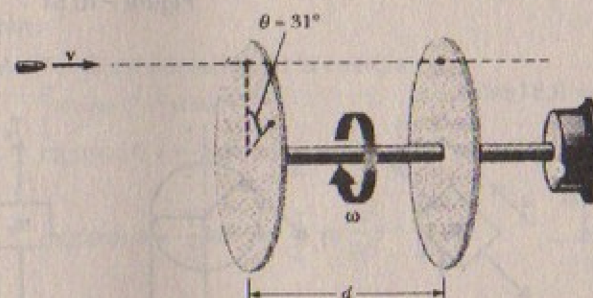


Figura P10.50

Resolución:

Datos: $\Delta\theta = 31°$; d = 0,8 m

$$f = \frac{900\text{ rev}}{60\text{ s}} = 15\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\,(3{,}1416)\,(15) = 94{,}25 \text{ rad/s}$$

$$\omega . T = \frac{31}{360} . 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \omega . T = \frac{31}{360}(2)(3{,}1416) \quad \therefore \quad T = \frac{31\times2\times3{,}1416}{360\times(94{,}25)} = 6\times10^{-3}\text{s}$$

En consecuencia: $\quad v \times T = d \Rightarrow v = \frac{d}{T}$

Luego: $\quad v_{bala} = \frac{0{,}8}{6\times10^{-3}} = 133{,}3 \text{ m/s}$

51. Los bloques mostrados en la figura P10.51 están unidos entre sí por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio R = 0,250 m y momento de inercia *I*. El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud $a = 2{,}00$ m/s². a) Determine T_1 y T_2 las tensiones en las dos partes de la cuerda, y b) encuentre el momento de inercia de la polea.

51A. Los bloques mostrados en la figura P10.51 están unidos entre sí por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio *R* y momento de inercia *I*. El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud *a*. a) Determine T_1 y T_2 las tensiones en las dos partes de la cuerda, y b) encuentre el momento de inercia de la polea.

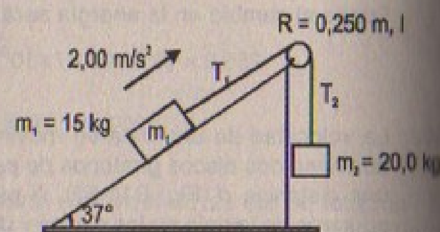
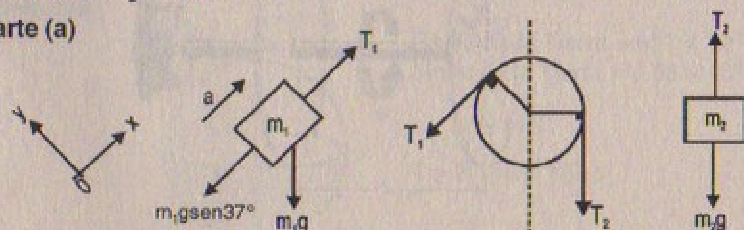


Figura P10.51

Resolución:

Comsiderar: $g = 9{,}81\ m/s^2$

Parte (a)



Por la segunda ley: $\Sigma F_x = m_1 a$

$\Rightarrow \quad T_1 - m_1 g sen37° = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1\,(g sen37° + a)$

$\therefore \quad T_1 = 15\,[9{,}81\,(0{,}6) + 2] = 118{,}3\ N$

Por otro lado: $m_2 g - T_2 = m_2 a \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2\,(g - a)$

$\therefore \quad T_2 = 20\,(9{,}81 - 2) = 156{,}2\ N$

Parte (b) $\tau = I_{polea} \cdot \alpha = T_2 R - T_1 R$

$$\Rightarrow \quad I_{polea} \cdot \frac{a}{R} = R(T_2 - T_1) \Rightarrow \quad I_{polea} = \frac{R^2(T_2 - T_1)}{a}$$

Luego: $$I_{polea} = \frac{(0{,}25)^2}{(2)}\,[156{,}2 - 118{,}3] = 1{,}1875\ kg.m^2$$

52. La polea que se muestra en la figura P10.52 tiene un radio *R* y momento de inercia *I*. Un extremo de la masa *m* está conectado a un resorte de constante de fuerza *k*, y el otro está unido a una cuerda enrollada alrededor de la polea. El eje de la polea y la pendiente son sin fricción. Si la polea está enrollada en dirección contraria a las

manecillas del reloj de modo que alarga el resorte una distancia *d* a partir de su posición de equilibrio y después se suelta desde el reposo, encuentre a) la velocidad angular de la polea cuando el resorte está nuevamente indeformado, y b) un valor numérico para la velocidad angular en este punto si I = 1,0 kg.m², R = 0,30 m, k = 50 N/m, m = 0,50 kg, d = 0,20 m y θ = 37°.

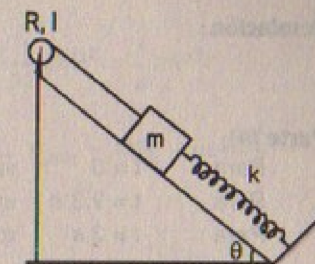


Figura P10.52

Resolución:

Parte (a) Por la conservación de la energía

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad mgdsen\,\theta + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad mgdsen\,\theta + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}\,m\frac{\omega^2}{R^2} + \frac{1}{2}\,I\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(\frac{m}{2R^2} + \frac{I}{2}\right) = d\left(mgsen\,\theta + \frac{1}{2}kd\right)$$

Luego: $$\omega_f^2 = \frac{2R^2 d\,(2mg\ sen\,\theta + kd)}{2m + 2R^2 I}$$

$$\therefore \quad \omega_f = \left[\frac{R^2 d}{m + R^2 I}\,(2mgsen\,\theta + kd)\right]^{1/2}$$

Parte (b) I = 1,0 kg m² ; R = 0,30 m ; k = 50 N/m ; m = 0,5 kg

d = 0,20 m; θ = 37°

Entonces: $$\omega_f = \left[\frac{(0{,}30)^2(0{,}20)}{(0{,}5) + 1(0{,}3)^2}\cdot\left[2(0{,}5)(9{,}81)(0{,}6) + 50(0{,}2)\right]\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad \omega_f = 0{,}696\ rad/s$$

53. Como consecuencia de la fricción, la velocidad angular de una rueda cambia con el tiempo de acuerdo con $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$, donde ω_0 y σ son constantes. La velocidad angular cambia de 3,50 rad/s en t = 0 a 2,00 rad/s en t = 9,30 s. Con esta información determine s y ω_0. Luego determine a) la magnitud de la aceleración angular en t = 3,00 s, b) el número de revoluciones que la rueda realiza en los primeros 2,50 s, y c) el número de revoluciones que efectúa antes de detenerse.

Resolución :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_o \cdot e^{-\sigma t}$$

Parte (a)

Para $t = 0$ $\qquad \omega_o = 3{,}50$ rad/s

Para $t = 9{,}3$ s $\qquad \omega\,(9{,}3) = 2{,}00$ rad/s

Para $t = 3$ s $\qquad \alpha\,(3) = ?$

Entonces: $\omega\,(9{,}3) = (3{,}50)\,.\,e^{-\sigma(9,3)}$

$\Rightarrow \quad 2{,}00 = (3{,}50)\,.\,e^{-\sigma(9,3)}$

$\Rightarrow \quad \ln\left(\dfrac{2{,}00}{3{,}50}\right) = -(9{,}3)\,\sigma \qquad \therefore\ \sigma = -\dfrac{\ln(0{,}57)}{9{,}3}$

Luego: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \alpha(t) = -(3{,}5)(-0{,}07).e^{-0{,}07\,t}$

Entonces: $\alpha\,(3{,}00\,s) = (-3{,}5)(-0{,}07)\ e^{-(0{,}07)(3)}$

$\therefore\ \alpha\,(3{,}00\ s) = -0{,}176\ \text{rad/s}^2$

Parte (b)

Sabemos que: $\omega(2{,}50) = (3{,}5)\,e^{-(0{,}07)(2{,}5)} \quad \Rightarrow \quad \omega(2{,}5) = 8{,}11$ rad/s

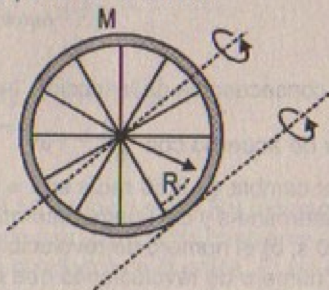
pero: $\omega(2{,}5) = 2\pi f$

$\Rightarrow \quad f = \text{n.° revoluciones} = \dfrac{8{,}11}{2\pi} = 1{,}29$ rev

Parte (c) $\quad \omega(t) = 0 = (3{,}5)\,.\,e^{-(0{,}07)\,t}$

54. Una rueda está integrada por un aro y n rayos igualmente espaciados. La masa del aro es *M* y su radio (y por lo tanto, la longitud de cada rayo) es *R*. Si la masa de cada rayo es *m*, determine el momento de inercia de la rueda. a) Alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la rueda y b) alrededor de un eje que pasa por el aro y es perpendicular al plano de la rueda.

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $dI = R^2\,dm$

$\Rightarrow \quad \int dI = R^2 \int dm$

$\Rightarrow \quad I_{aro} = R^2 M$

Por otro lado: $\quad$ EL $I_{rayo} = m\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = m\,.\,\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{1}{12}\,mR^2 = \dfrac{1}{3}mR^2$

$\Rightarrow \quad n\,.\,I_{rayos} = n\,.\,m\,\dfrac{R^2}{3} \qquad \therefore\ I_{rueda} = MR^2 + nm\,\dfrac{R^2}{3}$

Parte (b) $\quad I_{aro} = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

$I_{rayo} = \dfrac{m}{3}\,(2R)^2 = \dfrac{4}{3}\,mR^2$

$\Rightarrow \quad n\,.\,I_{rayos} = n\,.\,\dfrac{4}{3}m\,R^2 \qquad \therefore\ I_{rueda} = 2\,MR^2 + \dfrac{4}{3}\,nm\,R^2$

55. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior *R*/2, un radio exterior *R* y masa *M* (Fig. P10.55). Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa *m* está conectada al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa *m* desciende a partir del reposo una distancia «y» durante un tiempo *t*. Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas friccionantes entre el carrete y el eje es

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - \frac{5}{4}M\left(\frac{y}{t^2}\right)\right]$$

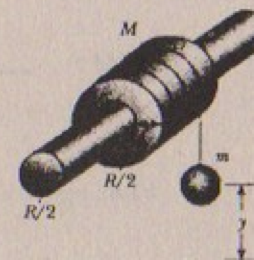


Figura P10.55

Resolución :

$$I_{cilindro\ hueco} = \frac{1}{2}\,M\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right] = \frac{5}{8}\,MR^2$$

Sabemos que: $\quad y = \dfrac{1}{2}\,at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{2y}{t^2}$

Además: $\quad mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad T = mg - m\left(\dfrac{2y}{t^2}\right)$

Entonces: $\quad \tau_{total} = TR - \tau_{fricción} = I_{cilindro\ hueco}\cdot\dfrac{a}{R}$

$\Rightarrow \quad \tau_{fricción} = TR - I_{c.hueco}\cdot\dfrac{a}{R} = m\left(g - \dfrac{2y}{t^2}\right)R - \dfrac{5}{8}\,MR^2\left(\dfrac{2y}{t^2}\right)\left(\dfrac{1}{R}\right)$

$\therefore \quad \tau_{fricción} = R\left[m\left(g - \dfrac{2y}{t^2}\right) - \dfrac{5}{4}\,M\left(\dfrac{y}{t^2}\right)\right] \qquad$ l.q.q.d

56. Un motor eléctrico puede acelerar una rueda de la fortuna de momento de inercia $I = 20\ 000$ kg . m^2 a partir del reposo hasta 10 rev/min en 12 s. Cuando el motor se apaga, la fricción ocasiona que la rueda se frene de 10 a 8,0 rev/min en 10 s. Determine, a) el momento de torsión generado por el motor para llevar la rueda hasta 10 rev/min, y b) la potencia necesaria para mantener esta velocidad rotacional.

Resolución :

$$I = 2 \times 10^4 \text{ kg.m}^2 \ ; \quad \omega_0 = 0 \ ; \ \omega_f = \frac{2\pi \times 10}{60} = 1{,}0472 \text{ rad/s} \ ; \ \ t = 12 \text{ s}$$

Parte (a) $\omega_f = \omega_0 + \alpha t \ \Rightarrow \ \alpha = 0{,}0873 \text{ rad/s}^2$

Entonces: $\tau = I.\alpha = (2\times10^4)(0{,}0873) = 1\ 746 \text{ N.m}$

Parte (b) $\text{Potencia} = \tau.\ \omega = (1\ 746)\ (1{,}0472)$

$\therefore$ Potencia = 1 828 watts

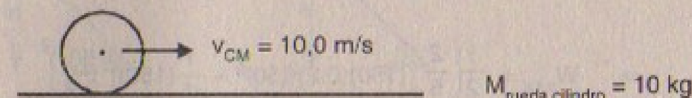
Capítulo 11

MOVIMIENTO DE RODAMIENTO, MOMENTO ANGULAR Y MOMENTO DE TORSIÓN

MOVIMIENTO DE RODAMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

1. Un cilindro de 10,0 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. En el instante en que su centro de masa tiene una velocidad de 10,0 m/s, determine a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía rotacional alrededor de su centro de masa, y c) su energía total.

Resolución :



$M_{\text{rueda cilindro}} = 10$ kg

Parte (a) $I_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} MR^2$

$v_{CM} = 10 \ \Rightarrow \ R.\omega = 10 \ \therefore \ \omega = \frac{10}{R} \text{ rad/s}$

$E_{K\,(\text{traslacional})} = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2$

$\Rightarrow \ E_{K\,\text{traslacional}} = \frac{1}{2}(10)(10)^2 = 500 \text{ joules}$

Parte (b) $E_{K\,\text{rotacional}} = \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2$

$\Rightarrow \ E_{K\,\text{rotacional}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{10}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}(10)(100)$

$\therefore \ E_{K\,\text{rotacional}} = 250 \text{ joules}$

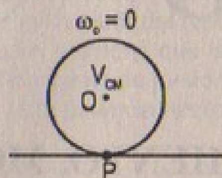
Parte (c) Energía total = $E_{K\,\text{rotación}} + E_{K\,\text{traslacional}}$

$\Rightarrow$ Energía total = 500 + 250

$\therefore$ Energía total = 750 joules

2. Una esfera sólida tiene un radio de 0,200 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una velocidad angular de 50,0 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).

Resolución :



$M_{esfera} = 150$ kg

Radio = 0,200 m ; $I_{CM\ esfera} = \frac{2}{5}MR^2$

$\omega_{final} = 50$ rad/s

Por el teorema del trabajo y la energía

$$W_{total} = E_{K\ total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{1}{2}I_P \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)(50)^2 + \frac{1}{2}(150)\left(\frac{50}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(150)(0.2)^2(50)^2 + \frac{1}{2}(150)\left(\frac{50}{0,2}\right)^2$$

$$\therefore \quad W_{total} = 4,69 \times 10^6 \text{ joules}$$

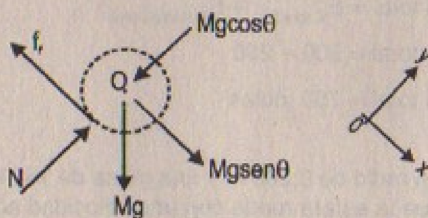
3. a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado y compare esta aceleración con la de un aro uniforme. b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción necesario para mantener el movimiento de rodamiento puro del disco?

Resolución :



$I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2$

Parte (a)



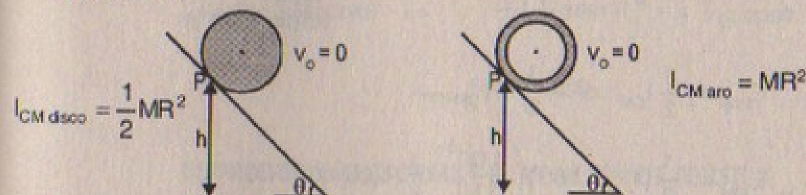
Por dinámica: $\Sigma F_x = ma \Rightarrow mgsen\theta - f_r = m.a$

$$\Sigma\tau_0 = I_{CM} \cdot \alpha \Rightarrow f_r(R) = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a_{CM}}{R}\right) \quad \therefore \; f_r = \frac{Ma}{2}$$

Entonces: $\quad Mgsen\theta - \frac{M}{2}a_{CM} = M \cdot a_{CM} \quad \therefore \; a_{CM} = \frac{2}{3}g\,sen\,\theta$ (disco)

4. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura *h*. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus velocidades cuando alcanzan el pie de la pendiente. ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

Resolución :



$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad I_{CM\ aro} = MR^2$

- Hallando la v_{CM} del disco por conservación de energía:

$$\Rightarrow \quad E_K = E_{potencial}$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}I_{CM} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}M \cdot v_{CM}^2$$

$$\therefore \quad v_{CM(disco)} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \text{ m/s}$$

- Hallando v_{CM} del aro: $\quad E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}I_{CM} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}M \cdot v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$\therefore \quad v_{CM\ (aro)} = \sqrt{gh}$$

Como: La velocidad del "disco" es mayor que la velocidad del "aro" entonces el disco llegará primero a la parte inferior.

Luego: $\quad 28,2528 + 9,408 + 117,6 = 23,544\ d \quad \Rightarrow \quad d = 6,59$ m

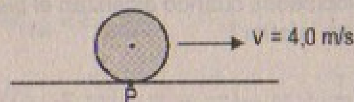
pero: $\quad d = xsen\theta \quad \Rightarrow \quad 6,59 = x\ sen37° = x\ (0,6)$

$$\therefore \quad x = 10,99 \text{ m}$$

5. Una bola de boliche tiene una masa de 4,0 kg, un momento de inercia de $1{,}6 \times 10^{-2}$ kg . m² y un radio de 0,10 m. Si rueda por la pista sin deslizar a una velocidad lineal de 4,0 m/s, ¿cuál es su energía total?

5A. Una bola de boliche tiene una masa *M*, radio *R* y un momento de inercia de $\frac{2}{5}MR^2$. Si rueda por la pista sin deslizar a una velocidad lineal *v*, ¿cuál es su energía total en función de *M* y *v*?

Resolución :



$I_{\text{bola boliche}} = 1{,}6 \times 10^{-2}$ kg
$M_{\text{boliche}} = 4{,}0$ kg
Radio = 0,1 m

$$E_{total} = \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2}(1{,}6 \times 10^{-2})\left(\frac{4{,}0}{0{,}1}\right)^2 + \frac{1}{2}(4{,}0)(4{,}0)^2$$

$$\therefore \quad E_{total} = 44{,}8 \text{ joules}$$

6. Un anillo de 2,4 kg de masa, radio interior de 6,0 cm y radio exterior de 8,0 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 36{,}9°$ con la horizontal (Fig. P11.6). En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia x = 2,0 m al ascender por el plano su velocidad es de 2,8 m/s. El anillo continúa ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no rueda fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?



Figura P11.6

Resolución :

$\theta = 37°$ $\qquad R_{interior} = 6 \times 10^{-2}$ m

$R_{exterior} = 8 \times 10^{-2}$ m $\qquad$ Masa = 2,4 kg

x = 2,0 m $\qquad$ v = 2,8 m/s

Parte (a) $\quad I_{CM\ anillo} = \frac{1}{2} M \left(R_i^2 + R_{ex}^2\right)$

$$\Rightarrow \quad I_{CM\ anillo} = \frac{1}{2}(2{,}4)\left[(6 \times 10^{-2})^2 + (8 \times 10^{-2})^2\right]$$

$$\therefore \quad I_{CM\ anillo} = 1{,}2 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

Por conservación de energía: $\quad E_{MB} = E_{MC}$

$$\Rightarrow \quad Mgh + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 = mgd$$

$$\Rightarrow \quad Mg\,(x\,\text{sen}\theta) + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M\left(R_i^2 + R_{ext}^2\right)\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 = Mgd$$

$$\Rightarrow \quad (2{,}4)(9{,}81)(2)(0{,}6) + \frac{1}{2}(2{,}4)(2{,}8)^2 + \frac{1}{2}(1{,}2 \times 10^{-2})\left(\frac{2{,}8}{2{,}10^{-2}}\right)^2 = (2{,}4)(9{,}81)d$$

Parte (b) $\quad N = Mg\cos\theta$

$$f_r = \mu N = \mu Mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\left(\frac{2}{3} g\,\text{sen}\theta\right) = \mu\ mg\cos\theta$$

$$\therefore \quad \mu_{minimo} = \frac{1}{3}\tan\theta$$

EL PRODUCTO VECTORIAL Y EL MOMENTO DE TORSIÓN

7. Dos vectores están dados por $\vec{A} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$, y $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$. Encuentre a) $\vec{A} \times \vec{B}$ y b) el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Resolución :7

$\vec{A} = -3\hat{i} + 4\hat{j} \qquad \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$

Parte (a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = -9\hat{k} - 8\hat{k} = -17\hat{k}$$

Parte (b) $\quad |\vec{A}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$$

Entonces sabemos: $\quad |A \times B| = |A||B|\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad 17 = (5)(3{,}6)\text{sen}\theta$$

$$\therefore \quad \text{sen}\theta = \frac{17}{18} = 0{,}944$$

Luego: $\quad \theta = \text{arc sen}\,(0{,}944) \approx 70{,}5°$

8. Un estudiante afirma que ha encontrado un vector A tal que $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$. ¿Cree usted que esto es cierto? Explique.

Resolución:

$$(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

Sea: $\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$$\Rightarrow \quad (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad (-3c - 4b)\hat{i} + (4a - 2c)\hat{j} + (2b + 3a)\hat{k} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

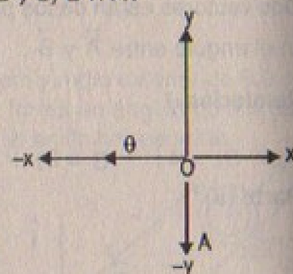
Luego: $-3c - 4b = 4$
$4a - 2c = 3$
$2b + 3a = -1$

Resolviendo: no hay solución para: a, b, c

En consecuencia: "Esto no es cierto"

9. El vector A apunta en la dirección *y* negativa y el vector B apunta en la dirección *x* negativa. ¿Cuáles son las direcciones de a) A × B y b) B × A?

Resolución:



Parte (a) $\vec{A} \times \vec{B} = |A||B|\,\text{sen}\theta$

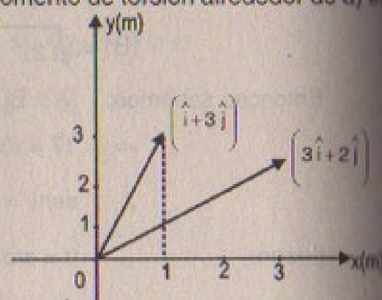
$\therefore \quad \theta = 270°$ (negativa)

Parte (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\Rightarrow \quad \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} = -270°$ (positiva)

10. Una partícula se localiza en el vector de posición $r = (\hat{i} + 3\hat{j})$ m y la fuerza que actúa sobre ella es igual a $(3\hat{i} + 2\hat{j})$ N. ¿Cuál es el momento de torsión alrededor de a) el origen y b) el punto con coordenadas (0; 6) m?

Resolución:



Parte (a)

$\tau_0 = \vec{r} \times \vec{F} = (3\hat{i} + 3\hat{j}) \times (3\hat{i} + 2\hat{j})$

$\Rightarrow \quad \tau_0 = 2\hat{k} - 9\hat{k} = -7\hat{k}$

Parte (b)

0' = origen (0; 6) m $\quad \therefore \quad \vec{r} = (\hat{i} + 3\hat{j}) - 6\hat{j} = \hat{i} - 3\hat{j}$

$$\tau_0 = \vec{r} \times \vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j}) \times (3\hat{i} + 2\hat{j}) \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 11\,\hat{k}$$

11. Si $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$, ¿cuál es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

Resolución:

Si $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$ (por dato)

Nosotros sabemos que: $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|\,\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|\,\text{sen}\theta = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta$$

$$\therefore \quad \text{sen}\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \pi/4$$

12. Verifique la ecuación 11.14 y demuestre que el producto cruz puede escribirse.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Resolución:

Por demostrar: $\quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

Por la ecuación (11.14) se verifica que:

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\,\hat{i} + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z)\,\hat{j} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)\,\hat{k}$

Entonces:

$A_y \cdot B_z\hat{i} - A_z \cdot B_y\hat{i} + A_z \cdot B_x\hat{j} - A_x \cdot B_z\hat{j} + A_x \cdot B_y\hat{k} - A_y \cdot B_x\hat{k} \quad \ldots (1)$

Por otro lado:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = A_x \cdot B_x\hat{i} \times \hat{i} + A_x \cdot B_y\hat{i} \times \hat{j} + A_x \cdot B_z\hat{i} \times \hat{k} +$
$A_y \cdot B_x\hat{j} \times \hat{i} + A_y \cdot B_y\hat{j} \times \hat{j} + A_y \cdot B_z\hat{j} \times \hat{k} +$
$A_z \cdot B_x\hat{k} \times \hat{i} + A_z \cdot B_y\hat{k} \times \hat{j} + A_z \cdot B_z\hat{k} \times \hat{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = A_x \cdot B_y\hat{k} - A_x \cdot B_z\hat{j} - A_y \cdot B_x\hat{k} + A_y \cdot B_z\hat{i} + A_z \cdot B_x\hat{j} - A_z \cdot B_y\hat{i}$

Ordenando:

$(A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\hat{i} + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z)\hat{j} + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x)\hat{k} \quad \ldots (2)$

En consecuencia:

Como (2) = (1)

Entonces: $\quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad$ l.q.q.d

13. Dos fuerzas F_1 y F_2 actúan a lo largo de los dos lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P11.13. Encuentre una tercera fuerza F_3 para aplicarse en *B* y a lo largo de *BC* que producirá un momento de torsión neto alrededor del punto de intersección de las alturas igual a cero. ¿El momento de torsión neto cambiará si F_3 no se aplica en *B* sino en otro punto a lo largo de *BC*?

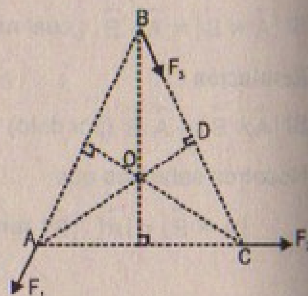


Figura P11.13

Resolución :

$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad F_3\cos60° + F_2 = F_1\cos60°$

$\Rightarrow \quad \dfrac{F_3}{2} + F_2 = \dfrac{F_1}{2}$

$\therefore \quad F_3 = F_1 - 2F_2 \quad ...(1)$

$$\Sigma\tau_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2\left(\frac{2L\sqrt{3}}{3}\right) + F_1\left(\frac{2L\sqrt{3}}{3}\right) = F_3\left(\frac{2L\sqrt{3}}{3}\right)$$

$\therefore \quad F_2 + F_1 = F_3 \quad ...(2)$

(2) en (1)

$\Rightarrow \quad F_2 + F_1 = F_1 - 2F_2 \qquad \therefore \quad 3F_2 = 0$

En consecuencia: $\quad |F_1| + |F_2| = F_3$

como la línea de acción donde se aplica la fuerza F_3 es a lo largo de BC entonces el momento de torsión neto no cambiará.

14. Una fuerza $\vec{F} = (2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ N se aplica a un objeto que está articulado alrededor de un eje fijo alineado a lo largo del eje de coordenadas **z**. Si la fuerza se aplica en el punto $\vec{r} = (4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} + 0\hat{k})$ m, encuentre, a) la magnitud del momento de torsión neto alrededor del eje z, y b) la dirección del vector de momento de torsión τ.

Resolución :

$\vec{F} = (2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ N ; $\quad \vec{r} = (4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} + 0\hat{k})$ m

Parte (a) $\quad \tau_0 = \vec{r} \times \vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j})$

$\Rightarrow \quad \tau_0 = 10\hat{i} \times \hat{j} + 12\hat{j} \times \hat{i}$

$\therefore \quad \tau_0 = 10\hat{k} - 12\hat{k} = -2\hat{k}$

Parte (b) $\quad |\vec{A}\times\vec{B}| = 22 = |A| \,.\, |B|\operatorname{sen}\theta$

$F = |\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$

$r = |\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$

$\Rightarrow \quad 22 = (3{,}6)(6{,}4)\operatorname{sen}\theta$

$\therefore \quad \operatorname{sen}\theta = 0{,}95 \qquad \theta = \operatorname{arc\,sen}(0{,}95)$

MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

15. Una barra rígida ligera de 1,00 m de largo gira en el plano xy alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas 4,00 kg y 3,00 kg se conectan a sus extremos (Fig. P11.15). Determine el momento angular del sistema alrededor del origen en el instante en que la velocidad de cada partícula es 5,00 m/s.

15A. Una barra rígida ligera de longitud *d* gira en el plano *xy* alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se conectan a sus extremos (Fig. P11.15). Determine el momento angular del sistema alrededor del origen en el instante en que la velocidad de cada partícula es *v*.

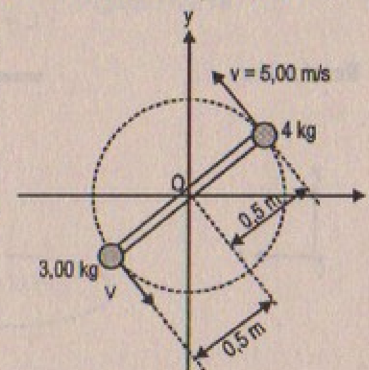


Figura P11.15

Resolución :

$\Sigma l_0 = 4(0{,}5)(5) + 3(0{,}5)(5) \qquad \therefore \quad L_0 = 17{,}5$ kg.m²/s

16. En un cierto instante la posición de una piedra en una honda está dada por $\vec{r} = (1{,}7\hat{i})$ m. El momento lineal **p** de la piedra es $(12\hat{j})$ kg . m/s. Calcule su momento angular $\mathbf{l} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Resolución :

$r = 1{,}7\hat{i}$ m ; $\quad \vec{p} = 12\hat{j}$ kg . m/s

$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 1{,}7\hat{i} + 12\hat{j} = 20{,}4\hat{i} \times \hat{j}$

$\therefore \quad \vec{L} = 20{,}4\,\hat{k}$ kg.m²/s

17. El vector de posición de una partícula de 2,0 kg de masa está dado como una función del tiempo por $\vec{r} = (6{,}0\hat{i} + 5{,}0t\hat{j})$ m. Determine el momento angular de la partícula como una función del tiempo.

Resolución :

$m = 2{,}0$ kg ; $\vec{r} = (6{,}0\hat{i} + 5{,}0\,t\,\hat{j})$ m

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = (5{,}0\,\hat{j})\text{ m/s}$$

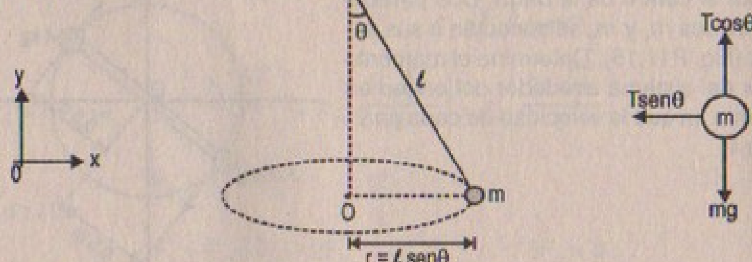
$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (6{,}0\hat{i} + 5{,}0\,t\hat{j}) \times 2(5{,}0)\hat{j} \Rightarrow \quad L = 60\hat{i} \times \hat{j} + 0$$

$$\therefore \quad L = 60\,\hat{k}\text{ kg.m/s}^2$$

18. Un péndulo cónico consta de una plomada de masa m que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se ilustra en la figura. Durante el movimiento, el alambre de soporte de longitud ℓ mantiene un ángulo constante θ con la vertical. Muestre que la magnitud del momento angular de la plomada respecto del punto de soporte es

$$L = \sqrt{\frac{m^2 g \ell^3 \operatorname{sen}^4\theta}{\cos\theta}}$$

Resolución :



Por demostrar: $L = \sqrt{\dfrac{m^2 g \ell^3 \operatorname{sen}^4\theta}{\cos\theta}}$

Por M.C.U: $\quad T\operatorname{sen}\theta = m \cdot \dfrac{v^2}{r} = m\dfrac{v^2}{\ell\operatorname{sen}\theta} \quad \ldots (1)$

Por otro lado: $\quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

De (1) $\quad \dfrac{mg}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta = m\dfrac{v^2}{\ell\operatorname{sen}\theta} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\dfrac{\ell\operatorname{sen}^2\theta . g}{\cos\theta}}$

Entonces: $\quad L = r \times p = \ell\operatorname{sen}\theta \,.\, m \,.\, \sqrt{\dfrac{\ell.\operatorname{sen}^2\theta . g}{\cos\theta}}$

$$\therefore \quad L = \sqrt{\frac{\ell^3 m^2 \operatorname{sen}^4\theta\, g}{\cos\theta}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

19. Una partícula de masa *m* se mueve en un círculo de radio *R* a una velocidad constante *v*, como se indica en al figura P11.19. Si el movimiento empieza en el punto *Q* determine el momento angular de la partícula alrededor del punto *P* como una función del tiempo.

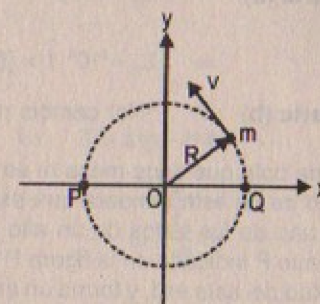


Figura P11.19

Resolución :

$\vec{r}(t) = (x; y) \quad ; \quad \omega = \dfrac{v}{R}$

$\vec{x}(t) = R\cos\theta\,\hat{i} \quad ; \quad \vec{y}(t) = R\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

Parte del ángulo $\theta = 0$

$$\Rightarrow \quad r(t) = (R + R\cos(\omega t)\,\hat{i} + R\operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{j})\text{ m}$$

Entonces: $\quad L(t) = \vec{r}(t) \times \vec{P}$

$$\Rightarrow \quad L(t) = \left(\left[R + R\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right]\hat{i} + R\operatorname{sen}\left(\frac{v}{R}t\right)\hat{j}\right) \times m.v\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad L(t) = mvR\hat{k} + mvR\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\hat{k}$$

$$\therefore \quad L(t) = mvR\left(1 + \cos\left(\frac{vt}{R}\right)\right)\hat{k}$$

20. Un avión de 12 000 kg de masa efectúa un vuelo horizontal respecto del suelo a una altura de 10,0 km con una velocidad constante de 175 m/s respecto de la Tierra. a) ¿Cuál es la magnitud del momento angular del avión en relación con un observador en el suelo directamente abajo del avión? b) ¿Este valor cambia conforme el avión continúa su movimiento a lo largo de una línea recta?

Resolución:

Masa del avión = 12×10^3 kg → $v_{avión} = 175$ m/s

10^4 m

Parte (a) $L_0 = r \times p$

$$\Rightarrow \quad L_0 = 10^4\,\hat{j} \times [(12 \times 10^3)\,175]\,\hat{i} \qquad \therefore \quad L_0 = 21 \times 10^9\,\hat{k}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Parte (b) "No" cambia puesto que depende solo de la altura

21. Una bola que tiene masa m se une al extremo de un asta bandera que está conectada a uno de los lados de un alto edificio en el punto P indicado en la figura P11.21. La longitud del asta es l, y forma un ángulo θ con la horizontal. Si la bola se desprende y empieza a caer, determine su momento angular como una función del tiempo respecto de P. Ignore la resistencia del aire.

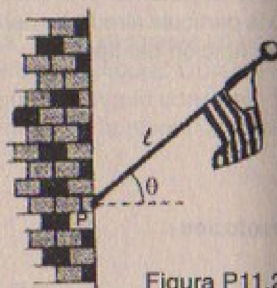


Figura P11.21

Resolución:

$$\tau_p = \frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_p = r \times p = \ell\cos\theta\,(\hat{i}) \times mg\,(-\hat{j}) \quad \Rightarrow \quad \tau_p = -mg\,\ell\cos\theta\,\hat{k}$$

Luego: $\quad -mg\,\ell\cos\theta\,\hat{k}\,dt = dL \qquad \therefore \quad L(t) = -mg\,\ell\cos\theta . t\,\hat{k}$

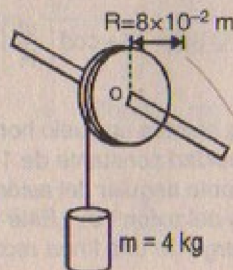
22. Una masa de 4,0 kg se une a una cuerda ligera, la cual está enrollada alrededor de una polea (Fig. 10.18). La polea es un cilindro sólido uniforme de 8,0 cm de radio y 2,0 kg de masa. a) ¿Cuál es el momento de torsión neto sobre el sistema alrededor del punto O? b) Cuando la masa tiene una velocidad *v*, la polea tiene una velocidad angular $\omega = v/R$. Determine el momento angular total del sistema respecto de O. c) A partir del hecho de que $\tau = dL/dt$ y su resultado de b) calcule la aceleración de la masa.

Resolución:

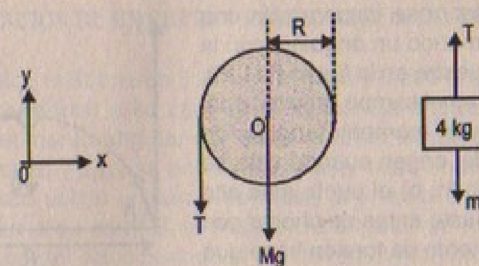
$I_{CM\ cilindro} = 1/2\ MR^2$

$g = 9,81\ m/s^2$

Masa de la polea = 2 kg



Parte (a)



$$\Sigma\tau_o = T.R = I_0 . \alpha = I_0\,\frac{a}{R} \qquad \ldots (1)$$

$$\Sigma F_y = ma \quad \Rightarrow \quad mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad T = mg - ma$$

Luego: de (1) $\quad mg - ma = I_0 . \dfrac{a}{R} \qquad \therefore \quad a = \dfrac{mg}{m + \dfrac{I_o}{R}}$

Luego: $\quad \Sigma\tau_o = \dfrac{I_o}{R}\left(\dfrac{mg}{m + \dfrac{I_o}{R}}\right)$

Reemplazando: $\quad \Sigma\tau_o = \dfrac{1}{2R}MR^2\left[\dfrac{mg}{m + \dfrac{1}{2R}MR^2}\right]$

$$\therefore \quad \Sigma\tau_o = 0,23\ \text{N.m}$$

Parte (b) $\quad L_0 = r \times p$

$$\Rightarrow \quad L_0 = R \times m.v = R \times M\,\omega.r$$

$$\therefore \quad L_0 = M.R^2\,\omega = (2)(8 \times 10^{-2})^2 . \omega$$

$$\therefore \quad L_0 = \frac{128}{100}\,\omega = 1,28\,\omega$$

Parte (c)

Sabemos que: $\quad \tau_o = \dfrac{dL_o}{dt} \quad \Rightarrow \quad 0,23\ \text{Nm} = \dfrac{d}{dt}\,(1,28\omega)$

$$0,23\ \text{N.m} = 1,28\alpha \qquad \therefore \quad \alpha = 0,179\ \text{rad/s}^2$$

En consecuencia: $\quad a_{sistema} = \alpha . R$

$$\Rightarrow \quad a = 0,179\,(8 \times 10^{-2}) \qquad \therefore \quad a = 0,0144\ \text{m/s}^2$$

23. Una partícula de masa m se dispara con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.23. La partícula se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Determine el momento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en: a) el origen, b) el punto más alto de su trayectoria, y c) justo antes de chocar con el suelo. d) ¿Qué momento de torsión hace que cambie su momento angular?

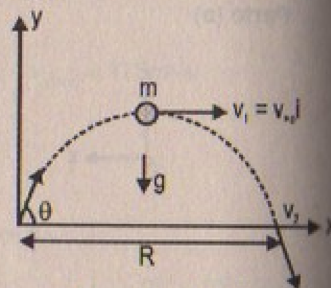


FIGURA P11.23

Resolución :

Parte (a) $L_0 = r \times p = (0\hat{i} + 0\hat{j}) \times (mv_0\cos\theta\ \hat{i} + mv_0\text{sen}\theta\ \hat{j})$

$$\therefore \quad L_0 = 0$$

Parte (b)

Por movimiento parabólico: $0 = v_0\ \text{sen}\theta - gt \quad \therefore \quad t = \dfrac{v_0\ \text{sen}\theta}{g}$

por otro lado: $\tau_0 = \dfrac{dL_0}{dt}$

$$\Rightarrow \quad -mg\hat{j} \times \left(\frac{v_0\cos\theta \,.\, v_0\,\text{sen}\theta}{g}\right)\hat{i} = \frac{dL_0}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{V_0\,\text{sen}\theta/g} -\frac{mg}{g}v_0^2\ \text{sen}\theta.\cos\theta\, dt\,\hat{k} = \int_0^{L_f} dL_0$$

$$\Rightarrow \quad L_0(t) = L_0(v_0\ \text{sen}\theta/g) = -\frac{mg}{g}\ v_0^2\text{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{v_0\ \text{sen}\theta}{g}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \quad L_0 = -\frac{m}{2g}\ v_0^3\ \text{sen}^2\theta\cos\theta\ \hat{k}$$

Parte (c)

$$t_{máx} = \frac{2\ v_0\ \text{sen}\theta}{g} \qquad x_{máx} = v_0\cos\theta \times 2\ \frac{v_0\ \text{sen}\theta}{g}\ \hat{i}$$

$v_2 = v_0\cos\theta\,\hat{i} - v_0\ \text{sen}\theta\ \hat{j}$

$L_0 = r \times p$

$$\Rightarrow \quad L_0 = \left(\frac{2}{g}v_0^2\ \text{sen}\theta\,.\cos\theta\ \hat{i} + 0\hat{j}\right) \times m(v_0\cos\theta\ \hat{i} - v_0\ \text{sen}\theta\ \hat{j})$$

$$\Rightarrow \quad L_0 = \frac{2}{g}mv_0^3\ \text{sen}^2\theta.\cos\theta\hat{k}$$

Parte (d)

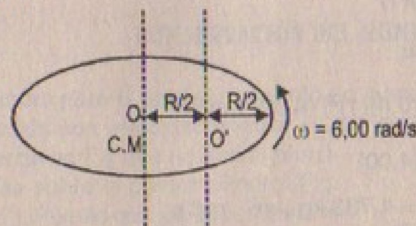
El "peso" ejerce momento de torsión, y esto hace que cambie su momento angular.

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

24. Un disco sólido uniforme de 3,00 kg de masa y 0,200 m de radio gira alrededor de un eje fijo perpendicular a su cara. Si la frecuencia angular de rotación es 6,00 rad/s, calcule el momento angular del disco cuando el eje de rotación, a) pasa por su centro de masa, y b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

24A. Un disco sólido uniforme de masa M y radio R gira alrededor de un eje fijo perpendicular a su cara. Si la frecuencia angular de rotación es w, calcule el momento angular del disco cuando el eje de rotación a) pasa por su centro de masa, y b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

Resolución :



Masa del disco: 3,00 kg

Radio = 0,200 m

$I_{CM\,radio} = \dfrac{1}{2}MR^2$

Parte (a)

Por conservación del momento angular

$$L_{CM} = I_{CM}\cdot\omega \quad \Rightarrow \quad L_{CM} = \frac{1}{2}(3)(0,2)^2 \times (6) = 0,36\ kg.m^2/s^2$$

Parte (b)

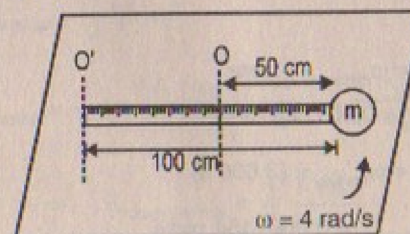
$$L_{0'} = (I_{CM} + I)\,\omega \quad \text{(por ejes paralelos)}$$

$$\Rightarrow \quad L_{0'} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right).\,\omega \quad \Rightarrow \quad L_{0'} = \left[\frac{1}{2}(3)(0,2)^2 + 3(0,1)^2\right]^6$$

$$\therefore \quad L_{0'} = 0,54\ kg.m^2.rad/s$$

25. Una partícula de 0,400 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla métrica de 0,100 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4,00 rad/s. Calcule el momento angular del sistema cuando la regla se articula en torno de un eje, a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50,0 cm, y b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.

Resolución :



Masa de m = 0,400 kg

Masa de la regla = 0,100 kg

Parte (a)

$$I_{CM\ de\ la\ regla} = I_{CM\ barra} = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}(0,1)(1)^2 = 0,0083\ kg\ .m^2$$

Entonces: $L_{CM} = L_0 = (I_{CM\ regla} + I_{masa})\ .\ \omega$

$$\Rightarrow \quad L_0 = [0,0083 + (0,4)\ (0,5)^2]\ (400)$$

$$\therefore \quad L_0 = 0,433\ kg.m^2.rad/s$$

Parte (b)

$$I_{0'\ barra} = I_{0'\ regla} = \frac{1}{2}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}(0,1)(1)^2$$

$$I_{0'\ masa} = M.L^2 = (0,4)(1)^2$$

Luego: $L_{0'} = (I_{regla} + I_{masa})\ .\ \omega$

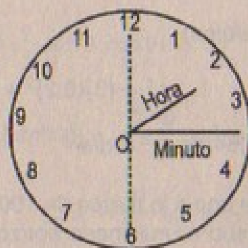
$$\Rightarrow \quad L_{0'} = [\frac{1}{3}(0,1)(1)^2 + (0,4)(1)^2]\ (4,00)\ rad/s$$

$$\Rightarrow \quad L_{0'} = (0,0333 + 0,4)(4,00)$$

$$\therefore \quad L_{0'} = 1,733\ kg\ .\ m^2\ .\ rad/s$$

26. Las manecillas de horas y minutos del Big Ben en Londres miden 2,7 m y 4,5 m de largo y tienen las masas de 60 kg y 100 kg respectivamente. Calcule su momento angular total alrededor del punto central. Considérelas como barras delgadas y largas.

Resolución :



Masa de la hora = 60 kg

Masa del minutero = 100 kg

$L_{horario} = 2,7\ m$

$L_{minutero} = 4,5\ m$

$$I_{0\ horario} = \frac{1}{3}(60)(2,7)^2 = 145,8\ kg.m^2$$

$$I_{0\ minutero} = \frac{1}{3}(100)(4,5)^2 = 675\ kg.m^2$$

Por otro lado:

En una hora: $2\pi\ rad = \omega_{minutero}\ 1\ hora$

$$\Rightarrow \quad \omega_{minutero} = 0,001745\ rad/s$$

$$\frac{\pi}{6}\ rad = \omega_{horario} \times (3\ 600\ s)$$

$$\therefore \quad \omega_{horario} = 0,0001454\ rad/s$$

Luego: $L_{0(horario)} = I_{0\ horario} \cdot \omega_{horario}$

$$\Rightarrow \quad L_{0(horario)} = (145,8)(0,0001454)$$

$$\therefore \quad L_{0\ (horario)} = 0,022\ kg.m^2.rad/s$$

$$L_{0(minutero)} = I_{0\ minutero} \cdot \omega_{minutero}$$

$$\therefore \quad L_{0\ (minutero)} = (675)(0,001745) = 1,1778\ kg.m^2\ rad/s$$

En consecuencia: $L_{0\ sistema} = L_{0\ horario} + L_{0\ minutero} = 0,022 + 1,778$

$$\therefore \quad L_{0\ sistema} = 1,199\ kg.m^2.rad/s$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

27. Un cilindro para el cual el momento de inercia es I_1 gira alrededor de un eje vertical sin fricción con velocidad angular ω_0. Un segundo cilindro, cuyo momento de inercia es I_2 y que no gira al principio, cae sobre el primer cilindro (Fig. P11.27). Puesto que las superficies no ofrecen fricción, en algún momento los dos discos alcanzarán la misma velocidad angular ω. a) Calcule ω. b) Muestre que se pierde energía en esta situación y calcule la proporción entre la energía rotacional final y la inicial.

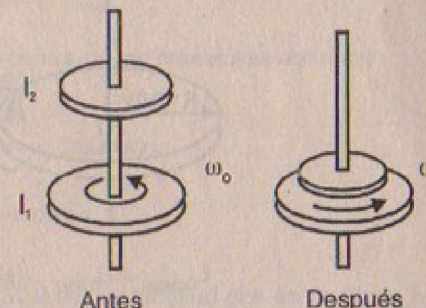


Figura P11.27

Resolución :

Parte (a) Por la conservación del momento angular

$$L_{inicial} = L_{final} \quad \Rightarrow \quad I_1\ .\ \omega_0 = (I_1 + I_2)\ .\ \omega$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{I_1\ .\ \omega_0}{I_1 + I_2}$$

Parte (b)

$$E_{rotacional\ inicial} = \frac{1}{2}I_1\ .\ \omega_0^2$$

$$E_{rotacional\ final} = \frac{1}{2}I_1\ .\left(\frac{I_1\ .\ \omega_0}{I_1 + I_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\ I_2\left(\frac{I_1 . \omega_0}{I_1 + I_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{rotacional\ final} = \frac{1}{2}\ \frac{I_1^2\ \omega_0^2}{I_1 + I_2}$$

Luego: La pérdida de energía será: $E_{\text{rotacional inicial}} - E_{\text{rotación final}}$

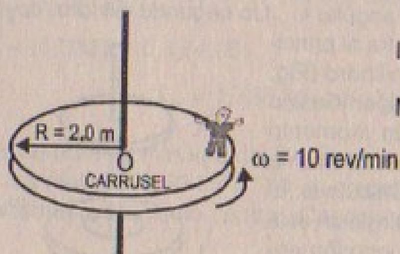
$$\Rightarrow \quad E_{\text{pérdida}} = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_0^2 - \frac{1}{2}\,\frac{I_1^2 \cdot \omega_0^2}{I_1 + I_2}$$

$$\therefore \quad E_{\text{pérdida}} = \frac{1}{2}\,\frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \cdot \omega_0^2$$

Luego: $$\frac{E_{\text{final}}}{E_{\text{inicial}}} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

28. Un carrusel de radio $R = 2{,}0$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kg.m² y gira a 10 rev/min. Un niño de 25 kg sube de un brinco al borde del carrusel. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del carrusel?

Resolución :



$I_{\text{carrusel}} = 250$ kg.m²

Masa del niño = 25 kg

$$L_{0\,\text{inicial}} = L_{0\,\text{final}} \quad \text{(sistema)}$$

$$\Rightarrow \quad L_{0\,\text{inicial}} = (250)\left(10\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\text{rev}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\,\text{s}}\right)$$

$$\therefore \quad L_{0\,\text{inicial}} = 261{,}8\ \text{kg.m}^2\text{.rad/s}$$

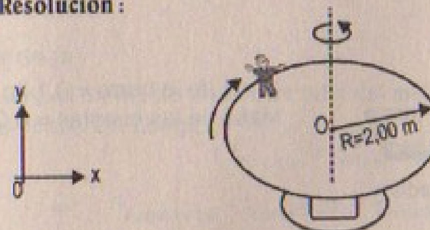
Por otro lado: $L_{0\,\text{final}} = (I_{0\,\text{carrusel}} + I_{0\,\text{niño}}) \cdot \omega_{\text{final}}$

$$\Rightarrow \quad L_{0\,\text{final}} = [250 + (25)(2)^2] \cdot \omega_{\text{final}}$$

Entonces: $261{,}8 = 350\ \omega_{\text{final}} \quad \therefore \quad \omega_{\text{final}} = 0{,}748$ rad/s

29. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal tiene un momento de inercia de 500 kg.m² y un radio de 2,00 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en la dirección de las manecillas del reloj (cuando se observa desde arriba del sistema), a una velocidad constante de 1,50 m/s en relación con la Tierra, a) ¿En qué dirección y con qué velocidad angular gira la mesa giratoria? b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria?

Resolución :



Masa de la mujer = 60 kg

$I_{\text{mesa}} = 500$ kg.m²

$v_{M/T} = 1{,}50$ m/s

Parte (a)

Por la conservación del momento angular:

$$L_{0\,\text{sistema inicial}} = L_{0\,\text{sistema final}}$$

$$(I_{\text{mujer}})\omega_0 = (I_{\text{mujer}} + I_{\text{mesa}}) \cdot \omega_{\text{final}}$$

$$\Rightarrow \quad -[(60)(2)^2]\left[\frac{1{,}5}{2}\right] = (60(2)^2 - 500) \cdot \omega_{\text{final}}$$

$$\therefore \quad \omega_{\text{final de la mesa}} = 0{,}69\ \text{rad/s} \quad \text{(en contra de las manecillas del reloj)}$$

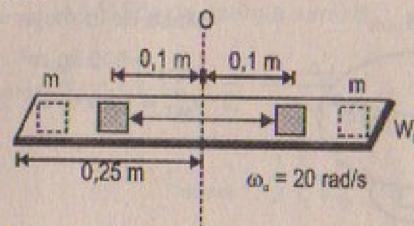
Parte (b) $W_{\text{mujer}} = \frac{1}{2} I_{\text{mujer}} \cdot \omega^2$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{mujer}} = \frac{1}{2}(240)\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2 = 67{,}5\ \text{joules}$$

30. Una barra uniforme de 100 g de masa y 50,0 cm de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un alfiler vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas cada una de 30,0 g de masa, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados a 10,0 cm a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira a una velocidad angular de 20,0 rad/s. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre, a) la velocidad angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y b) la velocidad angular de la barra después de que las cuentas han salido de ella.

30A. Una barra uniforme de masa M y longitud d gira en un plano horizontal en torno de un alfiler vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa m, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones x (donde $x < d/2$) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira a una velocidad angular ω. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre, a) la velocidad angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y b) la velocidad angular de la barra después de que las cuentas han salido de ella.

Resolución :



Masa de la barra = 0,1 kg
Masa de las cuentas = 0,03 kg

Parte (a)

Por conservación del momento angular:

$$L_{0\ \text{inicial del sistema}} = (I_{CM\ \text{barra}} + 2I_{\text{cuentas}}) \cdot \omega_0$$

$$\Rightarrow \quad L_{0\ \text{inicial del s.}} = [\frac{1}{12}(0,1)(0,5)^2 + 2(0,03)(0,1)^2]\ .\ 20$$

$$\therefore \quad L_{0\ \text{inicial del sistema}} = 0,053666\ \text{kg.m}^2\text{.rad/s}$$

$$L_{0\ \text{final del sistema}} = (I_{CM\ \text{barra}} + 2I_{\text{cuentas}}) \cdot \omega_{\text{final}}$$

$$\Rightarrow \quad L_{0\ \text{final del sistema}} = [\frac{1}{12}(0,1)(0,5)^2 + 2(0,03)(0,25)^2]\ .\omega_f$$

En consecuencia:

$$0,053666 = 0,0058333\ \omega_f \qquad \therefore \quad \omega_{\text{final}} = 9,2\ \text{rad/s}$$

Parte (b)

$$L_{0\ \text{inicial del sistema}} = L_{0\ \text{final de la barra}}$$

$$\Rightarrow \quad 0,053666 = \frac{1}{12}(0,1)(0,5)^2\ \omega_{\text{final}}$$

$$\therefore \quad w_{\text{final de la barra}} = 25,76\ \text{rad/s}$$

31. El estudiante de la figura 11.17 sostiene dos pesas, cada una de 10,0 kg de masa. Cuando sus brazos están extendidos horizontalmente, las pesas se encuentran a 1,00 m del eje de rotación y él gira con una velocidad angular de 2,00 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el del taburete es de 8,00 kg.m² y se supone constante. Si el estudiante desplaza las pesas horizontalmente a 0,250 m del eje de rotación, calcule a) la velocidad angular del sistema, y b) el cambio en la energía mecánica de éste.

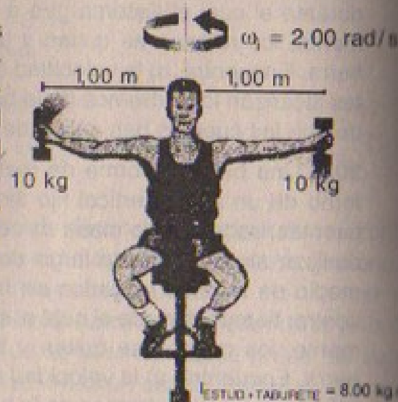


Figura 11.17

Resolución :

Parte (a)

Como el momento de torsión total del sistema es cero entonces el momento angular se conserva. Luego:

$$L_{0\ \text{inicial}} = L_{0\ \text{final}} \quad \text{(sistema)}$$

$$\Rightarrow \quad (I_{\text{estudio + tab}} + I_{\text{pesas}}) \cdot \omega_i = (I_{\text{estudio + tab}} + I_{\text{pesas}}) \cdot \omega_f$$

$$\Rightarrow \quad [8 + 2(10)(1)^2]\ .\ 2 = [8 + 2(10)(0,250)^2]\ .\ \omega_f$$

$$\therefore \quad \omega_{\text{final del sistema}} = 6,05\ \text{rad/s}$$

Parte (b)

$$E_{M\ \text{inicial}} = E_{\text{rotacional inicial}} = \frac{1}{2} I_{\text{sistema}} \cdot \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{M\ \text{inicial}} = \frac{1}{2}[8 + 2(10)(1)^2]\ (2)^2 = 56\ \text{joules}$$

$$E_{M\ \text{final}} = E_{\text{rotacional final}} = \frac{1}{2}\ I_{\text{sistema}} \cdot \omega_f^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{M\ \text{final}} = \frac{1}{2}\ [8 + 2(10)(0,250)^2]\ (6,05)^2 = 169,3\ \text{joules}$$

Luego: $\quad \Delta E_M = E_{M\ \text{final}} - E_{M\ \text{inicial}} = 169,3 - 56$

$$\therefore \quad \Delta E_M = 113,3\ \text{joules}$$

32. Un disco de goma de 80,0 g de masa y 4,00 cm de radio se desliza a lo largo de una mesa de aire a 1,5 m/s, como se muestra en la figura P11.32a. Choca indirectamente con un segundo disco de 6,00 cm de radio y 120 g de masa (inicialmente en reposo) de manera tal que sus bordes apenas se tocan. Los discos se mantienen unidos y giran después del choque (Fig. P11.32b). ¿Cuáles son a) el momento angular del sistema relativo al centro de masa, y b) su velocidad angular en torno al centro de masa?

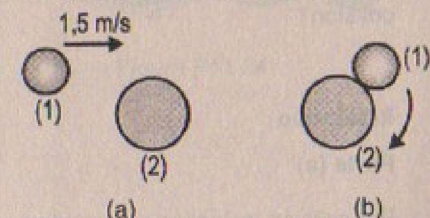


Figura P11.32

Resolución :

Datos:
Masa del disco (1) = 80×10^{-3} kg
Radio del disco (1) = 4×10^{-2} m
Masa del disco (2) = 120×10^{-3} kg
Radio del disco (2) = 6×10^{-2} m
v_0 disco (1) = 1,5 m/s
v_0 disco (2) = 0

Parte (a)

$$I_{CM\,disco\,1} = \frac{1}{2}(80\times10^{-3})(4\times10^{-2})^2 = 64\times10^{-6}\ kg.m^2$$

$$I_{CM\,disco\,2} = \frac{1}{2}(120\times10^{-3})(6\times10^{-2})^2 = 216\times10^{-6}\ kg.m^2$$

Por conservación del momento angular

$$L_{CM\,inicial} = L_{CM\,final}\ (sistema)$$

$$I_{CM}\cdot\omega_1\,(s) + I_{CM}\cdot\omega_1\,(2) = I_{CM}\cdot\omega_{f_1} + I_{CM}\,\omega_{f_2}$$

$$\Rightarrow\quad 64\times10^{-6}\cdot\left(\frac{1,5}{4\times10^{-2}}\right) + 0 = \omega_{final}\,(64\times10^{-6} + 216\times10^{-6})$$

$$\therefore\quad \omega_{final} = 8,57\ rad/s$$

Nos piden el momento angular:

$$L_{CM}\ (sistema) = (8,57)(280\times10^{-6}) = 24\times10^{-4}\ kg.m^2.rad/s$$

Parte (b) $\omega_{final\ del\ sistema} = 8,57\ rad/s$

33. Un bloque de madera de masa M que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable (Fig. P11.33). La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa m que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con velocidad v golpea el bloque y queda incrustada en él. a) ¿Cuál es el momento angular del sistema bala–bloque? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión?

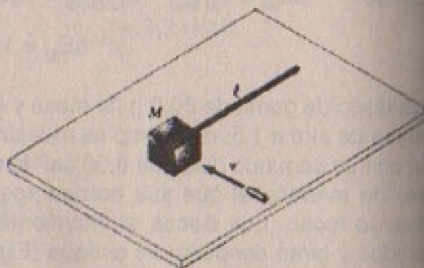


Figura P11.33

Resolución:

Parte (a)

Por colisión inelástica se cumple que: $\vec{P}_{inicial\ y} = \vec{P}_{final\ y}$

$$\Rightarrow\quad m\,v\,\hat{j} = (M+m)\,\vec{V}_{final}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{V}_{final(sistema)} = \frac{mv}{m+M}\,\hat{j}$$

Entonces: $L_{0(sistema)} = \ell\times p = \ell\hat{i}\times(M+m)\left(\frac{mv}{m+M}\right)\hat{j}$

$$\therefore\quad L_{0\,sistema} = \ell mv\,\hat{k}$$

Parte (b) $E_{K\,inicial\,(sistema)} = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_{K\,final\,(sistema)} = \frac{1}{2}(m+M)\left[\frac{mv}{m+M}\right]^2$$

$$\therefore\quad E_{K\,final\,(sistema)} = \frac{m^2v^2}{2(m+M)}$$

Por lo tanto la energía que se pierde es:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{m^2v^2}{2(m+M)} = \frac{1}{2}mv^2\left[\frac{M}{m+M}\right]$$

$$\therefore\quad \Delta E = \text{Energía perdida} = \frac{m\,M\,v^2}{2(m+M)}$$

34. Una estación espacial en forma de rueda tiene un radio de 100 m y un momento de inercia de $5,00\times10^8$ kgm². Una tripulación de 150 personas vive en el borde. La estación gira de manera que ellos experimentan una gravedad aparente de g (Fig. P11.34). Si 100 personas se mueven al centro, la velocidad de rotación angular cambia. ¿Qué gravedad aparente experimentan aquellos que permanecen en el borde? Suponga una masa promedio de 65,0 kg por cada miembro de la tripulación.

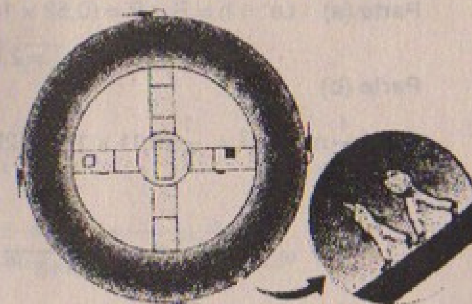


Figura P11.34

Resolución:

$I_{est.\,esp.} = 5,00\times10^8\ kg.m^2$

Masa de c/p = 65 kg

R = 100 m

Por conservación del momento angular:

$$L_{CM\,inicial} = L_{CM\,final}\ (sistema)$$

$$\Rightarrow\quad (I_{est.esp} + I_{150\,pers.})\cdot\omega_i = (I_{est.esp} + I_{150\,pers.})\cdot\omega_{final}$$

$$\Rightarrow\quad [5\times10^8 + 150\times65\times(100)^2]\cdot\omega_i = [5\times10^8 + 50\times65\times(100)^2]\cdot\omega_{final}\ \cdots(1)$$

Por movimiento circular:

$$M_{150\,p}\,g = M_{150}\cdot\omega_i^2\,(100)\ \Rightarrow\ g = 100\,\omega_i^2\quad\ldots(2)$$

Por otro lado:

$$M_{50}x = M_{50p}\cdot\omega_f^2\,(100) \Rightarrow x = 100\,\omega_f^2 \quad ...(3)$$

De (1): $1.12.\omega_i = \omega_{final}$

De (2): $\omega_i = \frac{1}{10}\sqrt{g}$

Entonces en (3): en consecuencia: $x_{gravedad\ final\ aparente} = 1{,}25\ g$

MOMENTO ANGULAR COMO UNA CANTIDAD FUNDAMENTAL

35. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en una órbita circular de $0{,}529 \times 10^{-10}$ m de radio alrededor del protón. Suponiendo que el momento angular orbital del electrón es igual a *h*, calcule a) la velocidad orbital del electrón, b) la energía cinética del electrón, y c) la frecuencia angular del movimiento del electrón.

Resolución:

Datos: Radio $= 0{,}529 \times 10^{-10}$ m ; $m_{e^-} = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg ; $Le^- = h$

Parte (a) $Le^- = h = R \times P = (0{,}52 \times 10^{-10}) \times 9{,}11 \times 10^{-31}\,.\,v$

$$\therefore\ v_{e^-} = 2.h \times 10^{40}\ m/s$$

Parte (b)

$$E_K = \frac{1}{2}m_e \times v_e^2 = \frac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31})(2h \times 10^{40})^2 = 18{,}2\ h^2 \times 10^{49}\ joules$$

Parte (c)

$$\omega_{e^-} = \frac{v_{e^-}}{R} = \frac{2h\times10^{40}}{0{,}529\times10^{-10}} \qquad \therefore\ \omega_{e^-} = 3{,}8\ h \times 10^{50}\ rad/s$$

PROBLEMAS ADICIONALES

36. Una esfera sólida uniforme de radio r se coloca sobre la superficie interior de un tazón hemisférico de radio R. La esfera se libera desde el reposo a un ángulo θ con la vertical y rueda sin deslizar (Fig. P11.36). Determine la velocidad angular de la esfera cuando alcanza el fondo del tazón.

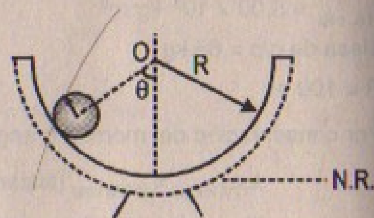
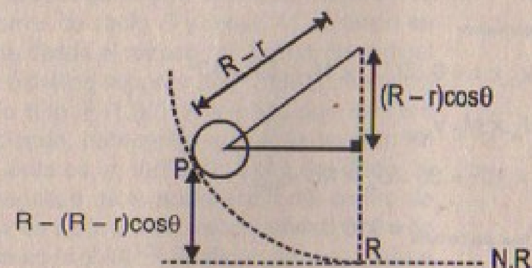


Figura P11.36

Resolución:

$$I_{CM\,esfera} = \frac{2}{5}MR^2$$



Por conservación de la energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow\ Mg\,[R-(R-r)\cos\theta] = \frac{1}{2}I_{ESF}\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\omega}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ MgR(1-\cos\theta) + Mgr\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\omega^2}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ gR - gR\cos\theta + gr\cos\theta = \frac{r^2\,\omega^2}{5} + \frac{\omega^2}{2r^2}$$

$$\Rightarrow\ g[R - R\cos\theta + r\cos\theta] = \omega^2\left[\frac{2r^4+5}{10r^2}\right]$$

$$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{10\,r^2 g}{2r^4+5}\,[R - R\cos\theta + r\cos\theta]}$$

37. El cometa Halley se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica. Su máximo acercamiento al Sol es de 0,59 UA y su máxima distancia es de 35 UA (1 UA = la distancia Tierra-Sol). Si la velocidad del cometa en el máximo acercamiento es de 54 km/s, ¿cuál es la velocidad cuando se encuentra más alejado del Sol, suponiendo que su momento angular respecto del Sol es constante?

Resolución:

Datos:

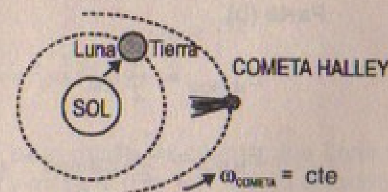
Máximo acercamiento = 0,59 UA

$v_{cometa(máx.acerc)} = 54 \times 10^3$ m/s

Máxima distancia del cometa = 35 UA

1 UA = distancia Tierra–Sol

Distancia: Tierra–Sol $= 1{,}496 \times 10^{11}$ m



$$L_{0\ acercamiento} = L_{0\ alejamiento}$$

$$L_{0\ acercamiento} = M_C\ v_C \times r = 0{,}59\ U_A \times M_C\ .\ 54 \times 10^3$$

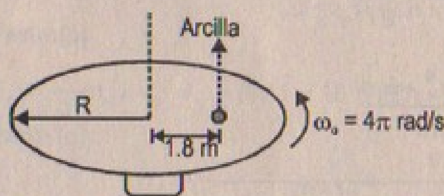
$$L_{0\ alejamiento} = 35\ .\ U_A \times M_C\ v_{final}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}59\ U_A \times M_C\ .\ 54 \times 10^3 = 35\ .\ U_A \times M_C\ v_{final}$$

$$\therefore \quad v_{final\ del\ cometa} = 910{,}3\ m/s$$

38. Una delgada y uniforme mesa giratoria cilíndrica de 2,00 m de radio y 30,0 kg gira en un plano horizontal con una velocidad angular inicial de 4π rad/s. El cojinete de la mesa giratoria no ofrece fricción. Una pequeña masa de arcilla de 0,250 kg se deja caer sobre la mesa giratoria y se mantiene adherida en un punto a 1,80 m del centro de rotación. a) Encuentre la velocidad angular final de la arcilla y la mesa giratoria. (Considere la arcilla como una masa puntual.) b) ¿La energía mecánica es constante en esta colisión? Explique y utilice resultados numéricos para verificar su respuesta.

Resolución :



$$I_{CM\ mesa\ cilíndrica} = \frac{1}{2}MR^2$$

Masa de la mesa = 30 kg

Radio de la masa = 2,00 m

Masa de la arcilla = 0,250 kg

Parte (a)

$$L_{0\ inicial\ del\ sistema} = L_{0\ final\ del\ sistema}$$

$$\Rightarrow \quad I_{CM\ mesa} \times \omega_0 = (I_{CM\ mesa} + I_{arcilla})\ .\ \omega_{final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(30)(2)^2\ (4)(3{,}1416) = [\frac{1}{2}(30)(2)^2 + (0{,}250)(1{,}8)^2]\ \omega_{final}$$

$$\therefore \quad \omega_{final} = 12{,}4\ rad/s$$

Parte (b)

$$E_{M\ inicial} = \frac{1}{2}I_{CM}\ .\ \omega_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(30)(2)^2)(4 \times 3{,}1416)^2 = 4{,}74\ kJ$$

$$E_{M\ final} = \frac{1}{2}(I_{CM\ mesa} + I_{arcilla})\ .\ \omega_f^2 = \frac{1}{2}(60 + 0{,}81)(12{,}4)^2 = 4{,}66\ kJ$$

Como $E_{M\ inicial} > E_{M\ final}$, la energía mecánica no es constante

39. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio *R* y masa *M*. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo (Fig. P11.39). A medida que el disco desciende, demuestre que a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco. b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y c) la velocidad del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$. Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

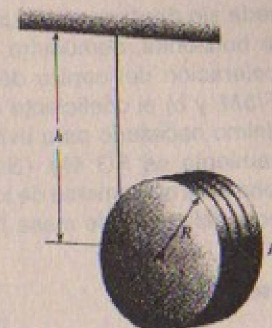
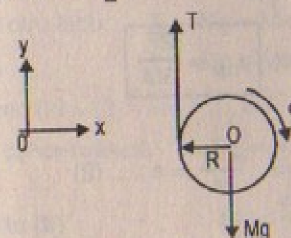


Figura P11.39

Resolución :

$$I_{CM\ del\ disco} = \frac{1}{2}MR^2$$



$$\Sigma\tau_o = = I_{CM\ disco}\ .\ \alpha = I_{CM}\ .\ \frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T.R = I_{CM}\ .\ \frac{a}{R} \quad \therefore \quad a = \frac{TR^2}{I_{CM}}$$

Por otro lado: $\quad Mg - T = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg = M\left(\frac{TR^2}{I_{CM}}\right) + T$

$$\therefore \quad T = \frac{Mg}{\left(\frac{MR^2}{I_{CM}} + 1\right)} = \frac{1}{3}Mg$$

Parte (b) Como: $\quad a_{CM} = \frac{TR^2}{I_{CM}} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \left(\frac{1}{3}Mg\right)\frac{(R^2)}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2g}{3}$

Parte (c)

Por cinemática: $\quad \omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha.h$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{CM}^2}{R^2} = 0 + 2h\left(\frac{2g}{3R}\right) \quad \therefore \quad v_{CM} = \left(\frac{4ghR}{3}\right)^{1/2}$$

40. Una Fuerza horizontal constante **F** se aplica a un rodillo de césped que tiene la forma de un cilindro sólido uniforme de radio *R* y masa *M* (Fig. P11.40). Si el rodillo

rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, demuestre que: a) la aceleración del centro de masa es 2F/3*M*, y b) el coeficiente de fricción mínimo necesario para evitar el deslizamiento es *F/3 Mg*. (*Sugerencia:* Considere el momento de torsión respecto del centro de masa.)

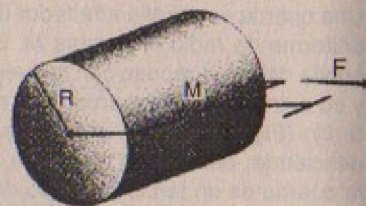
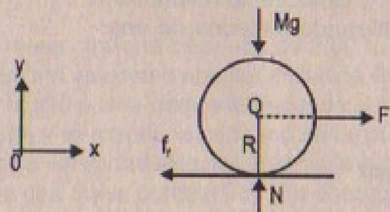


FIGURA P11.40

Resolución :

$I_{CM\ cilindro} = \frac{1}{2} MR^2$



Parte (a)

Por demostrar: $\boxed{a_{CM} = \frac{2F}{3M}}$

$\Sigma F_x = M.a \Rightarrow F - f_r = M.a \quad ...(1)$

$\Sigma\tau_o = I_{CM} . \alpha \Rightarrow f_r . R = \frac{1}{2} MR^2 . \frac{a}{R} \Rightarrow \frac{2 f_r}{M} = a \quad ...(2)$

(2) en (1)

$\Rightarrow F - \frac{aM}{2} = Ma \qquad \therefore a_{CM} = \frac{2F}{3M}$ l.q.q.d.

Parte (b)

Como: $F - f_r = Ma$

$\Rightarrow F - \mu_{min} . Mg = \frac{2}{3} F \qquad \therefore \mu_{min} = \frac{F}{3Mg}$ l.q.q.d.

41. Una cuerda ligera pasa sobre una polea ligera sin fricción. Un extremo está amarrado a una penca de plátanos de masa *M*, y un chango de masa *M* está colgado en el otro extremo (Fig. P11.41). El chango asciende por la cuerda intentando alcanzar los plátanos. a) Considerando que el sistema se compone del chango, los plátanos, la cuerda y la polea, evalúe el momento de torsión neto respecto del eje de la polea. b) Empleando los resultados de a), determine el momento angular total respecto del eje de la polea y describa el movimiento del sistema. ¿El chango alcanzará los plátanos?

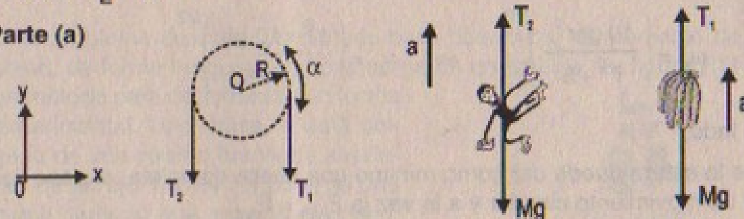


Figura P11.41

Resolución :

$I_{CM\ polea} = \frac{1}{2} m_p . R^2$

Parte (a)



$\Sigma\tau_o = I_{CM\ polea} . \alpha = I_{CM} . \frac{a}{R}$

$\Rightarrow T_2 R - T_1 R = I_{CM} . \frac{a}{R} \quad ...(1)$

Por otro lado: $T_2 - Mg = Ma \quad ...(2)$ (sube el mono)

$T_1 - Mg = Ma \quad ...(3)$ (sube el plátano)

Como (2) = (3) $\Rightarrow T_2 = T_1$

En consecuencia $\Sigma\tau_o = 0$

Parte (b) $\Sigma\tau_o = \frac{dL_o}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{dL_o}{dt}$

$\therefore L_{0\ inicial} = L_{0\ final} = \text{Constante} = 0$

En consecuencia: El chango no podrá alcanzar los plátanos.

42. Una pequeña esfera sólida de masa *m* y radio *r* rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura P11.42. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura *h*, donde *h* es grande comparada con r, a) ¿cuál es el valor mínimo de *h* (en función del radio de la trayectoria *R*) de modo que la esfera complete la trayectoria? b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto *P* si h = 3R?

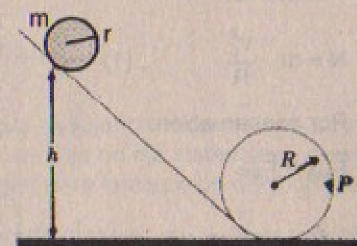


Figura P11.42

Resolución :

Parte (a) $I_{CM\ esfera} = \frac{2}{5} mr^2$

Por conservación de energía: $E_{MA} = E_{MB}$

$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 + \frac{1}{2} m\,\frac{\omega^2}{r^2}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}m\cdot\frac{\omega^2}{r^2}$$

$$\therefore \quad \omega_B = \left(\frac{10\,ghr^2}{r^4+5}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad v_B = \left(\frac{r^3 \times 10.gh}{r^4+5}\right)^{1/2}$$

Por otro lado:

Para que la esfera pueda dar como mínimo una vuelta completa, el peso tiene que emplear un movimiento circular y a la vez la $E_{MB} = E_{MC}$

Entonces: $E_{MA} = E_{MB} = E_{MC}$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m\cdot v_c^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\cdot\omega_C^2 + mg\,(2R)$$

por M.C.U: $mg = m\cdot\frac{v_C^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_C^2 = gR$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m(gR) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{gR}{r^2}\right) + mg(2R)$$

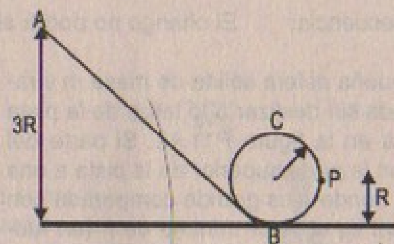
$$\Rightarrow \quad gh = \frac{gR}{2} + \frac{gR}{5} + 2gR$$

$$\therefore \quad h_{mínimo} = \frac{25R^2 + 2R^2}{10R}$$

Parte (b)

Por M.C.U.

$$N = m\cdot\frac{v_P^2}{R} \quad \ldots (1)$$



Por conservación:

$E_{MA} = E_{MP}$

$$\Rightarrow \quad mg(3R) = mgR + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_P^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}m\cdot v_p^2$$

$$\Rightarrow \quad mg(3R) = mgR + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\frac{v_P^2}{r^2} + \frac{1}{2} + m.v_p^2$$

$$\therefore \quad v_p^2 = \frac{20\,gR}{7}$$

En (1): $$N = \frac{m}{R}\times\left(\frac{20\,gR}{7}\right) = \frac{20}{7}mg$$

En consecuencia las componentes de "F" serán

$$F_x = mg\,\hat{i} \quad ; \quad F_y = -mg\,\hat{j}$$

43. Este problema describe un método para determinar el momento de inercia de un objeto de forma irregular, como la carga de un satélite. La figura P11.43 muestra un método para determinar *I* en forma experimental. Una masa *m* está colgada de una cuerda enrollada alrededor de un eje interior (radio *r*) de una mesa giratoria que soporta al objeto. Cuando la masa se suelta a partir del reposo, desciende uniformemente una distancia *h*, adquiriendo una velocidad *v*. Muestre que el momento de inercia *I* del equipo (incluida la mesa giratoria) es $mr^2\,(2gh/v^2 - 1)$.

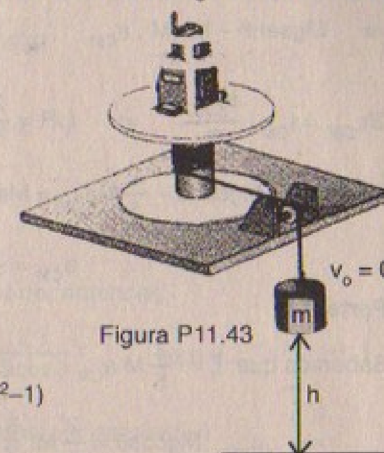


Figura P11.43

Resolución:

Por demostrar: $I = mr^2\,(2gh/v^2-1)$

Por la conservación de la energía:

$$E_{M\ inicial\ sistema} = E_{M\ final\ del\ sistema}$$

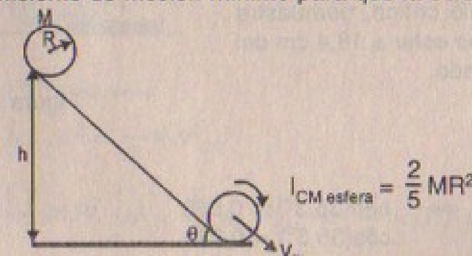
Entonces: $$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\cdot\frac{v^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2mgh}{v^2} - m = \frac{I}{r^2}$$

$$\therefore \quad I = mr^2\left[\frac{2gh}{v^2} - 1\right] \quad \text{l.q.q.d.}$$

44. Considere el problema de la esfera sólida que desciende rodando por un plano inclinado, como el descrito en el ejemplo 11.1. a) Elija un eje instantáneo que pase por el punto de contacto *P* como el eje del origen para la ecuación del momento de torsión y muestre que la aceleración del centro de masa es $a_{CM} = \frac{5}{7}g\operatorname{sen}\theta$. b) Demuestre que el coeficiente de fricción mínimo para que la esfera ruede sin deslizar es $\mu_{mín} = \frac{2}{7}\tan\theta$.

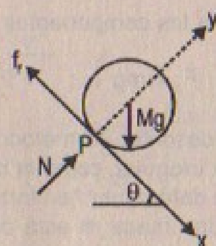
Resolución:



Parte (a)

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta$



$\Sigma F_x = M.a_{CM}$

$\Rightarrow \quad Mg\text{sen}\theta - f_r = M \cdot a_{CM}$

$$\Sigma\tau_{CM} = I_{CM}\cdot\frac{a_{CM}}{R} \quad\Rightarrow\quad f_r.R = \frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{a_{CM}}{R} \quad\therefore\quad f_r = \frac{2}{5}Ma_{CM}$$

Luego: $\quad Mg\text{sen}\theta - \frac{2}{5}Ma_{CM} = Ma_{CM}$

$$\therefore\quad a_{CM} = \frac{5}{7}g\text{sen}\theta \qquad \text{l.q.q.d}$$

Parte (b)

Sabemos que: $f_r = \frac{2}{5}M\,a_{CM}$

$$\Rightarrow\quad \mu_{min}\cdot Mg\cos\theta = \frac{2}{5}M\left(\frac{5}{7}g\ \text{sen}\,\theta\right)$$

$$\therefore\quad \mu_{min} = \frac{2}{7}\tan\theta \qquad \text{l.q.q.d.}$$

45. Una demostración física común (Fig. P11.45) consiste en una bola que descansa a metros del extremo articulado de una tabla de longitud ℓ que se eleva a un ángulo θ respecto de la horizontal. Una taza que se coloca sobre la tabla a una distancia r_c recibirá la bola cuando la vara de soporte se quite repentinamente. Demuestre que si la bola va a caer en la taza, a) θ debe ser al menos de 35,3° cuando la bola se sitúa en el extremo de la tabla, y b) que la taza debe situarse en $r_c = \dfrac{2\ell}{3\cos\theta}$ para este ángulo límite. c) Si la bola está en el extremo de una vara de 1,0 m a este ángulo crítico, demuestre que la taza debe estar a 18,4 cm del extremo articulado.

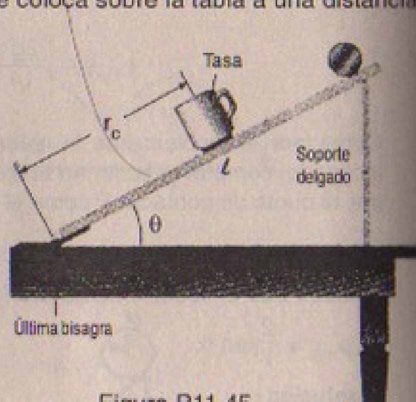


Figura P11.45

Resolución :

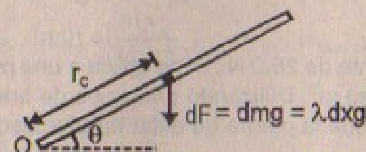
Parte (a)

Si $\quad\theta = 35{,}3° \quad\Rightarrow\quad \text{sen}(35{,}3°) \approx 0{,}568$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos(35{,}3°) \approx 0{,}823$

Por conservación de energía

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final} \;\Rightarrow\; mg(\ell - r_c)\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}mv^2 \quad\therefore\quad v^2 = 2g(\ell - r_c)\text{sen}\theta$$

Parte (b)



Por otro lado: $\quad \tau_o = dmr_c^2\,\alpha = \lambda dxgr_c\cos\theta$

$$\Rightarrow\quad \lambda\,dx.r_c^2\alpha = \lambda dx.gr_c\cos\theta$$

$$\therefore\quad \alpha = \frac{g\cos\theta}{r_c}$$

pero como "α" de la taza es igual a la "a" barra, entonces:

$$\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{g\cos\theta}{\ell} \qquad\qquad \therefore\quad r_c = \frac{2\ell}{3\cos\theta} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

Si: $\quad L = 1{,}0\text{ m} \quad \theta = 35{,}3°$ Hallar $r_c = 0{,}184$ m (por demostrar)

Sabemos que: $\quad r_c = \dfrac{2\ell}{3\cos\theta}$

$$\Rightarrow\quad r_c = \frac{2(1)}{3\cos 35{,}3} = \frac{2}{3(0{,}823)}$$

$$\therefore\quad r_c = 0{,}184\text{ m} = 18{,}4\text{ m} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

46. Una bola de boliche se desliza y gira sobre una superficie horizontal de modo tal que su energía cinética rotacional es igual a su energía cinética traslacional. ¿Cuál es la proporción entre la velocidad del centro de masa de la bola y la velocidad tangencial de un punto sobre su superficie?

Resolución :



$$I_{CM\,boliche} = I_{CM\,esfera} = \frac{2}{5}MR^2$$

Por dato: $\quad E_{K\,rotacional} = E_{K\,traslacional}$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}I_{CM}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M.v^2_{CM}$$

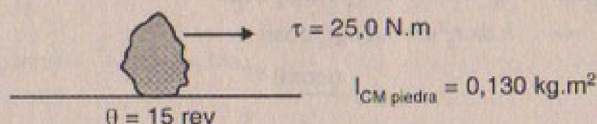
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}M.R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}M\cdot v^2_{CM} \;\Rightarrow\; \frac{2}{5}(\omega.R)^2 = v^2_{CM}$$

Velocidad tangencial = $v_T = \omega.R$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\cdot v_T^2 = v_{CM}^2 \qquad \therefore \qquad \frac{v_{CM}}{v_T} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

47. Un momento de torsión constante de 25,0 N . m se aplica a una piedra de afilar cuyo momento de inercia es 0,130 kg.m². Utilizando principios de energía, determine la velocidad angular después de que la piedra de afilar ha efectuado 15,0 rev. (Ignore la fricción).

Resolución :



$$I_{CM\ piedra} = 0{,}130\ kg.m^2$$

$$\tau = I_{CM}\cdot\alpha$$

por otro lado: $\omega = \int_{\theta_0}^{\theta}\tau\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\,\omega d\omega$

$$\Rightarrow \quad (25{,}0)(15) = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{60\,\pi\,(25{,}0)}{0{,}130}} = \omega \qquad \therefore \quad \omega = 190{,}4\ rad/s$$

48. Un proyectil de masa *m* se mueve a la derecha con velocidad v_0 (Fig. P11.48a). El proyectil golpea y queda fijo en el extremo de una barra estacionaria de masa *M* y longitud *d* que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro (Fig. P11.48b). a) Encuentre la velocidad angular del sistema justo después de la colisión. b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debido a la colisión.

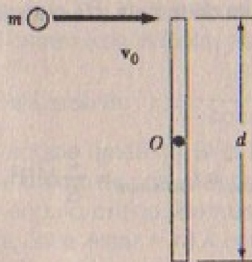


Fig. P11.48.a

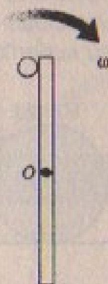


Fig. P11.48b

Resolución :

Parte (a) $\qquad I_{CM\ barra} = \frac{1}{12}Md^2$

Por choque inelástico: $\qquad P_{inicial} = P_{final}$ (sistema)

$$\Rightarrow \quad m\,v_0 = (M+m)v_f \qquad \therefore \qquad v_{final} = \frac{m\,v_0}{M+m}$$

Entonces: $\omega_f\cdot(d/2) = \frac{m\,v_0}{M+m} \qquad \therefore \qquad \omega_{final\ del\ sistema} = \frac{2m\,v_0}{d(M+m)}$

Parte (b) $\qquad E_{inicial} = \frac{1}{2}m.v_0^2$

$$E_{final} = E_{final\ de\ rotación} + E_{final\ de\ traslación}$$

$$= \frac{1}{2}(I_{CM\ barra} + I_{masa})\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}(M+m)\,v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{final} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}Md^2 + m\cdot\frac{d^2}{4}\right]\left(\frac{2\,m\,v_0}{d\,(m+M)}\right)^2$$

Entonces: $$\frac{E_{final}}{E_{inicial}} = \frac{\dfrac{m^2 v_0^2\,(3m+M)}{6(M+m)^2}}{\dfrac{m\,v_0^2}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{E_{final}}{E_{inicial}} = \frac{m\,(3m+M)}{3\,(M+m)^2}$$

49. Una masa *m* está unida a una cuerda que pasa por un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (Fig. P11.49). La masa inicialmente orbita con velocidad v_0 en un círculo de radio r_0. La cuerda se jala después lentamente desde abajo, disminuyendo el radio del círculo a r. a) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando el radio es r? b) Encuentre la tensión en la cuerda como una función de r. c) ¿Cuánto trabajo W se efectúa al mover m de r_0 a r? (Nota: La tensión depende de r.) d) Obtenga valores numéricos para v, T y W cuando r = 0,100 m, m = 50,0 g, r_0 = 0,300 m y v_0 = 1,50 m/s.

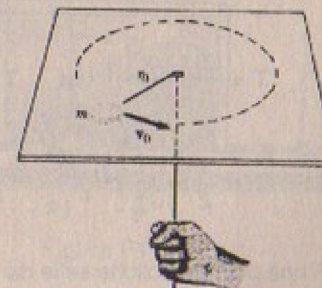


Fig. P11.49

Resolución :

Parte (a)

Por conservación del momento angular:

$$L_{0\ inicial\ del\ sistema} = L_{0\ final\ sistema}$$

$$\Rightarrow \quad m r_0^2 \frac{v_o}{r_o} = mr^2.\omega_{final} \quad \therefore \quad \omega_{final} = \frac{r_o v_o}{r^2}$$

En consecuencia $\quad v_{final\ del\ sistema} = \frac{r_o}{r} v_0$

Parte (b)

Por movimiento circular: $\quad T = m.\frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{m}{r} \times \left(\frac{r_o}{r} v_o\right)^2 \quad \therefore \quad T = \frac{m r_o^2 v_o^2}{r^3} \text{ N}$$

Parte (c)

Por el teorema del trabajo y la energía

$$W = \frac{1}{2} I . \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_o^2$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{r_o v_o}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{2} mr_o^2 \left(\frac{v_o}{r_o}\right)^2$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2} m. v_o^2 \left[\frac{r_o^2 - r^2}{r^2}\right] \text{ joules}$$

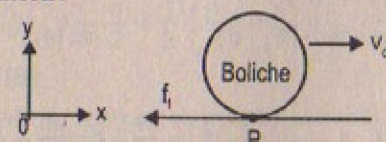
Parte (d)

$r = 0{,}1$ m ; $m = 50 \times 10^{-3}$ kg ; $r_0 = 0{,}3$ m ; $v_0 = 1{,}5$ m/s

- $v = \frac{r_o}{r} . v_o \quad \Rightarrow \quad v = \frac{0{,}3}{0{,}1} \times 1{,}5 = 4{,}5$ m/s
- $T = \frac{m r_o^2 v_o^2}{r^3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(50 \times 10^{-3})(0{,}3)^2 (1{,}5)^2}{(0{,}1)^3} = 10{,}125$ N
- $W = \frac{1}{2} m.v_0^2 \left[\frac{r_o - r}{r}\right]\left[\frac{r_o + r}{r}\right] \Rightarrow W = \frac{1}{2}(50 \times 10^{-3})(1{,}5)^2 \left[\frac{0{,}2}{0{,}1}\right]\left[\frac{0{,}4}{0{,}1}\right] = 0{,}45$ J

50. A una bola de boliche se le da una velocidad inicial v_0 en un canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y el canal es μ. Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro, a) la velocidad del centro de masa de la bola es $5v_0/7$, y b) la distancia que recorre es $12v_0^2/49\ \mu g$. (*Sugerencia*: cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro, $v_{CM} = R\omega$. Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que $a_{CM} = \mu g$).

Resolución :



$$I_{CM\ boliche} = \frac{2}{5} MR^2$$

Parte (a)

Por rodamiento puro $\quad E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} I_P . \frac{v_{CM}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} MR^2 + MR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

$$\therefore \quad v_{CM} = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/2} v_o \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por la segunda ley: $\quad -f_i = -\mu g M = M.a_{CM\,x} \qquad \therefore \quad \vec{a}_{CM} = -\mu.g$

Por cinemática: $\quad v_{CM}^2 = v_o^2 + 2a_{CM} . d \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{7} v_o^2 = v_o^2 - 2\mu g d$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{v_o^2}{7\mu g} = \frac{7 v_o^2}{49\ \mu g} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

51. Un remolque con un peso cargado **w** es jalado por un vehículo con una fuerza **F**, como en la figura P11.51. El remolque está cargado de manera tal que su centro de masa se localiza como se indica. Ignore la fuerza de fricción por rodamiento y suponga que el remolque tiene una aceleración de magnitud *a*. a) Encuentre la componente vertical de **F** en función de los parámetros dados. b) Si a = 2,00 m/s² y h = 1,50 m, ¿cuál debe ser el valor de d para que $F_y = 0$ (no hay carga vertical sobre el vehículo)? c) Encuentre F_x y F_y dado que w = 1 500 N, d = 0,800 m, L = 3,00 m, h = 1,50 m y a = –2,00 m/s².

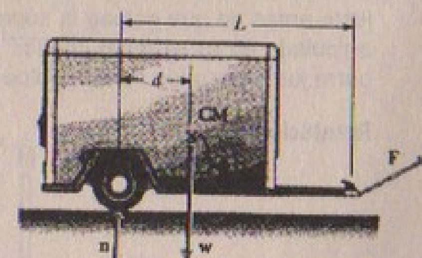


Figura P11.51

Resolución :

Parte (a)

$$\Sigma F_x = m.a \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{w}{g} . a \quad \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y + n = w \quad \dots (2)$$

$\Sigma\tau_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y(L-d) + F_x(h) - n(d) = 0 \quad \ldots (3)$

De (2): $F_y d + nd = wd \Rightarrow nd = wd - F_y \cdot d \quad \ldots (4)$

(4) y (1) en (3)

$$\Rightarrow F_y \cdot L - F_y d + \frac{wa}{g} \cdot h = wd - F_y d \quad \therefore \quad F_y = \frac{w}{L}\left(d - \frac{ah}{g}\right)$$

Parte (b)

Si $a = 2{,}00$ m/s^2 ; $h = 1{,}5$ m ; $d = ?$; $F_y = 0$

Como $F_y = 0 = \frac{w}{L}\left(d - \frac{ah}{g}\right)$

$$\Rightarrow d = \frac{ah}{g} \quad \therefore \quad d = \frac{2 \times 1{,}5}{9{,}8} = 0{,}306 \text{ m}$$

Parte (c)

$F_x = ?$, $F_y = ?$; $w = 1\,500$ N ; $d = 0{,}800$ m ; $L = 3{,}00$ m ; $h = 1{,}5$ m
$a = -2{,}00$ m/s^2

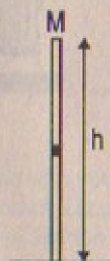
Sabemos que:

- $F_x = \frac{w}{g} \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{1500}{9{,}81}(-2{,}00) = -305{,}8\hat{i}$ N

- $F_y = \frac{w}{L}\left(d - \frac{ah}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{1\,500}{3}\left(0{,}8 + \frac{2(1{,}5)}{9{,}81}\right) \quad \therefore F_y = 552{,}9\hat{j}$ N

52. a) Una delgada barra de longitud *h* y masa *M* se sostiene verticalmente con su extremo inferior descansando sobre una superficie horizontal sin fricción. Después se deja que la barra caiga libremente. Determine la velocidad de su centro de masa justo antes de que golpee la superficie horizontal. b) Suponga que la barra estaba articulada en su extremo inferior. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo después de que golpea la superficie.

Resolución:



$$I_{barra} = \frac{1}{3} Mh^2$$

$$I_{CM\,barra} = \frac{1}{12} Mh^2$$

Parte (a)

Por conservación de la energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow Mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mh^2\right)v_{CM}^2 \cdot \frac{4}{h^2} \quad \therefore \quad v_{CM} = \frac{1}{2}\sqrt{3hg}$$

Parte (b)

Después de que golpea la barra el suelo, la v_{CM} es la misma, debido a la conservación de la cantidad de movimiento.

53. Dos astronautas (Fig. P11.53), cada uno con una masa de 75 kg, están conectados por medio de una cuerda de 10 m y masa despreciable. Se encuentran aislados en el espacio, orbitando alrededor de su centro de masa a velocidades de 5,0 m/s. Calcule: a) la magnitud del momento angular del sistema considerando a los astronautras como partículas, y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, los astronautas acortan la distancia entre ellos a 5,0 m. c) ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema? d) ¿Cuáles son sus nuevas velocidades? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo realizan los astronautas al acortar la distancia que los separa?

53A. Dos astronautas (Fig. P11.53), cada uno con una masa *M*, están conectados por medio de una cuerda de longitud *d* y masa despreciable. Se encuentran aislados en el espacio, orbitando alrededor de su centro de masa a velocidades *v*. Calcule: a) la magnitud del momento angular del sistema considerando a los astronautas como partículas, y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, los astronautas acortan la distancia entre ellos a *d*/2. c) ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema? d) ¿Cuáles son sus nuevas velocidades? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo realizan los astronautas al acortar la distancia que los separa?

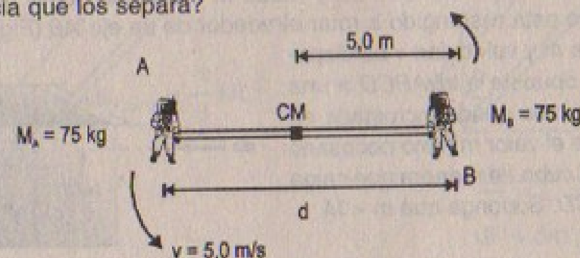


Figura P11.53

Resolución:

$M_A = 75$ kg ; $M_B = 75$ kg

$v = 5{,}0$ m/s

Parte (a) $L_{CM\,sistema} = (5{,}0) \times (75)(5) + 5{,}0\hat{i} \times 75\,(5)\hat{j}$

$\therefore \quad L_{CM\,sistema} = 3{,}75 \times 10^3$ kg.m^2/s

Parte (b) $E_{rotacional\,del\,sistema} = \frac{2}{2} I_A \cdot \omega^2$

$$\Rightarrow \quad E_{rot\ sistema} = 75 \times (5)^2 \left(\frac{5}{5}\right)^1$$

$$\therefore \quad E_{rot\ sistema} = 1\ 875 \text{ joules}$$

Parte (c) $\quad d = 2{,}5$ m

Por conservación del momento angular:

$$L_{CM\ sistema} = 2(5{,}0) \times (75)(5) = L_{CM\ sistema\ inicial}$$

$$\therefore \quad L_{CM\ sistema} = 3{,}75 \times 10^3 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

Parte (d)

Por conservación del momento angular:

$$3{,}75 \times 10^3 = 2(75)(2{,}5)^2 \cdot \omega_f$$

$$\therefore \quad \omega_{final\ del\ sistema} = 4{,}00 \text{ rad/s}$$

luego la velocidad de cada astronauta será:

$$v_A = \omega_f \cdot (2{,}5) = v_B = 4 \times (2{,}5) = 10 \text{ m/s}$$

Parte (e)

$$E_{rot\ sistema} = 2(75)(2{,}5)^2(4)^2 = 7\ 500 \text{ joules}$$

Parte (f)

$$W = E_{rotacional\ final} - E_{rotacional\ inicial} = 7\ 500 - 1\ 875 = 5\ 626 \text{ joules}$$

54. Un cubo sólido de madera de lado $2a$ y masa M descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a rotar alrededor de un eje AB (Fig. P11.54). Una bala de masa m y velocidad v se dispara contra la cara opuesta a la $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala queda incrustada en el cubo. Encuentre el valor mínimo necesario de v para volcar el cubo de manera que caiga sobre la cara $ABCD$. Suponga que $m < M$.

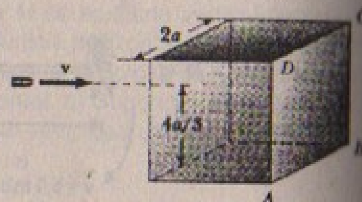


Figura P11.54

Resolución :

Por choque perfectamente inelástico: $\vec{P}_{inicial\ x} = \vec{P}_{final\ x}$

$$\Rightarrow \quad m\, v_B = m + M\, v_{final} \quad \dots (1)$$

Por conservación de la energía

$E_{M\ inicial}$ (después del choque) = $E_{M\ final}$ (después del choque)

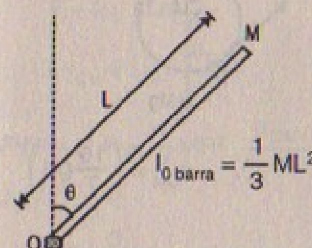
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_{bala}) \cdot v^2_{final} = m \cdot g\left(\frac{4}{3}a\right)$$

$$\therefore \quad v_{final} = \left[\frac{8\,amg}{3(m_{bala})}\right]^{1/2} \quad \dots (2)$$

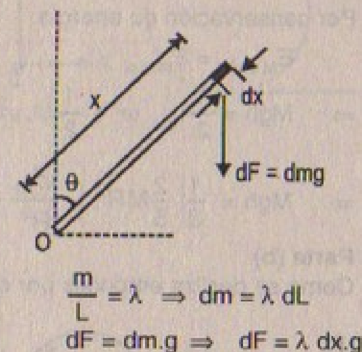
$$(2) \text{ en } (1) \quad \Rightarrow m \cdot v_B = (m + M)\left(\frac{8\,amg}{3(m_{bala})}\right)^{1/2} \quad \therefore \; v_{bala} = \left(\frac{8ag(m+M)^2}{3m^2}\right)^{1/2}$$

55. Con frecuencia las chimeneas muy altas se fracturan en su parte media debido a que el mortero entre los ladrillos no puede soportar una fuerza de tensión tan alta. A medida que la chimenea se derrumba, esta tensión suministra las fuerzas centrípetas sobre los segmentos superiores que son necesarias para mantenerlas recorriendo un arco. Por simplicidad tomaremos a la chimenea como una barra uniforme de longitud L con un pivote en el extremo inferior. La barra empieza su movimiento desde el reposo en posición vertical (con el pivote en la parte inferior) y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la longitud de la barra tiene una aceleración tangencial mayor que gsenθ, donde θ es el ángulo que la chimenea forma con el eje vertical?

Resolución :55



$$I_{0\ barra} = \frac{1}{3}ML^2$$



$$\frac{m}{L} = \lambda \;\Rightarrow\; dm = \lambda\, dL$$

$$dF = dm.g \;\Rightarrow\; dF = \lambda\, dx.g$$

$$\Rightarrow \quad d\tau_o = I_o \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \quad dF \cdot x \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3} dm.x^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\, dx\, gx \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}\lambda\, dx.x^2\alpha$$

Luego: $\quad \alpha = \dfrac{3}{x} g \operatorname{sen}\theta$

Como $\quad a_T = \alpha.x \;\Rightarrow\; a_T = 3g\operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; a_T \geq 3g\operatorname{sen}\theta$

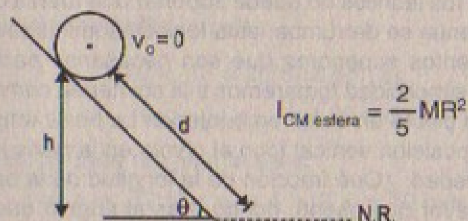
Pero como nos piden una aceleración $\geq$ gsenθ, entonces

$$\frac{x}{3} \geq g\operatorname{sen}\theta, \quad \text{si } x = L \quad \therefore \; \frac{L}{3} \geq g\operatorname{sen}\theta$$

En consecuencia $\frac{L}{3}$ de la barra tendrá una aceleración $\geq$ g senθ

56. Una esfera sólida se coloca en la parte superior de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Esta posición inicial de la esfera corresponde a una distancia vertical *h* sobre el suelo. La esfera se suelta y desciende por el plano. Calcule la velocidad de la esfera cuando alcanza el pie de la pendiente en el caso en que a) rueda sin deslizar y b) se desliza sin fricción y sin rodar. Compare los tiempos que se requieren para llegar al pie de la pendiente en los casos a) y b).

Resolución:



$$I_{CM\,esfera} = \frac{2}{5}MR^2$$

Parte (a)

Por conservación de energía:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2 + \frac{1}{2}M.\,v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right).\frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2}M.\,v_{CM}^2 \qquad \therefore \quad v_{CM} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Parte (b)

Como se desliza entonces por conservación de energía:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\,v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{CM} = \sqrt{2gh}$$

Parte (c)

Por rodadura pura $a_{CM} = \frac{5}{7}$ gsenθ

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_{CM}}} = \sqrt{\frac{14\,d}{5g\,sen\,\theta}}$$

Por deslizamiento sin fricción: a_{CM} = gsenθ

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_{CM}}} = \sqrt{\frac{2d}{g\,sen\,\theta}}$$

57. Un carrete de alambre de masa *M* y radio *R* se desenrolla con una fuerza constante **F** (Fig. P11.57). Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es 4*F*/3*M*, y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* y su magnitud es igual a *F*/3. c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿cuál es la velocidad de su centro de masa después de que ha rodado una distancia *d*?

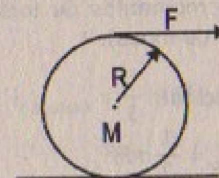


Figura P11.57

Resolución: 57

$I_{CM\,cilindro}$ = 1/2 MR^2

Parte (a)

$$\Sigma F_x = M.a_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad F + f_r = M.a_{CM} \qquad \ldots (1)$$

$$\Sigma\,\tau_{CM} = I_{CM}\,.\,\frac{a_{CM}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad (F - f_r)\,R = \frac{1}{2}MR^2\,.\,\frac{a_{CM}}{R} \qquad \ldots (2)$$

(1) + (2)

$$\Rightarrow \quad 2F = \frac{3}{2}M\,a_{CM} \qquad \therefore \quad a_{CM} = \frac{4F}{3M} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

De la ecuación (1)

$$F + f_r = M\left(\frac{4F}{3M}\right) \qquad \therefore \quad f_r = \frac{F}{3} \qquad (+)\ \text{derecha}$$

Parte (c)

Por cinemática: $\quad v_{f\,CM}^2 = v_0^2 + 2a_{CM}\,(d)$

$$\therefore \quad v_{f\,CM} = \sqrt{\frac{8\,F\,d}{3\,M}}$$

58. Un disco sólido uniforme se pone en rotación con una velocidad angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro. Mientras permanece girando a esta

velocidad, el disco se pone en contacto con una superficie horizontal y se suelta, como en la figura P11.58. a) ¿Cuál es la velocidad angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro? b) Encuentre la pérdida fraccionaria de la energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro. (*Sugerencia*: considere momentos de torsión alrededor del centro de masa).

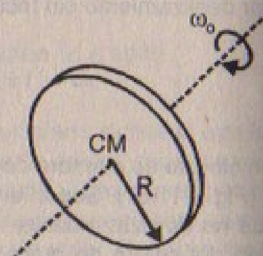


FIGURA P11.58

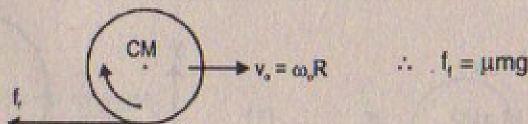
Resolución:

$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2}mR^2$

Parte (a)

En el momento que el disco hace contacto con la superficie la velocidad angular inicial es cero $\omega_0 = 0$; pero el disco se mueve con $v_0 = \omega_0 R$.

Parte (b)



$\therefore\ f_r = \mu mg$

En el momento en que el disco hace contacto con la superficie para iniciar el movimiento de rodamiento puro lo hace con una velocidad lineal inicial igual a $v_0 = \omega_0 R$, entonces:

$$E_{inicial} = E_{K\ inicial} = \frac{1}{2}m.v_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2$$

$$E_{final} = E_{K\ rotacional} + E_{K\ traslacional}$$

$$\Rightarrow\quad E_{final} = \frac{1}{2}I_{CM}.\omega_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad ...(1)$$

Por cinemática: $a_{CM} = -\mu g \quad \wedge \quad \alpha = 2mg/R$

$v_f = \omega_0 R - \mu g.t \Rightarrow \quad t = \omega_0 R/3\mu g$

$\omega_f = \alpha.t$

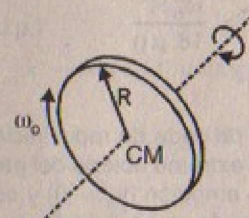
En consecuencia: $\omega_f = 2\omega_0/3 \qquad \therefore\ v_f = 2R\omega_0/3$

Luego: $$E_{final} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{2\omega_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{2R\omega_0}{3}\right)^2$$

$$\therefore\quad \Delta E_K = \text{pérdida de la energía} = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 - \frac{1}{3}mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{6}mR^2\omega_0^2$$

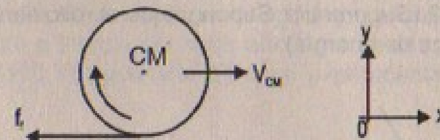
59. Suponga un disco sólido de radio R al cual se le da una velocidad angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en el problema 58 (Fig. P11.58). Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ. a) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es $R\omega_0/3\mu g$. b) Muestre que la distancia que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es $R^2\omega_0^2/18\mu g$.

Resolución:



$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2}MR^2$

Parte (a)



Como inicialmente gira alrededor de su centro de masa con ω_0, al hacer contacto con la superficie horizontal, el disco se mueve con una velocidad inicial $v_0 = \omega_0.R$ entonces:

$\Sigma F_x = M.a_{CM} \quad \Rightarrow \quad -f_r = -\mu.mg = m.a_{CM} \qquad \therefore\ a_{CM} = -\mu g$

$\Sigma \tau_{CM} = I_{CM}.\alpha \quad \Rightarrow \quad f_{r(R)} = \frac{1}{2}MR^2.\alpha$

$\Rightarrow \quad +\mu.MgR = \frac{1}{2}MR^2.\alpha \qquad \therefore\ \alpha = \frac{2\mu g}{R}$

Por cinemática: $v_f = \omega_0.R + (-\mu g)t \qquad ...(1)$

$\omega_f = \alpha.t \qquad ...(2)$

Igualando y reemplazando resulta que: $t = \omega_0 R/3\mu g$ l.q.q.d.

Parte (b)

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow\quad d = \omega_0 R\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right) - \frac{1}{2}(+\mu g)\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2$$

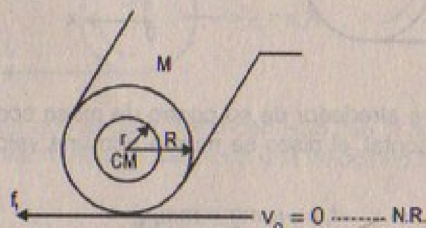
$$\Rightarrow \quad d = \frac{\omega_0^2 R^2}{3\mu g} - \frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu g} = \frac{5\,\omega_0^2 R^2}{18\mu g} \quad \text{(después del rodamiento)}$$

Nos piden antes del rodamiento
entonces: $v_0 = 0$

Luego: $$d = \frac{1}{2}(\mu g)\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 R^2}{18\,\mu g} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

60. Un gran rollo cilíndrico de papel de seda de radio inicial *R* se encuentra sobre una larga superficie horizontal con el extremo abierto del papel clavado sobre la superficie. Al rollo se le da un pequeño empujón ($v_0 \approx 0$) y comienza a desenrrollarse. a) Determine la velocidad del centro de masa del rollo cuando su radio ha disminuido a r. b) Calcule un valor numérico para esta velocidad en r = 1,0 mm, suponiendo R = 6,0 m. c) ¿Qué sucede con la energía del sistema cuando el papel se ha desenrollado completamente? (*Sugerencia*: Suponga que el rollo tiene una densidad uniforme y aplique métodos de energía).

Resolución :



Parte (a) $$I_{CM\,\text{rollo cilíndrico}} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$

Por rodamiento, se conserva la energía: $E_{M\,\text{inicial}} = E_{M\,\text{final}}$

$$\Rightarrow \quad MgR = Mgr + \frac{1}{2}I_{CM}\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}M.\omega^2.(R^2 + r^2)$$

$$\Rightarrow \quad Mg(R - r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M\,[R^2 + r^2]\right).\omega^2 + \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)\omega^2$$

$$\therefore \quad \omega = \left(\frac{4g\,(R - r)}{R^2 + r^2}\right)^{1/2}$$

Luego: $$v_{CM} = \left[\frac{4g(R - r)^3}{R^2 + r^2}\right]^{1/2}$$

Parte (b) $r = 10^{-3}$ m ; $R = 6{,}0$ m ; $g = 9{,}81$ m/s^2

$$\Rightarrow \quad v_{CM} = \left[\frac{4(9{,}81)(6 - 10^{-3})^3}{(6)^2 + (10^{-3})^2}\right]^{1/2} \qquad \therefore \quad v_{CM} \approx 15{,}34 \text{ m/s}$$

Parte (c) $$E_{final} = E_{K\,final} = \frac{1}{2}M\,(4gR) = 2MgR$$

Como $R_{final} = 0$ $\qquad \therefore \quad E_{K\,final} = 0$

61. Un cubo sólido de lado 2a y masa *M* se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme v_0, como se puede ver en la figura P11.61a. Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, lo que ocasiona que el cubo se ladee como en la figura P1.61b. Encuentre el valor mínimo de v_0 tal que el cubo caiga de la mesa. Advierta que el momento e inercia del cubo alrededor de un eje a lo largo de uno de sus bordes es $8Ma^2/3$. (*Sugerencia*: El cubo experimenta un choque inelástico en el borde).

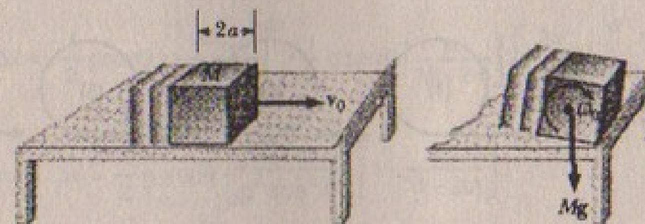


Figura P11.61

Resolución :

$I_{cubo} = 8\,Ma^2/3$

obs.: Datos incorrectos

62. En una demostración conocida como el carrito balístico, una pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde un carrito que se mueve con velocidad constante a lo largo de la dirección horizontal. La pelota cae en la taza de captura del carrito debido a que tanto éste como aquélla tienen la misma componente horizontal de velocidad. Considere un carrito balístico que se mueve sobre una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal como en la figura P11.62. El carrito (incluidas las ruedas) tiene una masa *M* y el momento de inercia de cada rueda es $mR^2/2$. a) Usando la conservación de la energía (con la suposición de que no hay fricción entre el carrito y el eje), y suponiendo movimiento de rodamiento puro (sin desliza-

miento), demuestre que la aceleración del carrito a lo largo de la pendiente es

$$a_x = \left(\frac{M}{M+2m}\right) g\,\text{sen}\theta$$

b) Advierta que la componente x de aceleración de la pelota lanzada por el carrito es $g\,\text{sen}\theta$. De modo que la componente x de la aceleración del carrito es *más pequeña* que la de la pelota por el factor $M/(M + 2m)$. Con este hecho y con ecuaciones cinemáticas demuestre que la pelota sobrepasa al carrito en una cantidad Δx donde

$$\Delta x = \left(\frac{4m}{M+2m}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\right)\frac{v_{yo}^2}{g}$$ y v_{yo} es la velocidad inicial de la pelota impartida por el resorte en el carrito. c) Muestre que la distancia *d* que la pelota recorre medida a lo largo de la pendiente es $d = \dfrac{2v_{yo}^2}{g}\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

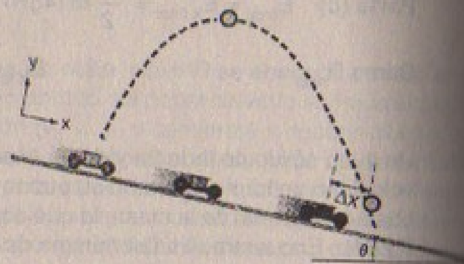
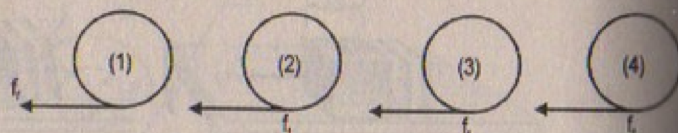


FIGURA P11.62

Resolución :

$$I_{rueda} = m.\frac{R^2}{2}$$



Parte (a)

Por demostrar: $a_x = \left(\dfrac{M}{M+2m}\right) g\,\text{sen}\theta$

Analizando el sistema: $Mg\,\text{sen}\theta - 4f_r = M.a_x$ ... (1)

$$\Sigma\tau_{CM(cuerda)} = I_{rueda}\cdot\frac{a_x}{R} \Rightarrow f_r(R) = m\frac{R^2}{2}\frac{a_x}{R} \quad \therefore\ f_r = \frac{m}{2}a_x$$

Luego: de (1) $Mg\,\text{sen}\theta = M.a_x + 4\left(\dfrac{m}{2}\cdot a_x\right)$

$$\therefore\ a_x = \left(\frac{M}{M+2m}\right) g\,\text{sen}\theta \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por dato: $a_{x\ pelota} = g\,\text{sen}\theta \Rightarrow a_{y\ pelota} = g\cos\theta$

Además: $v_{inicial\ pelota\ en\ y} = v_{0y}$; $v_{0\ inicial\ del\ carro} = v_0\cos\theta = 0$

$$v_{inicial\ de\ la\ pelota\ en\ x} = v_0\cos\theta = 0$$

Entonces por cinemática:

$$D_{carro} = v_0\cos\theta\,.\,t_{máx} + \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{M}{M+2m}\right]t_{máx}^2 \quad ...(1)$$

$$D_{pelota} = D_{carro} + \Delta_x = v_0\cos\theta\,.\,t_{máx} + \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\,.\,t_{máx}^2 \quad ...(2)$$

Por otro lado: $t_{máx} = \dfrac{2v_{oy}}{g\cos\theta}$ ... (3)

Entonces reemplazando: (3) en [(1) en (2)]

$$\Delta x = v_0\cos\theta\,.\,t_{máx} + \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\,.\,t^2_{máx} - v_0\cos\theta\,.\,t_{máx} - \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{M}{M+2m}\right]t^2_{máx}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{2v_{oy}}{g\cos\theta}\right]^2 - \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{M}{M+2m}\right]\cdot\left[\frac{2v_{oy}}{g\cos\theta}\right]^2$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{4v_{oy}}{g^2\cos^2\theta}\right]\left[1 - \frac{M}{M+2m}\right]$$

$$\therefore\ \Delta x = \left(\frac{4m}{M+2m}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\right)\frac{v_{oy}^2}{g} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

$$D_{pelota} = v_0\cos\theta\,.\,t_{máx} + \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\,.\,t^2_{máx}$$

$$\Rightarrow D_{pelota} = v_0\cos\theta\left[\frac{2v_{oy}}{g\cos\theta}\right] + \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\left[\frac{2v_{oy}}{g\cos\theta}\right]^2$$

$$\Rightarrow D_{pelota} = \frac{4v_{oy}^2\,g\,\text{sen}\theta}{2g^2\cos^2\theta}$$

$$\therefore\ D_{pelota} = \frac{2v_{oy}^2\,g\,\text{sen}\theta}{g\cos^2\theta} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

63. La figura P11.63 muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se jala, no se desliza en el punto de contacto P. El carrete se jala en las direcciones indicadas por medio de los vectores $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$. Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ pasa por P.

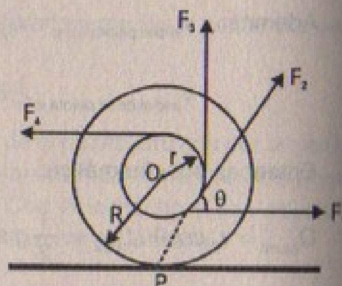


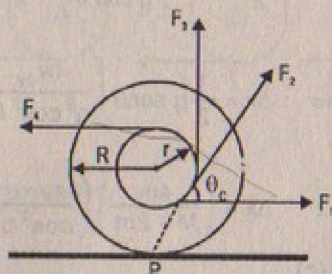
Figura P11.63

Resolución :

F_1: momento de torsión a favor de las manecillas del reloj.
F_2: momento de torsión igual a cero, porque pasa por "P".
F_3: momento de torsión en contra de las manecillas del reloj
F_4: momento de torsión en contra de las manecillas del reloj

64. El carrete mostrado en la figura P11.63 tiene un radio interior r y un radio externo R. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por $\cos\theta_c = r/R$. (*Sugerencia*: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto).

Resolución :64



Por demostrar:

$$\cos\theta_c = \frac{r}{R}$$

$$F_1 + F_2\cos\theta_c - F_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2\cos\theta_C = F_4 - F_1 \quad \text{... (1)}$$

$$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow \quad (F_3 + F_4 + F_1)\,r = -F_2\cos\theta_c \,.\, R$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{r}{R} = \frac{F_2\cos\theta_c}{F_3 + F_4 + F_1} \quad \text{... (2)}$$

$$\Sigma\tau_P = 0 \quad \Rightarrow \quad F_4(R + r) + F_3 \,.\, r = F_1(R - r)$$

$$\Rightarrow \quad (F_1 + F_3 + F_4)\,r = (F_1 - F_4)\,R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{F_1 - F_4}{F_1 + F_3 + F_4} \quad \text{... (3)}$$

$$\text{(1) en (2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{F_1 - F_4}{F_1 + F_3 + F_4} \quad \text{... }(\alpha)$$

En consecuencia: $\cos\theta_c = \dfrac{r}{R}$ l.q.q.d.

65. Un tablón que tiene una masa M = 6,0 kg se transporta sobre dos rodillos cilíndricos sólidos idénticos, cada uno con un radio R = 5,0 cm y masa m = 2,0 kg (Fig. P11.65). El tablón se jala con una fuerza horizontal constante F = 6,0 N aplicada a su extremo y perpendicular a los ejes de los cilindros (que son paralelos). Los cilindros ruedan sin deslizar sobre una superficie plana. Tampoco hay deslizamiento entre los cilindros y el tablón. a) Encuentre la aceleración del tablón y de los rodillos. b) ¿Qué fuerzas de fricción actúan?

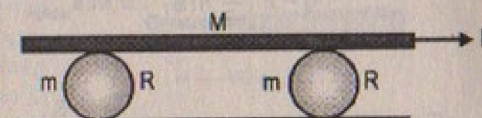


Figura P11.65

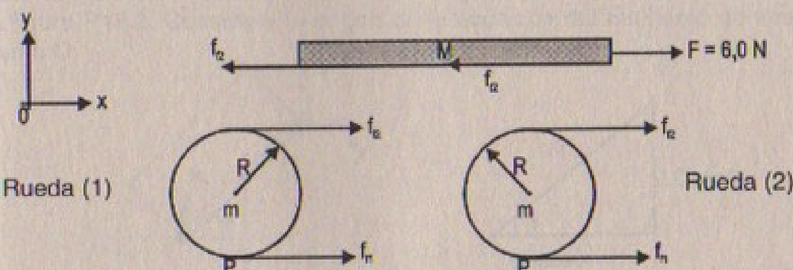
Resolución :

$$I_{CM\,cilindro} = \frac{1}{2}MR^2$$

Datos: M = 6,0 kg ; R = 0,05 m ; m = 2 kg ; F = 6,0 N

Parte (a)

Diagrama de cuerpo libre de cada objeto:



$$\Sigma F_x = M \,.\, a_{tablón} \quad \Rightarrow \quad F - 2f_{f2} = M \,.\, a_{tablón} \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado:

Tomando el sistema (rueda 1 + rueda 2)

$$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = m.a_{rueda} \quad \Rightarrow \quad 2(f_{f2} + f_{f1}) = m \,.\, a_{rueda}$$

$$\therefore \quad f_{f2} + f_{f1} = m\left(\frac{a}{2}\right)_{rueda} \quad \text{... (2)}$$

En consecuencia la aceleración de cada rodillo es la mitad de la aceleración del tablón. Luego:

$$a_{rodillo} = \frac{a_{tablón}}{2}$$

Por otro lado: $\Sigma\tau_p = I_p \dfrac{a_{tablón}}{2R}$

$$\Rightarrow \quad f_{t2}(2R) = \left(\frac{3}{2} mR^2\right)\frac{a_{tablón}}{2R} \qquad \therefore \quad f_{t2} = \frac{3}{8} m\, a_{tablón}$$

Entonces de (2): $f_{t1} = \dfrac{m}{8}\, a_{tablón}$

Luego de la ecuación (1)

$$6 - 2\left(\frac{3}{8} m a_T\right) = M.a_{tablón} \qquad \therefore \quad a_{tablón} = \frac{6}{\left(\dfrac{3m}{4} + M\right)}$$

En consecuencia: $a_{tablón} = \dfrac{6}{\dfrac{6}{4}+6} = 0{,}800\ m/s^2$

$$a_{rodillo} = \frac{a_{tablón}}{2} = 0{,}400\ m/s^2$$

Parte (b) $f_{t2} = \dfrac{3}{8}(2)(0{,}800) = 0{,}600$ N (hacia arriba)

$f_{t1} = \dfrac{1}{8}(2)(0{,}800) = 0{,}200$ N (de abajo)

Capítulo 12

EQUILIBRIO ESTÁTICO Y ELASTICIDAD

LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN OBJETO RÍGIDO

1. Un jugador de beisbol sostiene un bat de 36 oz (peso = 10,0 N) con una mano en el punto *O* (Fig. P12.1). El bat está en equilibrio. Su peso actúa a lo largo de una línea a 60 cm a la derecha de *O*. Determine la fuerza y el momento de torsión ejercidos sobre el bat por el jugador.

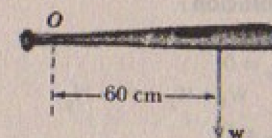


Figura P12.1

Resolución :

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F - w = 0$

$\therefore \quad F = 10$ N

$\tau_o = w.d$

$\Rightarrow \quad \tau_o = 10 \times (0{,}6) = 6$ N.m (en sentido contrario a las agujas del reloj)

2. Escriba las condiciones necesarias de equilibrio para el cuerpo que se muestra en la figura P12.2. Considere el origen de la ecuación del momento de torsión en el punto O.

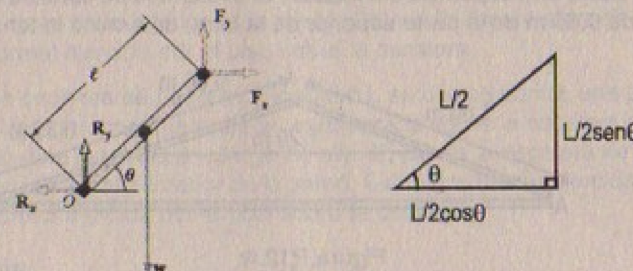


Figura P12.2

Resolución :

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x - R_x = 0 \qquad \therefore \quad F_x = R_x$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y - F_y - w = 0 \qquad \therefore \quad R_y + F_y = w$

$$\tau_o = F_y \,.\, L\cos\theta - w \,.\, \frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tau_o = L\cos\theta\left[F_y - \frac{w}{2}\right]$$

3. Una viga uniforme de peso w y longitud L tiene los pesos w_1 y w_2 en dos posiciones, como muestra la figura P12.3. La viga descansa en dos puntos. ¿En qué valor de x la viga estará equilibrada en P de manera tal que la fuerza normal en O sea cero?

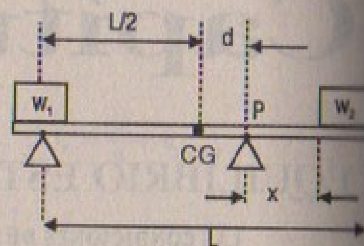


Figura P12.3

Resolución :

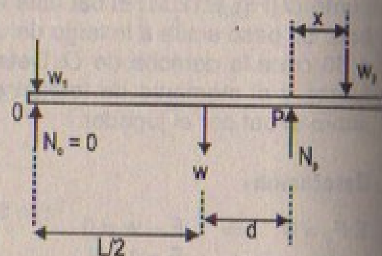
$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad w_1 + w_2 + w = N_p$

$\Sigma \tau_p = 0$

$$\Rightarrow \quad w_1\left(\frac{L}{2}+d\right) + w(d) - w_2(x) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{[(w_1+w)d + w_1 L/2]}{w_2}$$



4. Una letra "A" se forma con dos pedazos uniformes de metal, cada uno de 26,0 N de peso y 1,00 m de largo, articulados en la parte superior y mantenidos unidos por medio de un alambre horizontal de 1,20 m de longitud (Fig. P12.4). La estructura descansa sobre una superficie sin fricción. Si el alambre se conecta en puntos a una distancia de 0,65 m de la parte superior de la letra, determine la tensión en el alambre.

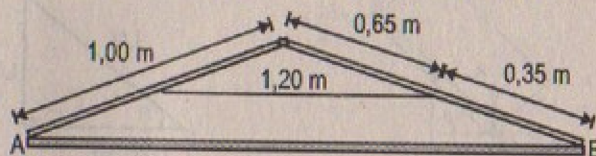
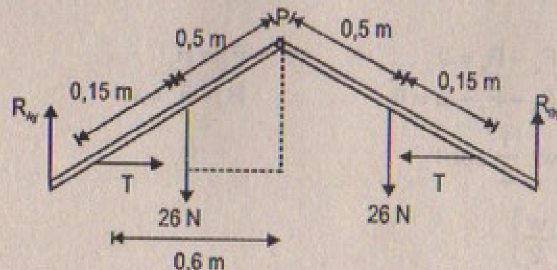
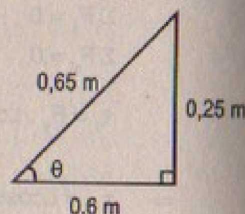


Figura P12.4

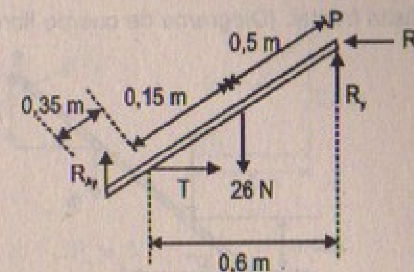
Resolución :





Por primera condición de equilibrio:

Para todo el sistema:



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$

$R_A + R_B - (26 + 26) = 0$

$\therefore \quad R_A + R_B = 52$ N

$\Sigma \tau_p = 0 \quad \Rightarrow$

$R_B \operatorname{sen}\theta - R_A \operatorname{sen}\theta + 26(0{,}5)\cos\theta - 26(0{,}5)\cos\theta$

$+ T(0{,}65)\operatorname{sen}\theta - T(0{,}65)\operatorname{sen}\theta = 0$

$\therefore \quad R_A = R_B$

Por otro lado:

Para una sola barra: $\Sigma \tau_p = 0$

$\Rightarrow \quad 26(0{,}5)\cos\theta + T(0{,}65)\operatorname{sen}\theta - R_A(\cos\theta) = 0$

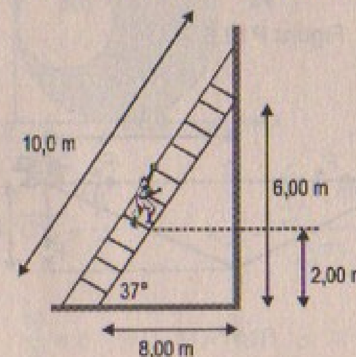
$$\Rightarrow \quad 26(0{,}5)\frac{(0{,}6)}{0{,}65} + T(0{,}65)\frac{(0{,}25)}{0{,}65} = \frac{26(0{,}6)}{0{,}65}$$

$$\Rightarrow \quad 12 + (0{,}25)T = 24 \qquad \therefore \quad T = \frac{12}{0{,}25} = 48 \text{ N}$$

5. Una escalera de 400 N de peso y 10,0 m de largo se coloca contra una pared vertical sin fricción. Una persona que pesa 800 N está parada sobre la escalera a 2,00 m del pie de ésta medidos a lo largo de ella. El pie de la escalera se encuentra a 8,00 m de la parte inferior de la pared. Calcule la fuerza ejercida por la pared y la fuerza normal ejercida por el piso sobre la escalera.

5A. Una escalera de peso w_1 y longitud L se coloca contra una pared vertical sin fricción. Una persona que pesa w_2 está parada sobre la escalera a una distancia x del pie de ésta medidos a lo largo de ella. El pie de la escalera se encuentra a una distancia d de la parte inferior de la pared. Calcule la fuerza ejercida por la pared y la fuerza normal ejercida por el piso sobre la escalera.

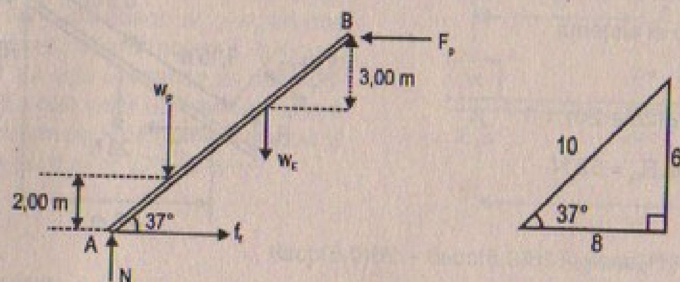
Resolución :



$w_{escalera} = 400$ N

$w_{persona} = 800$ N

Visita frontal: (Diagrama de cuerpo libre)



Por primera condición de equilibrio: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N - w_p - w_E = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = 400 + 800 = 1\,200$ N

Por segunda condición de equilibrio: $\Sigma \tau_A = 0$

$\Rightarrow \quad F_p\,(6) - w_p\,(2,0)\cos 37° - w_E\,(5)\cos 37° = 0$

$\Rightarrow \quad F_p\,(6) = 800(2,0)(0,8) + 400(5)(0,8) \qquad \Rightarrow \quad F_p\,(6) = 2\,880$

$\therefore \quad F_p = 480$ N

6. El carro de un estudiante queda atascado por una ventisca de nieve. Para rescatarlo, como estudiante de física, une un extremo de una cuerda al vehículo y el otro extremo al tronco de un árbol cercano, y deja una pequeña cantidad de cuerda. El estudiante ejerce después una fuerza **F** sobre el centro de la cuerda en la dirección perpendicular a la línea carro–árbol, como se muestra en la figura P12.6. Si la cuerda es inextendible y la magnitud de la fuerza aplicada es de 500 N, ¿cuál es la fuerza sobre el carro? (Suponga condiciones de equilibrio.)

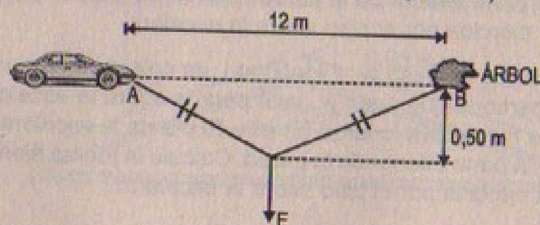
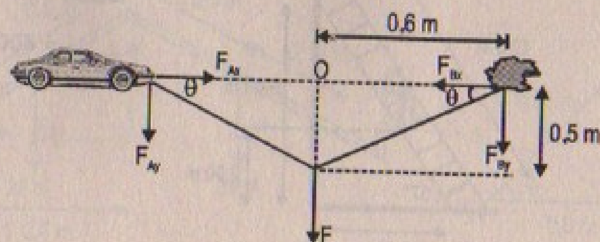
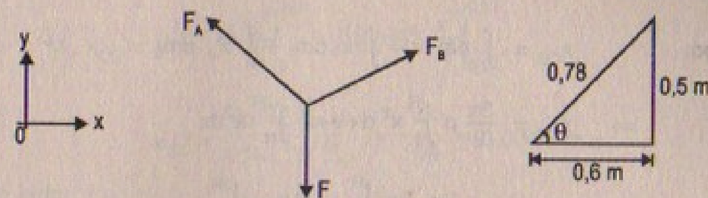


Figura P12.6

Resolución :

F = 500 N





Por fuerzas concurrentes: $\Sigma F_x = 0 \quad \wedge \quad \Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad F_B \cos\theta - F_A \cos\theta = 0 \Rightarrow \quad F_A = F_B$

Por otro lado: $F_A \,\text{sen}\theta + F_B \,\text{sen}\theta - F = 0$

$\Rightarrow \quad (F_A + F_B)\,\text{sen}\theta = F \qquad \Rightarrow \quad 2F_A \dfrac{(0.5)}{0.78} = 500$

$\Rightarrow \quad F_A = \dfrac{(500)\,(0,78)}{1,00} \qquad \therefore \quad F_A = 390$ N

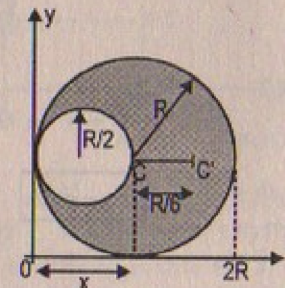
MÁS ACERCA DEL CENTRO DE GRAVEDAD

7. En la figura P12.7 se muestra cómo a una pizza circular de radio *R* se le cortó un pedazo circular de radio *R*/2. Es claro que el centro de gravedad se ha movido de *C* a *C'* a lo largo del eje x. Demuestre que la distancia de *C* a *C'* es R/6. (Suponga que el espesor y la densidad de la pizza son uniformes).



Figura P12.7

Resolución :



$x_{CG(total)}$ = círculo total relleno

$= \dfrac{16\,R}{6}$

Por demostrar: $\overline{C'C} = \dfrac{R}{6} \qquad x_{CG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Por otro lado: $\dfrac{M}{A} = \rho \quad \Rightarrow \quad M = \pi R^2.\ \rho \qquad \therefore \quad dm = 2\pi.R\rho.d_R$

Luego: $x_{CG} = \int dm.x = \int x_1.dm_1 + \int x_2.dm_2$

$$\Rightarrow \quad x_{CG} = \frac{3\pi}{2}\rho\int_0^R x^2dx + \pi\rho\int_R^{2R} x^2dx$$

$$\Rightarrow \quad M.x_{CG} = \frac{3\pi}{2}\rho\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R + \left.\frac{\pi\rho}{3}x^3\right|_R^{2R}$$

$$\Rightarrow \quad M.x_{CG} = \frac{\pi}{2}\rho R^3 + \frac{8\pi\rho R^3}{3} - \pi\rho\frac{R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad M.x_{CG} = \frac{17\pi.\rho R^3}{6} = \frac{17}{6}MR \quad \therefore \quad x_{CG} = \frac{17R}{6}$$

Luego: $x_{CG} - x_{CG(total)} = \frac{17R}{6} - \frac{16R}{6} = \frac{R}{6}$ l.q.q.d.

8. En la figura P12.8 se ve una escuadra de carpintero en forma de una "L". Localice su centro de gravedad.

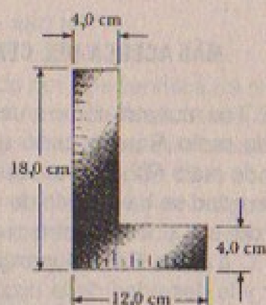
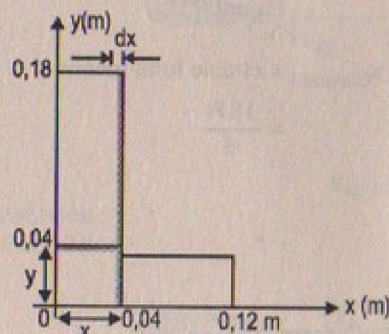


Figura P12.8

Resolución :



$$\frac{M}{A} = \rho \Rightarrow M = 104 \times 10^{-4}\rho$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dm = \rho.dA}$$

Sea: $M.x_{CG} = \int x\,dm_1 + \int x\,dm_2$

$$\Rightarrow \quad M.x_{CG} = \int_0^{0,04}\rho(0,18)x\,dx + \int_{0,04}^{0,12}\rho(dx)(0,04)(x)$$

$$\Rightarrow \quad M.x_{CG} = \rho(0,18)\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,04} + \rho(0,04)\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,04}^{0,12}$$

$$\therefore \quad x_{CG} = \frac{4\times10^{-4}.\rho}{104\times10^{-4}.\rho} = \frac{4}{104} \approx 0,0385 \text{ m}$$

Por otro lado:

$$M\ ._{CG} = \int y\,dm_1 + \int y\,dm_2$$

$$\Rightarrow \quad M.y_{CG} = \int_0^{0,04}\rho(0,12)y\,dy + \int_{0,04}^{0,18}\rho(0,04)y\,dy$$

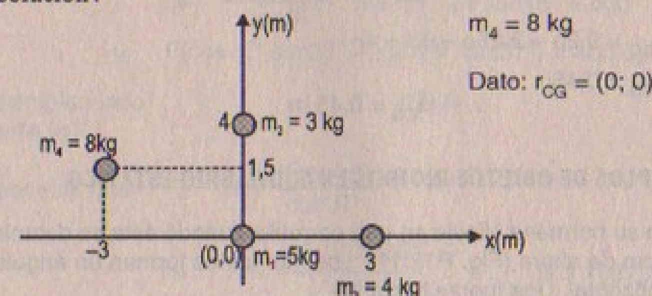
$$\Rightarrow \quad M.y_{CG} = \frac{(0,12)}{2}\rho\left.y^2\right|_0^{0,04} + \frac{\rho(0,04)}{2}\left.y^2\right|_{0,04}^{0,18}$$

$$\Rightarrow \quad 104 \times 10^{-4}\,y_{CG} = 7,12\,\rho \times 10^{-4} \quad \therefore \quad y_{CG} = 7,12/104 \approx 0,0685 \text{ m}$$

En consecuencia: $\vec{r}_{CG} = (x; y) = (0,0385; 0,0685)$ m

9. Considere la siguiente distribución de masa: 5,0 kg en (0; 0) m; 3,0 kg en (0; 4,0) m y 4,0 kg en (3,0; 0) m. ¿Dónde se debe ubicar una cuarta masa de 8,0 kg de modo que el centro de gravedad del arreglo de cuatro masas esté en (0; 0)?

Resolución :



$$M_{total} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 5 + 3 + 4 + 8 = 20 \text{ kg}$$

Por otro lado: $M\,x_{CG} = x_1\,m_1 + x_2\,m_2 + x_3\,m_3 + x_4\,m_4$

$\Rightarrow \quad 20\,x_{CG} = 0(5) + 0(3) + 3(4) + x_4\,(8)$

$\Rightarrow \quad 0 = 12 + 4\,x_4 \quad \therefore \quad x_4 = -3$ m

Así también: $M\,.\,y_{CG} = y_1\,m_1 + y_2\,m_2 + y_3\,m_3 + y_4\,m_4$

$\Rightarrow \quad 20\,y_{CG} = 0(5) + 4(3) + 0(4) + y_4(8)$

$\Rightarrow \quad 20(0) = 12 + 8\,y_4$

$\therefore \quad y_4 = 1,5$ m

Luego:
La cuarta masa se colocará en la posición (x; y) = (–3;1,5) m para que el centro de gravedad del sistema esté en (0; 0)

10. Pat construye tranquilamente una pista para su carro a escala (Fig. P12.10). La pista tiene 5,0 cm de ancho, 1,0 m de altura y 3,0 m de largo. El camino se corta de manera tal que forma una parábola, $y = (x-3)^2/9$. Localice la posición horizontal del centro de gravedad de esta pista.

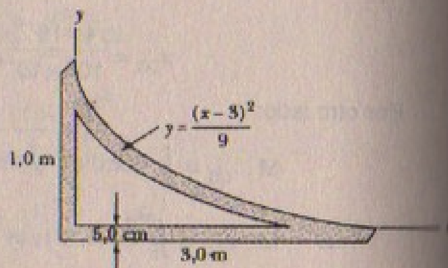


Figura P12.10

Resolución:

Sabemos que: $\frac{M}{A} = \rho \quad \Rightarrow \quad M_{total} = \rho\int_0^3 \frac{(x-3)^2}{9}dx = \frac{1}{9}9\rho = \rho$

Entonces: $M \cdot x_{CG} = \int_0^3 (0{,}05)(dx)\rho x + \rho\int_0^3 \frac{(x-3)^2}{9}x\,dx$

$\Rightarrow \quad M \cdot x_{CG} = (0{,}05)\rho\int_0^3 x\,dx + \frac{\rho}{9}\int_0^3 x(x-3)^2dx$

$\Rightarrow \quad M \cdot x_{CG} = \frac{(0{,}05)}{2}\rho x^2\Big|_0^3 + \frac{\rho}{36}x^4\Big|_0^3 - \frac{2}{9}\rho x^3\Big|_0^3 + \frac{\rho}{2}x^2\Big|_0^3$

$\Rightarrow \quad \rho x_{CG} = 0{,}2\rho + 2{,}25\rho - 6\rho + 4\rho$

$\Rightarrow \quad \rho x_{CG} = 0{,}45\rho$

$\therefore \quad x_{CG} = 0{,}45$ m

EJEMPLOS DE OBJETOS RÍGIDOS EN EQUILIBRIO ESTÁTICO

11. Chris empuja a su hermana Nicole en una carretilla cuando ésta es detenida por un ladrillo de 8,0 cm de altura (Fig. P12.11). Los manubrios forman un ángulo de 15,0° con la horizontal. Una fuerza hacia debajo de 400 N se ejerce sobre la rueda, la cual tiene un radio de 20,0 cm. a) ¿Qué fuerza debe aplicar Chris a lo largo de los manubrios para apenas levantar la rueda sobre el ladrillo? b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando la rueda empieza a levantarse sobre éste? Suponga en ambas partes que el ladrillo permanece fijo y que no se desliza por el suelo.

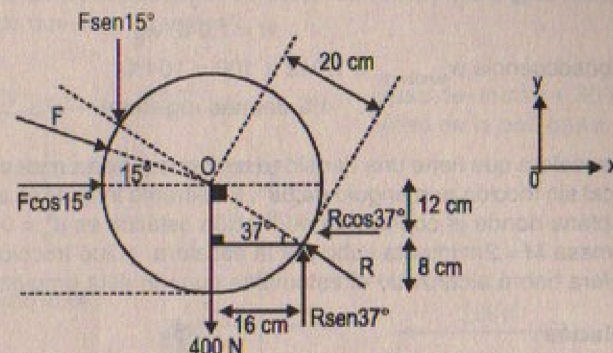


Fig. P12.11

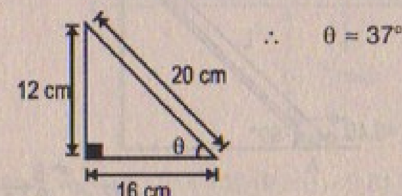
Resolución:

sen15° ≈ 0,259
cos15° ≈ 0,966

Parte (a)



Por triángulo notable:



$\therefore \quad \theta = 37°$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F\cos15° = R\cos37° \quad \therefore \quad R = \frac{F\cos15°}{\cos37°}$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R\text{sen}37° = 400 + F\text{sen}15°$

$\Rightarrow \quad \frac{F\cos15°}{\cos37°}\cdot\text{sen}37° - F\text{sen}15° = 400$

$\Rightarrow \quad F(\cos15°\,\text{sen}37° - \text{sen}15°\cos37°) = 400\cos37°$

Reemplazando: $\therefore \quad F = 859$ N

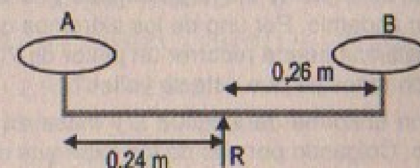
Parte (b)

Sabemos que $\quad R = \frac{F\cos15°}{\cos37°}$

$\Rightarrow \quad R = \frac{(859)(0{,}966)}{0{,}8} \quad \therefore \quad R = 1037{,}2$ N

12. Dos platillos de una balanza están a 50,0 cm de distancia. Un tendero deshonesto ha movido el punto de apoyo de la balanza 1,0 cm más allá del centro. ¿En qué porcentaje el verdadero peso de los alimentos está siendo registrado de más por el tendero? (Suponga que la balanza tiene masa despreciable.)

Resolución:



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad w_A = w_B = R$

$\Rightarrow \quad R = 2w$

$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2w\,(0,24) = w_B\,(0,5)$

$\therefore \quad w = 1,042\ w_B$

En consecuencia $w_{tendero\%} = 1,042 \times 100 = 104\%$

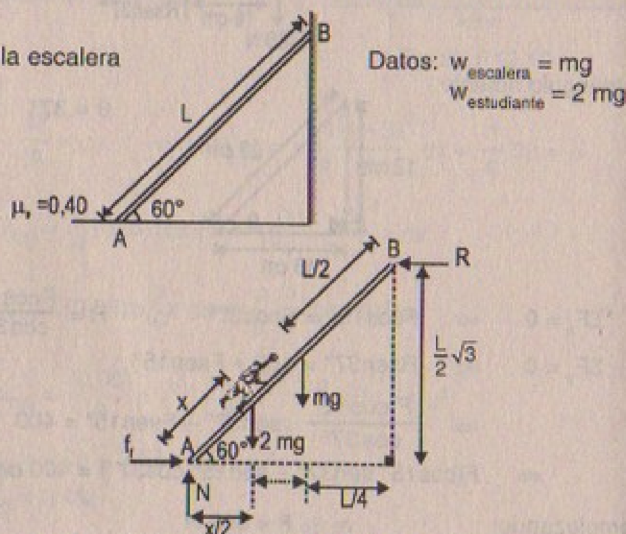
$\therefore$ 4% de más registrará

13. Una escalera que tiene una densidad uniforme y masa *m* descansa sobre una pared vertical sin fricción aun ángulo de 60°. El extremo inferior se apoya sobre una superficie plana donde el coeficiente de fricción estática es $\mu_e = 0,40$. Un estudiante con una masa $M = 2m$ intenta subir por la escalera. ¿Qué fracción de la longitud *L* de la escalera habrá alcanzado el estudiante cuando ésta empieza a deslizarse?

Resolución :

Vista frontal de la escalera

Datos: $w_{escalera} = mg$
$w_{estudiante} = 2\,mg$



$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f_r = R \quad \Rightarrow \quad 0,40\,N = R$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - 2mg - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 3mg$

Por otro lado:

$$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right) = 2mg\left(\frac{x}{2}\right) + mg\left(\frac{L}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (0,40)(3mg)\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right) = mg\left(x + \frac{L}{4}\right)$$

$\therefore \quad x = 0,789\ m$

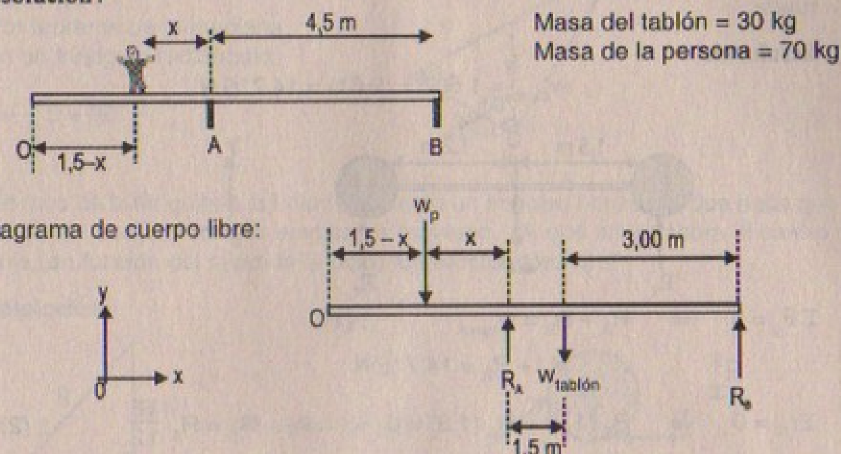
14. Un tablón uniforme de 6,0 m de longitud y 30 kg de masa descansa horizontalmente sobre un andamio. Por uno de los extremos del andamio cuelgan 1,5 m del tablón. ¿Qué distancia puede recorrer un pintor de 70 kg de masa sobre la parte colgante del tablón antes de que éste se voltee?

14.A Un tablón uniforme de longitud L y masa m_1 descansa horizontalmente sobre un andamio. Colgando por uno de los extremos del andamio cuelga una longitud d del

tablón. ¿Qué distancia puede recorrer un pintor de masa m_2 sobre la parte colgante del tablón antes de que éste se voltee?

Resolución :

Masa del tablón = 30 kg
Masa de la persona = 70 kg



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B = w_P + w_{tablón} = 100\,(9,81) = 9,81\ N \quad \dots (1)$

Así también:

$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A\,(1,5) + R_B\,(6) - w_P\,(1,5 - x) - w_{tab}\,(3) = 0$

$\Rightarrow \quad 1,5\,R_A + 6\,R_B = 70(9,81)(1,5 - x) + 30(9,81)(3) \quad \dots (2)$

Por otro lado:

$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad w_p\,(x) + R_B\,(4,5) = 294,3\,(1,5)$

$$\Rightarrow \quad R_B = \frac{294,3(1,5) - 70(9,81)(x)}{4,5} \quad \dots (3)$$

Así también: $\quad \Sigma\,\tau_{tablón} = 0$

$\Rightarrow \quad w_P\,(x + 1,5) + R_B\,(3) - R_A\,(1,5) = 0$

$\Rightarrow \quad 6\,R_B = 3R_A - 2w_P\,(x + 1,5)$

$\Rightarrow \quad 1,5\,R_A - 70\,(9,81)(1,5 - x) - 90\,(9,81) = 3R_A - 2w_P\,(x + 1,5)$

$\Rightarrow \quad 1,5\,R_A = 2w_P\,(x + 1,5) - 70\,(9,81)(1,5 - x) - 90(9,81)$

$$\therefore \quad R_A = \frac{2w_p(x + 1,5) - 70(9,81)(1,5 - x) - 90(9,81)}{1,5} \quad \dots (4)$$

$3 \times (4) + (3) \quad$ (sumando)

$6w_P\,(x + 1,5) - 210\,(9,81)(1,5 - x) - 270\,(9,81) + 294,3\,(1,5) - 70\,(9,81)\,x = 981\,(4,5)$

$6(70)(9,81)(x + 1,5) - 210(9,81)(1,5 - x) - 270(9,81) + 294,3\,(1,5) - 70\,(9,81)x = 981\,(4,5)$

$4\,120,2\,x + 6\,180,3 - 3\,090,15 + 2\,060,1x - 2\,648,7 + 441,45 - 686,7x = 4\,414,5$

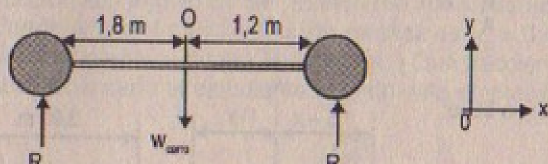
$5\,493,6x = 4\,414,5 - 882,9$

$\therefore \quad x = 0,643\ m$

15. Un automóvil de 1 500 kg tiene una base en las ruedas (la distancia entre los ejes) de 3,0 m. El centro de masa del automóvil está sobre la línea central en un punto a 1,2 m detrás del eje frontal. Encuentre la fuerza ejercida por el suelo sobre cada rueda.

Resolución :

$$w_{carro} = 1\,500 \times (9{,}81) = 14\,715 \text{ N}$$



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B = w_{carro}$ ... (1)

$\therefore \quad R_A + R_B = 14\,715$ N

$\Sigma\tau_O = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B(1{,}2) - R_A(1{,}8) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = R_A\,\dfrac{1{,}8}{1{,}2}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1): $R_A + \dfrac{1{,}8}{1{,}2}R_A = 14\,715$

$\Rightarrow \quad 3R_A = (1{,}2) \times 14\,715 \quad \therefore \quad R_A = 5\,886$ N

Luego: $R_B = \dfrac{1{,}8}{1{,}2} \times (5\,886) \quad \therefore \quad R_B = 8\,829$ N

16. Una barra uniforme de peso *w* y longitud *L* se sostiene en sus extremos por medio de una pileta sin fricción, como se muestra en la figura P12.16. a) Demuestre que el centro de gravedad de la barra está directamente arriba del punto *O* cuando la barra está en equilibrio. b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ.

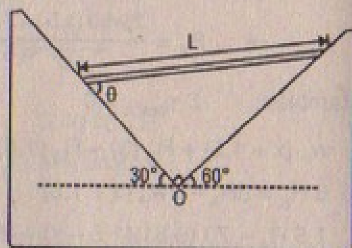


Figura P12.16

Resolución :

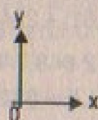
Peso de la barra = w

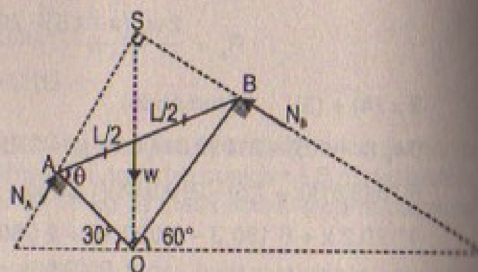
Parte (a)

Por fuerzas concurrentes:

$\Rightarrow \quad \Sigma F = 0\,;$

$\Sigma\tau_B = \Sigma\tau_O = 0$



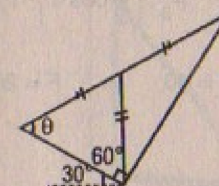


En consecuencia el peso y centro de gravedad de la barra está por encima del punto "0"

Parte (b)

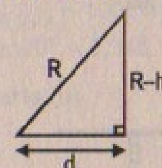
Por teorema de la mediana:
en un triángulo rectángulo:

$\Rightarrow \quad \theta = 60°$



17. Un taco de billar golpea la bola roja y le da un impulso horizontal que hace que ésta ruede sin deslizar cuando empieza a moverse. ¿A qué altura sobre el centro de la bola (en función del radio de la bola) fue efectuado el tiro?

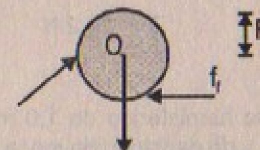
Resolución :



$R^2 = (R-h)^2 + d^2$

$\Rightarrow \quad 2R = d$

Luego $\Rightarrow \quad h = \dfrac{3R}{4}$



18. Una cadena flexible que pesa 40 N cuelga entre dos ganchos ubicados a la misma altura (Fig. P12.18). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo θ = 42° con la horizontal. Encuentre a) la magnitud de la fuerza que cada gancho ejerce sobre la cadena, y b) la tensión en la cadena en su punto medio. (*Sugerencia*: Para el inciso b) construya un diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena).

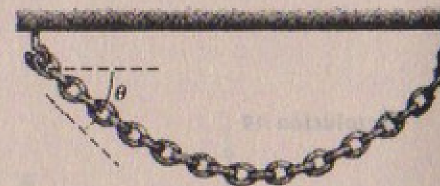


Figura P12.18

Resolución :

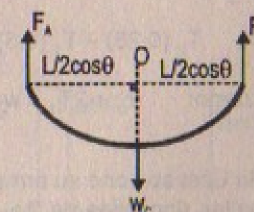
$w_{cadena} = 40$ N

$\theta = 42°$

Considerar: $\quad \text{sen}42° \approx 0{,}669$

$\qquad\qquad\quad \cos 42° \approx 0{,}743$





Parte (a)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A + F_B - W_C = 0 \Rightarrow F_A + F_B = 40$ N

$$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - F_A\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = 0 \quad \therefore \quad F_A = F_B$$

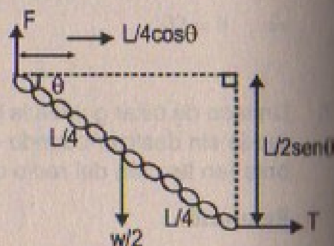
Luego: $2F = 40 \quad \Rightarrow \quad F = 20\ N = F_A = F_B$

Parte (b)
$\theta = 42°$

$$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{L}{4}\operatorname{sen}\theta\right) - F\left(\frac{L}{4}\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = F\,\frac{\cos 42°}{\operatorname{sen} 42°} = 20\,\frac{(0{,}743)}{(0{,}669)}$$

$$\therefore \quad T = 22{,}2\ N$$

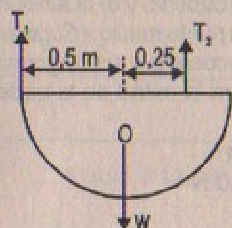


19. Un letrero hemisférico de 1,0 m de diámetro y de densidad de masa uniforme está sostenido por dos cuerdas, como se muestra en la figura P12.19. ¿Qué fracción de peso del letrero soporta cada cuerda?

0,75 m 0,25 m

Figura P12.19

Resolución :19



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad T_1 + T_2 = w$

$\Sigma\tau_o = 0$

$\Rightarrow \quad T_2\,(0{,}25) - T_1\,(0{,}5) = 0 \qquad \therefore \; T_2 = 2T_1$

Luego: $T_1 + 2T_1 = w \qquad \therefore \; T_1 = w/3 \;\wedge\; T_2 = 2w/3$

20. Sir Lost se pone su armadura y sale del castillo sobre su fiel corcel buscando salvar bellas doncellas de los dragones (Fig. P12.20). Desafortunadamente su ayudante bajó demasiado el puente levadizo y finalmente lo detuvo 20,0° debajo de la horizontal. Sir Lost y su caballo se detienen cuando su centro de masa combinado se encuentran a 1,0 m del extremo del puente. El puente mide 8,0 m de largo y tiene una masa de 2 000 kg; el cable de izamiento está unido al puente a 5,0 m del extremo del castillo y hasta un punto 12,0 m arriba del puente. La masa de Sir Lost combinada con su armadura y corcel es de 1 000 kg. a) Determine la tensión en el cable, y b) las componentes de fuerzas horizontal y vertical que actúan sobre el puente en el extremo del castillo.

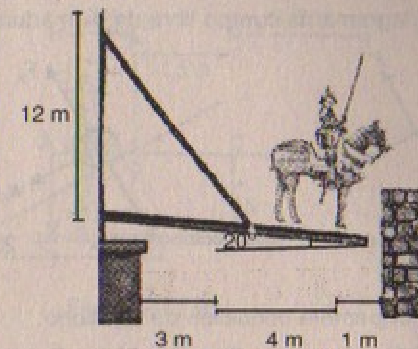


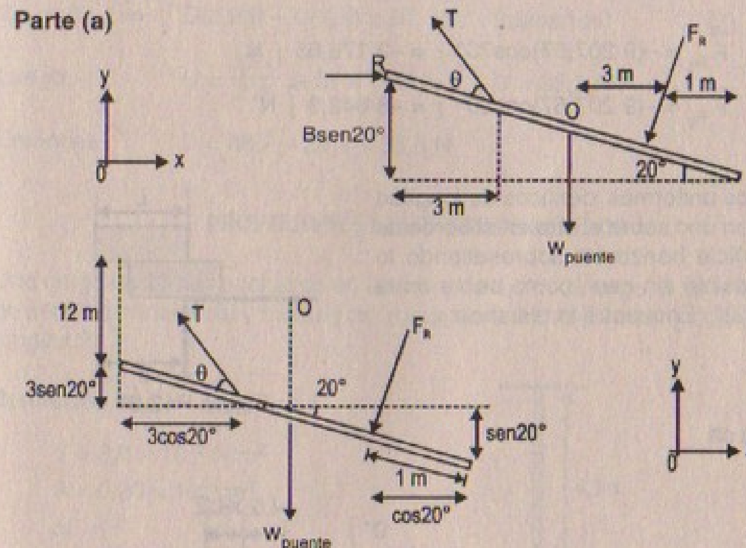
Figura P12.20

Resolución :

$w_{S,C\,y\,A} = 1000\ kg \;; \qquad M_{puente} = 2\,000\ kg$

$\operatorname{sen}20° = 0{,}345 \;; \qquad \cos 20° = 0{,}9386$

Parte (a)



Por componentes:

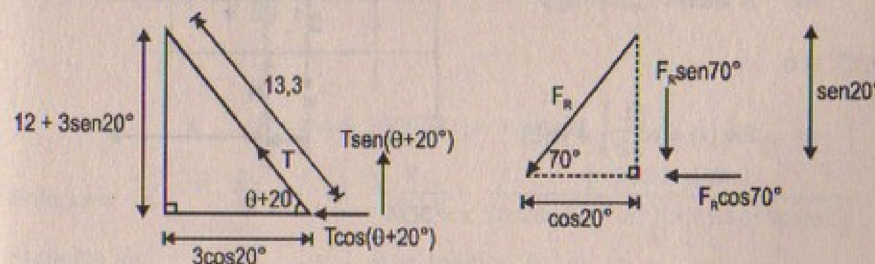
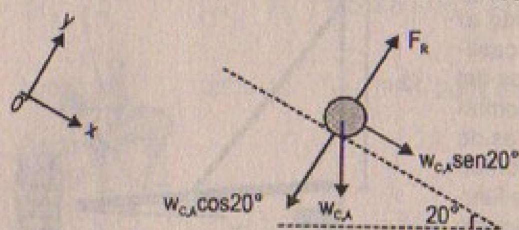


Diagrama de cuerpo libre de: Armadura-corcel



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_R = w_{C.A}\cos 20°$$

$$\therefore \quad F_R = (1\,000)(9{,}81)(0{,}9386)$$

$$F_R \approx 9207{,}67 \text{ N}$$

Por primera condición de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}(\theta + 20°) - F_R \cos 20° - w_{puente} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{9\,207{,}67\,(0{,}9386) + 2\,000(9{,}81)}{\dfrac{12 + 3\,\text{sen}20°}{13{,}3}} \qquad \therefore \quad T \approx 28\,839 \text{ N}$$

Parte (b) $\vec{F}_{R_x} = -(9\,207{,}67)\cos 70°\ \hat{i} = -3\,176{,}65\ \hat{i}$ N

$\vec{F}_{R_y} = -(9\,207{,}67)\cos 20°\ \hat{j} = -8\,642{,}3\ \hat{j}$ N

21. Dos ladrillos uniformes idénticos de longitud L se colocan uno sobre el otro en el borde de una superficie horizontal sobresaliendo lo máximo posible sin caer, como se ve en la figura P12.21. Encuentre la distancia x.

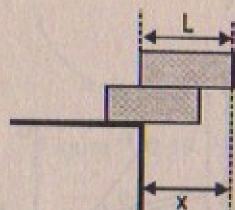
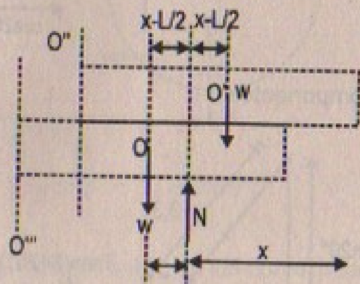


Figura P12.21

Resolución :21



$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = 2w$$

$$\Sigma \tau_o''' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2w\,(x) = w\left(\frac{L}{2}\right) + w(L)$$

$$\therefore \quad x = 3L/4$$

22. La figura P12.22 muestra una garrochista que sostiene en equilibrio una garrocha de 29.4 N ejerciendo una fuerza hacia arriba, **U**, con su mano delantera, y una fuerza hacia abajo, **D**, con su mano trasera. Si suponemos que el peso de la garrocha actúa en su punto medio, ¿cuáles son las magnitudes de **U** y **D**?

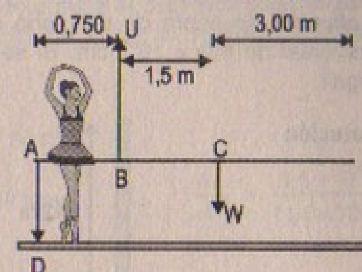


Figura P12.22

Resolución :

$w = 29{,}4$ N

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad U - D - w = 0 \qquad \Rightarrow \quad U - D = 29{,}4 \text{ N} \quad ...(1)$$

Por otro lado:

$$\Sigma \tau_c = 0 \quad \Rightarrow \quad D(2{,}25) - U(1{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(sumando)} \quad ...(2)$$

Luego: $$U = \frac{1{,}5\,U}{2{,}25} + 29{,}4 \qquad \therefore \quad U = 88{,}2 \text{ N}$$

Entonces $$D = 88{,}2 - 29{,}4 = 58{,}8 \text{ N}$$

PROPIEDADES ELÁSTICAS DE SÓLIDOS

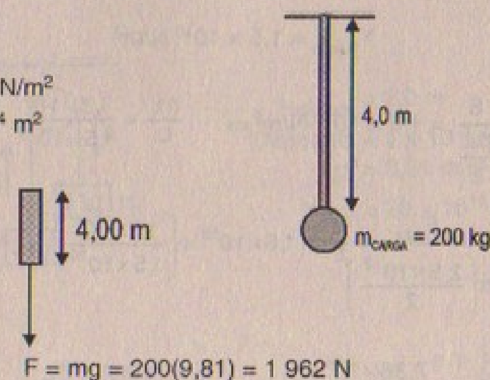
23. Una carga de 200 kg cuelga de un alambre de 4,0 m de largo, $0{,}20 \times 10^{-4}$ m² de área de sección transversal y módulo de Young de $8{,}0 \times 10^{10}$ N/m². ¿Cuánto aumenta su longitud?

Resolución :23

$Y = 8{,}0 \times 10^{10}$ N/m²

$A = 0{,}20 \times 10^{-4}$ m²

$\Delta L = ?$



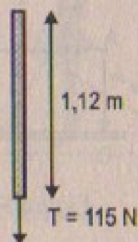
$$F = mg = 200(9{,}81) = 1\,962 \text{ N}$$

Entonces: $$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{F.L}{A.Y} = \frac{(1\,962\text{ N})(4\text{m})}{(0{,}20\times10^{-4}\text{m}^2)(8{,}0\times10^{10}\text{N/m}^2)}$$

Aumenta en: $$\therefore \quad \Delta L = 4{,}905 \times 10^{-3} \text{ m}$$

24. Un alambre de acero de un piano de 1,12 m de largo tiene un área de sección transversal de $6{,}0 \times 10^{-3}$ cm. Si se somete a una tensión de 115 N, ¿cuánto se alarga?

Resolución :



Área = $6{,}0 \times 10^{-7}$ m²
$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²
$\Delta L = ?$

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{F.L}{AY}$$

Luego: $$\Delta L = \frac{(115\,N)\times(1{,}12\,m)}{(6{,}0\times10^{-7}m^2)(20\times10^{10}\,N/m^2)}$$

$\therefore$ Se alarga $\Delta L = 10{,}7 \times 10^{-4}$ m

25. Suponga que el módulo de Young para un hueso es $1{,}5 \times 10^{10}$ N/m² y que el hueso se fracturará si se ejercen más de $1{,}5 \times 10^{8}$ N/m². a) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede ejercerse sobre el hueso fémur en la pierna si éste tiene un diámetro efectivo mínimo de 2,5 cm? b) Si esta gran fuerza se aplica comprensivamente, ¿cuánto se acorta un hueso de 25,0 cm de largo?

Resolución :



$Y_{hueso} = 1{,}5 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a) $$\frac{S}{\frac{\Delta L}{L}} = 1{,}5 \times 10^{10}\ N/m^2 \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{1{,}5\times10^{8}}{1{,}5\times10^{10}}$$

$$\frac{F_{máx}}{\pi\left(\frac{2{,}5\times10^{-2}}{2}\right)^2} = 1{,}5\times10^{10}\times\left(\frac{1{,}5\times10^{8}}{1{,}5\times10^{10}}\right) \quad \therefore F_{máx} = 7{,}36 \times 10^{4}\ N$$

Parte (b) $$\frac{7{,}36\times10^{4}}{(3{,}1416)\left[\frac{2{,}5\times10^{-2}}{2}\right]^2} = 1{,}5\times10^{10}\,\frac{\Delta L}{25\times10^{-1}} \quad \therefore \Delta L = 2{,}50\ mm$$

26. Si el límite del cobre es $1{,}5 \times 10^{8}$ N/m², determine el diámetro mínimo que un alambre de cobre puede tener bajo una carga de 10 kg si su límite elástico no va a excederse.

Resolución :

Sabemos que $Y_{cobre} = 11 \times 10^{10}$ N/m²

Además: $$\frac{S}{\frac{\Delta L}{L}} = 11{,}0 \times 10^{10}\ N/m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{1{,}5\times10^{8}}{11{,}0\times10^{10}}$$

Luego: nos piden diámetro bajo una carga de 10 kg

Entonces: $$\frac{10\times(9{,}81)}{\pi R^2} = 11\times10^{10}\times\left(\frac{1{,}5\times10^{18}}{11{,}0\times10^{10}}\right)$$

Entonces resolviendo $$R = \sqrt{\frac{10\times(9{,}81)}{\pi\,(1{,}5\times10^{8})}}$$

$\therefore R = 10^{-5} \times (4{,}567)$ m

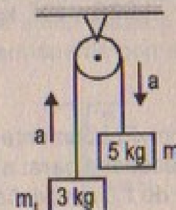
En consecuencia: Diámetro = $2R = 9{,}1 \times 10^{-5}$ m

27. Un alambre cilíndrico de acero de 2,0 m de largo con un diámetro de sección transversal de 4,0 mm se coloca sobre una polea sin fricción. Un extremo del alambre se conecta a una masa de 5,00 kg y el otro extremo se conecta a una masa de 3,00 kg. ¿Cuánto se alarga el alambre mientras las masas están en movimiento?

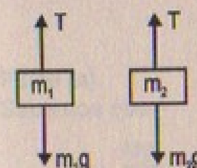
27A. Un alambre cilíndrico de acero de longitud *L* con un diámetro de sección transversal *d* se coloca sobre una polea sin fricción. Un extremo del alambre se conecta a una masa m_1 y el otro extremo se conecta a una masa m_2. ¿Cuánto se alarga el alambre mientras las masas están en movimiento?

Resolución :

$\Delta L = ?$



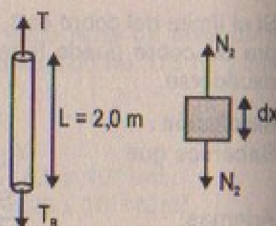
$L_{alambre} = 2{,}0$ m
Diámetro $= 4 \times 10^{-3}$ m
$g = 9{,}81$ m/s²
$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²



$$\left.\begin{array}{l} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{array}\right\} (+) \qquad \therefore \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot g$$

$$T = \frac{2\,m_1 m_2\,g}{m_1 + m_2}$$

Área trans = $\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$



Resumiendo: $\Delta L = \frac{4 \cdot F_{total} \cdot L}{\pi D^2 Y (m_1 + m_2)}$

Entonces: reemplazando:

$$\Delta L = \frac{8(3)(5)(9{,}81)(2)}{(3{,}1416)(4\times10^{-3})^2(8)} \quad \therefore \quad \Delta L = 29{,}2\ \mu m$$

ó $\Delta L = 29{,}2 \times 10^{-6}$ m

28. Calcule la densidad del agua de mar a una profundidad de 1 000 m, donde la presión hidráulica es aproximadamente 1,000 × 10^7 N/m². (La densidad del agua de mar en la superficie es 1,030 × 10^3 kg/m³).

Resolución:

Datos: $\rho_{H_2O\ inicial} = 1{,}03 \times 10^3$ kg/m³ Tener en cuenta:

$h = 10^3$ m $B_{agua\ salada} = 0{,}16 \times 10^{10}$ N/m²

$\Delta P = 1{,}000 \times 10^7$ N/m²

$\rho_{H_2O} = _{final\ del\ mar} = ?$

$$\Delta P = -B \cdot \frac{\Delta V}{V} = -B\frac{(V'-V)}{V} = B\left(1-\frac{V'}{V}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = \left(1-\frac{\rho_{inicial}}{\rho_{final}}\right) \cdot B$$

Luego: $\rho_{final} = \frac{\rho_{inicial}}{1-\frac{\Delta P}{B}} = \frac{1{,}03\times10^3}{1-\frac{10^7}{0{,}16\times10^{10}}} = 1{,}036 \times 10^3$ kg/m³

29. Si el esfuerzo de corte en el acero excede aproximadamente 4,0 × 10^8 N/m², el acero se rompe. Determine la fuerza de corte necesaria para: a) cortar un perno de acero de 1,0 cm de diámetro, y b) hacer un hoyo de 1,0 cm de diámetro en una placa de acero de 0,50 cm de espesor.

Resolución:

$S_{corte\ acero} = 8{,}4 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a) Área = $\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-2}}{2}\right)^2 = 3{,}1416\left(\frac{10^{-2}}{2}\right)^2$

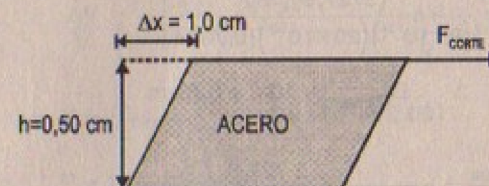
$\therefore$ Área = $0{,}7854 \times 10^{-4}$ m²

Por dato: $S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\frac{\Delta x}{h}} \Rightarrow \frac{\Delta x}{h} = \frac{4{,}0\times10^8}{8{,}4\times10^{10}}$

Entonces: $\frac{F_{corte}}{0{,}7854\times10^{-4}} = 8{,}4\times10^{10}\times\left(\frac{4{,}0\times10^8}{8{,}4\times10^{10}}\right)$

$\therefore$ $F_{corte} = 31{,}416$ kN

Parte (b)



$S_{corte} = 8{,}4 \times 10^{10}$ N/m² Área = $\pi\left(\frac{1\times10^{-2}}{2}\right)^2 = 3{,}1416\left(\frac{10^{-2}}{2}\right)^2$

$\therefore$ Área = $0{,}7854 \times 10^{-4}$ m²

Entonces

Como: $\frac{\Delta x}{h} = \frac{F_{corte}}{A \cdot S}$

Luego: $\frac{F_{corte}}{0{,}7854\times10^{-4}} = 8{,}4\times10^{10}\times\frac{1{,}0\times10^{-2}}{0{,}50\times10^{-2}}$

$\therefore$ $F_{corte} = 62{,}8$ kN

30. a) Encuentre el diámetro mínimo de un alambre de acero de 18 m de largo que no se elongará más de 9,0 mm cuando se cuelga una carga de 380 kg en su extremo inferior. b) Si el límite elástico para este acero es 3,0 × 10^8 N/m², ¿ocurrirá una deformación permanente con esta carga?

Resolución:



$\Delta L = 9$ mm

Masa = 380 kg

$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²

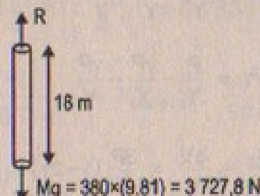
g = 9,81 m/s²

D = Diámetro = ?

Parte (a)

Sabemos que:

$\Delta L = \frac{MgL}{A.Y}$



Por otro lado: $\text{Área} = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = (3{,}1416)(0{,}25)\,D^2$

$\Rightarrow$ $\text{Área} = 0{,}7854\,D^2$

Entonces: $9\times10^{-3}\,m = \dfrac{3\,727{,}8\,N\times18\,m}{20\times10^{10}N/m^2\times(0{,}7854D^2)}$

$\Rightarrow$ $D^2 = \dfrac{(3727{,}8)(18)}{(9\times10^{-3})(20\times10^{10})(0{,}7854)}$

$\therefore$ $D_{diámetro} \approx 10^{-3}\times6{,}89\,m$

Parte (b)

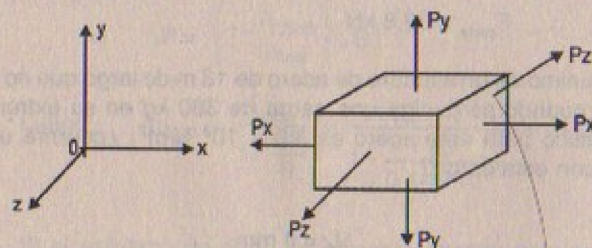
Como: $\dfrac{F_{carga}}{\text{Área}} = \dfrac{3\,727{,}8}{(3{,}1416)(0{,}7854)(6{,}89\times10^{-3})^2}$

$\therefore$ Esfuerzo de tensión $= 0{,}32\times10^8\,N/m^2$

Como el esfuerzo de tensión de esta carga es menor que el límite elástico para el acero, entonces "sí" ocurrirá una deformación permanente con esta carga.

31. Cuando el agua se congela se expande cerca de 9%. ¿Cuál sería el aumento de presión dentro del monoblock del motor de su automóvil si el agua en él se congelará? (El módulo volumétrico del hielo es $2{,}0\times10^9\,N/m^2$.)

Resolución :



Dato: $\beta_{hielo} = 2{,}0\times10^9\,N/m^2$

$\dfrac{\Delta V}{V} = 0{,}09$

Eje x: $\dfrac{\Delta L_x}{L_x} = \dfrac{P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}$

$\dfrac{\Delta L_y}{L_y} = \dfrac{P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}$ (+)

$\dfrac{\Delta L_z}{L_z} = \dfrac{P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}-\dfrac{\gamma P}{Y}$

$$\frac{\Delta L_x}{L_x}+\frac{\Delta L_y}{L_y}+\frac{\Delta L_z}{L_z} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3P}{Y}(1-2\gamma) \quad ...(1)$$

Donde: Y = módulo de Young
P = esfuerzo de presión
γ = módulo de Poisson

Entonces:

Por otro lado sabemos que: $\beta = \dfrac{Y}{3(1-2\gamma)}$ ... (α)

Reemplazando (α) en (1)

Luego: $\dfrac{\Delta V}{V} = P\left[\dfrac{3(1-2\gamma)}{Y}\right] \Rightarrow \beta\cdot\dfrac{\Delta V}{V} = P$

$\therefore$ $P = (\beta_{hielo})\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right) = 2{,}0\times10^9\times(0{,}09)$

$\therefore$ $P = 18\times10^7\,N/m^2$

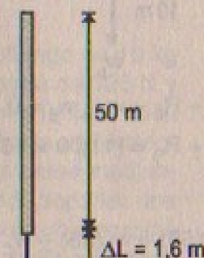
32. Por seguridad en el ascenso, un montañista utiliza una cuerda de nylon de 50 m que tiene 10 mm de diámetro. Cuando soporta al alpinista de 90 kg en un extremo, la cuerda se elonga 1,6 m. Encuentre el módulo de Young correspondiente al material de la cuerda.

Resolución :

Dato:

Diámetro tranv. = 10 mm

$Y_{material} = ?$



$W_{montañista} = 90\times(9{,}81) = 882{,}9\,N$

Sabemos que: $\dfrac{F_{tension}}{\text{Área}} = Y_{material}\cdot\dfrac{\Delta L}{L}$

$\text{Área} = \pi\left(\dfrac{\text{Diametro}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow$ $\text{Área} = (3{,}1416)\left(\dfrac{10^{-2}}{2}\right)^2 = 0{,}7854\times10^{-4}\,m^2$

Entonces: $\dfrac{882{,}9\,N}{0{,}7854\times10^{-4}\,m^2} = Y_{material}\cdot\dfrac{1{,}6\,m}{50\,m}$

$\therefore$ $Y_{material} = 3{,}513\times10^8\,N/m^2$

PROBLEMAS ADICIONALES

33. Un puente de 50 m de largo y $8{,}0 \times 10^4$ kg de masa está soportado en cada extremo, como muestra la figura P12.33. Una camioneta de masa igual a $3{,}0 \times 10^4$ kg se localiza a 15 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

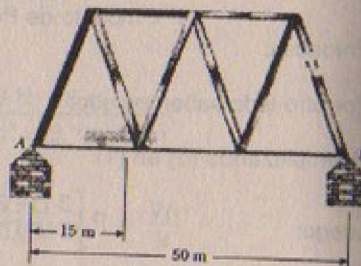
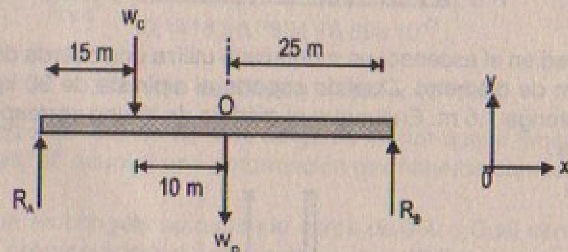


Figura P12.33

Resolución :

$M_{camioneta} = 3{,}0 \times 10^4$ kg ; $M_{puente} = 8{,}0 \times 10^4$ kg

$g = 9{,}81$ m/s^2



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - w_c - w_p = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_A + R_B = (11{,}00 \times 10^4)(9{,}81)\ N$$

Por otro lado: $\Sigma\tau_A = 0$

$$\Rightarrow \quad R_B(50) - w_P(25) - w_C(15) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_B(50) = (8{,}0 \times 10^4)(9{,}81)(25) + (3{,}0 \times 10^4)(9{,}81)(15)$$

$$\therefore \quad R_B = 48{,}069 \times 10^4\ N$$

Como: $R_A + 48{,}069 \times 10^4 = 107{,}91 \times 10^4$

$$\Rightarrow \quad R_A = 59{,}841 \times 10^4\ N$$

34. Una esfera sólida de radio R y masa M se coloca en una cuña, como se ilustra en la figura P12.34. Las superficies interiores de la cuña no ofrecen fricción. Determine las fuerzas ejercidas por la cuña sobre la esfera en los dos puntos de contacto.

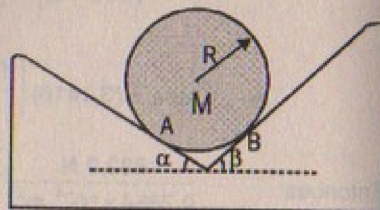


Figura P12.34

Resolución :

Por lo tanto: $\alpha + \beta = 90°$

Por componentes:

$\Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow \quad R_A \cos\beta - R_B \cos\alpha = 0 \quad \ldots (1)$$

$\Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow \quad R_A \operatorname{sen}\beta + R_B \operatorname{sen}\alpha = w \quad \ldots (2)$$

(1) en (2)

$$R_A \operatorname{sen}\beta + R_A \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha = w \quad \therefore \quad R_A = \frac{w}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \cdot \cos\alpha$$

Luego: $$R_B = \frac{w\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

Reemplazando: $$R_A = \frac{M.g\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\ ; \quad R_B = \frac{Mg\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

35. La figura P12.35 muestra a un chango de 10 kg que sube por una escalera uniforme de 120 N y longitud L. Los extremos superior e inferior de la escalera descansan sobre superficies sin fricción. El extremo inferior está fijado a la pared mediante una cuerda horizontal que puede soportar una tensión máxima de 110 N. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la escalera. b) Encuentre la tensión en la cuerda cuando el chango ha subido un tercio de la escalera. c) Encuentre la distancia máxima d que el chango puede subir por la escalera antes de que se rompa la cuerda. Exprese su respuesta como una fracción de L.

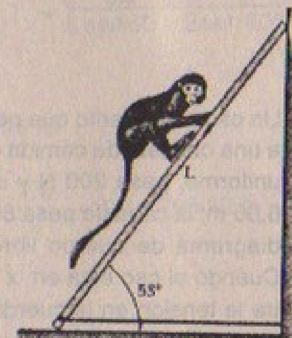


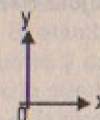
Figura P12.35

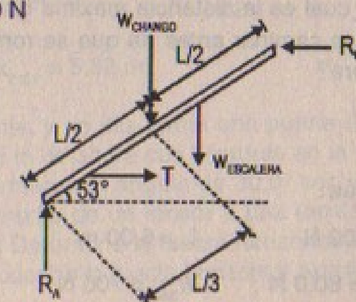
Resolución :

$M_{chango} = 10$ kg ; $w_{escalera} = 120$ N

$T = 110$ N

Parte (a)





Parte (b) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -R_A - w_{chango} - w_{escalera} = 0$

$\therefore \quad R_A = 10 \times (9{,}81) + 120 = 218{,}1\ N$

Por otro lado:

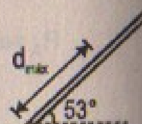
$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow -R_A(L\cos 53^\circ) + w_{chango}\left(\frac{2L}{3}\cos 53^\circ\right) + w_{escalera}\left(\frac{L}{2}\cos 53^\circ\right) + T(L\,\text{sen}53^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10(9{,}81)\left(\frac{2}{3}\right)(0{,}6) + 120\left(\frac{1}{2}\right)(0{,}6) + T(0{,}8) = 218{,}1\ (0{,}6)$$

$$\therefore \quad T = 55{,}62\ N$$

Parte (c)

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow w_{chango}(L - d_{máx})\cos 53^\circ + w_E\left(\frac{L}{2}\cos 53^\circ\right) + 110\ (L)\text{sen}53^\circ - R_A(L\cos 53^\circ) = 0$$



Entonces:

$$98{,}1\ (L - d_{máx})(0{,}6) + 120\left(\frac{L}{2}\right)(0{,}6) + 110L\ (0{,}8) - 218{,}1\ (L)(0{,}6) = 0$$

$$58{,}86\ d_{máx} = 52\ L$$

$$\therefore \quad d_{máx} = \frac{52}{59}L$$

36. Un oso hambriento que pesa 700 N camina sobre una viga con la intención de llegar a una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga (Fig. P12.36). Ésta es uniforme, pesa 200 N y su largo es igual a 6,00 m; la canasta pesa 80,0 N. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. b) Cuando el oso está en x = 1,00 m, encuentre la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza ejercida por la pared sobre el extremo izquierdo de la viga. c) Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de que se rompa el alambre?

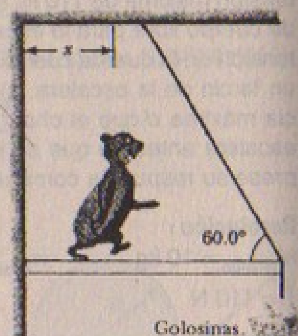


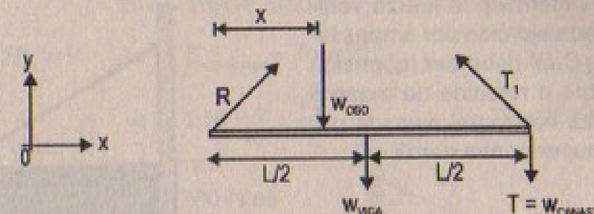
Figura P12.36

Resolución:

$w_{viga} = 200\ N$; $L = 6{,}00\ m$

$w_{canasta} = 80{,}0\ N$; $w_{oso} = 700\ N$

Parte (a)



Parte (b)

Para: x = 1 m ; T = ? ; R_x = ? ; R_y = ?

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -T_1\cos 60^\circ + R_x = 0 \qquad \therefore R_x = T_1\cos 60^\circ$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y + T_1\,\text{sen}60 - w_C - w_V - w_O = 0$

$\therefore \quad R_y = w_C + w_V + w_O - T_1\,\text{sen}60^\circ$

Por otro lado:

$$\Sigma\tau_R = 0 \Rightarrow T_1\,\text{sen}60^\circ(L) - w_V\left(\frac{L}{2}\right) - w_{oso}(1) = 0$$

Luego: $T_1\,\text{sen}60^\circ = \dfrac{w_{oso}}{L} + \dfrac{w_{viga}}{2} \qquad \therefore \quad T_1 = \dfrac{w_{oso}}{L\,\text{sen}60} + \dfrac{w_{viga}}{2\,\text{sen}60^\circ}$

En consecuencia:

$$R_x = T_1\cos 60^\circ = \left[\frac{w_{oso}}{L\,\text{sen}60} + \frac{w_{viga}}{2\,\text{sen}60^\circ}\right]\cos 60^\circ = 125\ N$$

$$R_y = w_C + w_V + w_O - T_1\,\text{sen}60^\circ = 80 + 200 + 700 - \frac{700}{6} - 100 = 763{,}33\ N$$

Hallando $\quad x_{máx} = ? \quad T_1 = 900\ N$

$$\Sigma\tau_R = 0 \Rightarrow 900\text{sen}60^\circ\ L - w_V\left(\frac{1}{2}\right) - w_{oso}\ (x_{máx}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{máx} = 900\ (6)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 200\left(\frac{6}{2}\right)$$

$$\therefore \quad x_{máx} = 5{,}82\ m$$

37. El viejo Mac Donald tuvo una granja, y en ella había una puerta (Fig. P12.37). La puerta medía 3,0 m de ancho y 1,8 m de altura con bisagras en la parte superior e inferior. El alambre de retenida formaba un ángulo de 30,0° con la parte superior de la puerta y estaba sujeta por medio de un tensor a una tensión de 200 N. La masa de la puerta era de 40 kg. a) Determine la fuerza horizontal ejercida sobre la puerta por la bisagra inferior. b) Encuentre la fuerza horizontal ejercida por la bisagra

superior.c) Determine la fuerza vertical combinada ejercida por ambas bisagras. d) ¿Cuál debe ser la tensión en el alambre d retenida de manera que la fuerza horizontal ejercida por la bisagra superior sea cero?

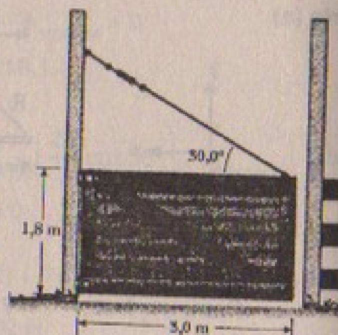


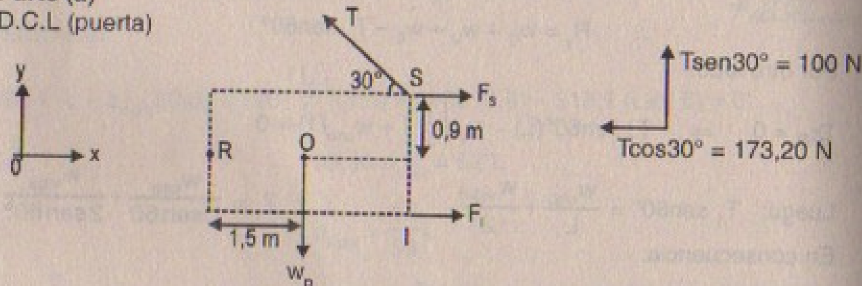
Figura P12.37

Resolución :

Datos: $M_{puerta} = 40$ kg ; $T = 200$ N

Parte (a)

D.C.L (puerta)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30° - F_s - F_i = 0 \Rightarrow 173{,}20 = F_s + F_i$ ... (1)

$\Sigma \tau_S = 0 \Rightarrow w_p(1{,}5) + T\cos 30\,(0) - F_i\,(1{,}8) = 0$ ... (2)

Así también:

$\Sigma \tau_O = 0 \Rightarrow F_s\,(0{,}9) + T\cos 30°\,(0{,}9) + T\text{sen}30°\,(1{,}5) - F_i\,(0{,}9) = 0$ ... (3)

De (1): $F_s = 173{,}20 - F_i$

De (2): $F_i = w_{puerta}\,(1{,}5\text{ m})/1{,}8$

Entonces de (3)

$$\left[\frac{F_x(1{,}8) - w_p(1{,}5)}{0{,}9} - F_i\right] 0{,}9 + T\cos 30°\,(0{,}9) + T\text{sen}30°\,(1{,}5) = F_i\,(0{,}9)$$

Luego: De (2) $F_{inferior} = \dfrac{40\,(9{,}81)}{1{,}8}$

$\therefore F_{bisagra\ inferior} = 218$ N

De (1) $173{,}20 = F_{superior} + 218 \quad \therefore F_{superior} = 44{,}8$ N

Parte (c) $F_V = 292$ N (hacia arriba)

Parte (d) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{b.inferior} = T\cos 30°$

$\Rightarrow 218 = T \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore T = 252$ N

38. Un pescante uniforme de 1 200 N se sostiene por medio de un cable, como en la figura P12.38. El pescante gira alrededor de un pivote en la parte inferior, y un objeto de 2 000 N cuelga de su parte superior. Encuentre la tensión en el cable y las componentes de la fuerza de reacción del piso sobre el pescante.

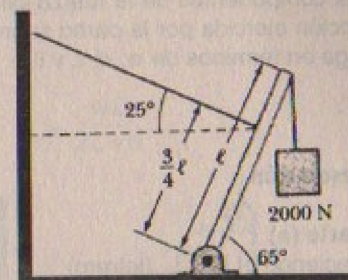
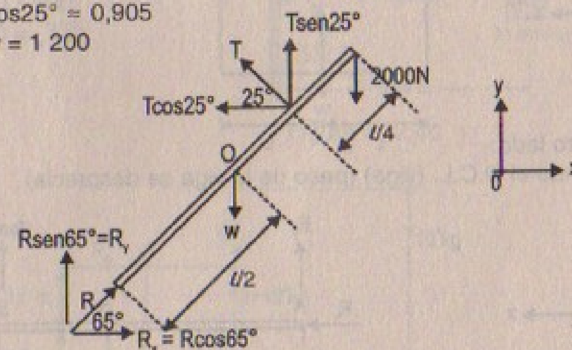


Figura P12.38

Resolución :

Considerar: sen25° ≈ 0,426
cos25° ≈ 0,905
w = 1 200



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R\cos 65° = T\cos 65°$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1\,200 + 2\,000 = T\text{sen}25° + R\text{sen}65°$

$\Rightarrow 3\,200 = T\text{sen}25° + \dfrac{T\cos 25°}{\cos 65°} \cdot \text{sen}65° = T(1/\text{sen}25°)$

$\therefore T = 1\,363{,}2$ N

En consecuencia:

$R_x = R\cos 65° = R\text{sen}25° = T\cos 25° \Rightarrow R_x = (1363{,}2)(0{,}905)$

$\therefore R_x = 1233{,}7$ N

$R_y = R\text{sen}65° = R\cos 25°$

$\Rightarrow R_y = \dfrac{R_x}{\text{sen }25°} \cdot \cos 25° \Rightarrow R_y = \dfrac{1\,233{,}7}{0{,}426} \times (0{,}905)$

$\therefore R_y = 2\,620{,}88$ N

39. Un letrero uniforme de peso w y ancho $2L$ cuelga de una ligera viga horizontal, articulada en la pared y soportada por un cable (Fig. P12.39). Determine a) la tensión en el cable y b) las componentes de la fuerza de reacción ejercida por la pared sobre la viga en términos de w, d, L y θ.

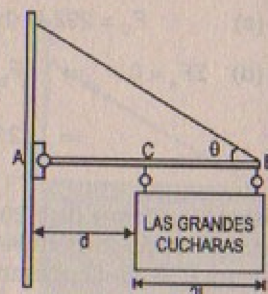
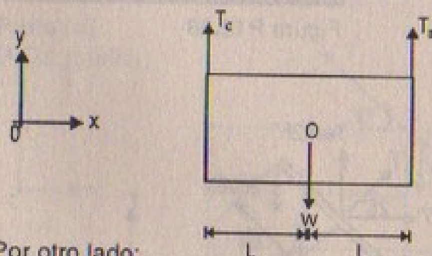


Figura P12.39

Resolución :

Parte (a)

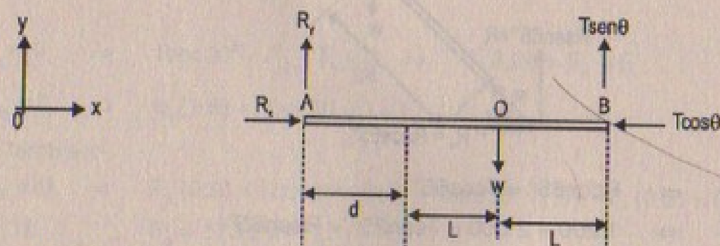
Haciendo el D.C.L. (letrero)



$$\Sigma\tau_0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad T_B(L) = T_A(L)$$
$$\therefore \quad T_B = T_A$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = T_B = w/2$$

Por otro lado:

Haciendo el D.C.L. (viga) (peso de la viga se desprecia)



Por la primera condición de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x - T\cos\theta = 0$$
$$\therefore \quad R_x = T\cos\theta \qquad \dots(1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y + T\sen\theta - w = 0$$
$$\therefore \quad R_y = w - T\sen\theta \qquad \dots(2)$$

Por la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T\sen\theta\,(d + 2L) - w\,(L + d) = 0$$
$$\Rightarrow \quad T\sen\theta\,(d + 2L) = w(L + d)$$
$$\therefore \quad T = \frac{w\,(L+d)}{\sen\theta(d+2L)}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad R_x = T\cos\theta \quad \Rightarrow \quad R_x = \dfrac{w\,(L+d)}{\sen\theta\,(2L+d)}\cdot\cos\theta$

$$\therefore \quad R_x = w\cotg\theta\left(\frac{L+d}{2L+d}\right)$$

Por otro lado:

Sabemos que: $\quad R_y = w - T\sen\theta$

$$\Rightarrow \quad R_y = w - \frac{w(L+d)}{2L+d} \qquad \therefore \quad R_y = \frac{wL}{2L+d}$$

40. La figura P12.40 muestra una grúa de 3 000 kg de masa que soporta una carga de 10 000 kg. La grúa se articula con un pasador liso en A y descansa contra un soporte liso en B. Encuentre las fuerzas de reacción en A y B.

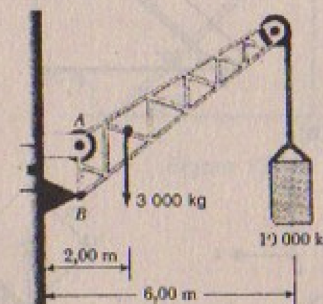
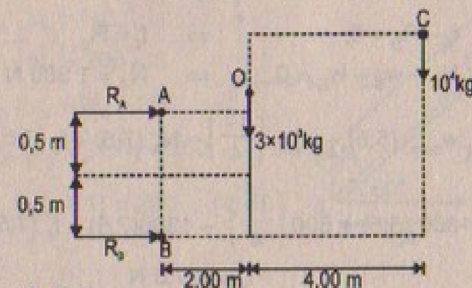


Figura P12.40

Resolución :

$g = 9{,}81\ m/s^2$



Por la segunda condición:

$$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B\,(1) = 3\times10^3\,(9{,}81)(2) + 10^4(9{,}81)(6)$$
$$\therefore \quad R_B = 647{,}46\ kN$$

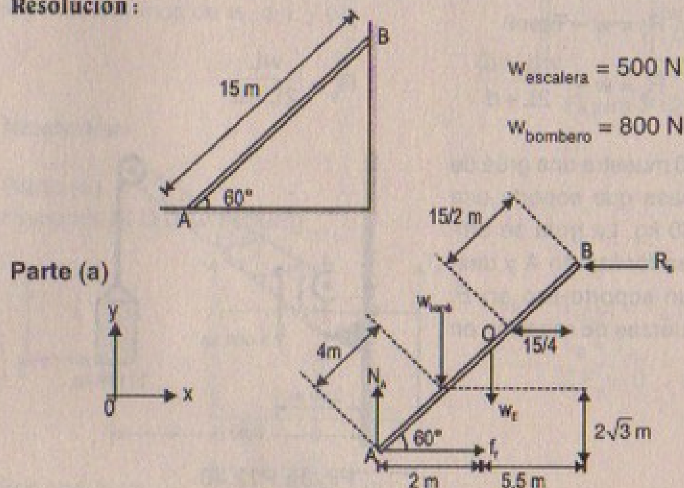
Por otro lado:

$$\Sigma\tau_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_A(1) = 3\times10^3\,(9{,}81)(2) + 10^4\,(9{,}81)(6)$$
$$\therefore \quad R_A = -647{,}46\ kN$$

41. Una escalera uniforme de 15 m que pesa 500 N descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo de 60,0° con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de 800 N está a 4,00 m de la parte inferior. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está 9,00 m arriba ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

41A. Una escalera uniforme de longitud L y masa m_1 descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de masa m_2 está a una distancia **x** de la parte inferior. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a una distancia *d* del pie de la escalera, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

Resolución:



$w_{escalera} = 500$ N

$w_{bombero} = 800$ N

Parte (a)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_r - R_B = 0 \Rightarrow f_r = R_B$ ... (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_A - W_B - W_E = 0 \Rightarrow N_A = 1\,300$ N

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow w_{bom.}(5{,}5) + w_{esc}\left(\frac{15}{4}\right) - N_A(7{,}5) + f_r(7{,}5\sqrt{3}) = 0$$

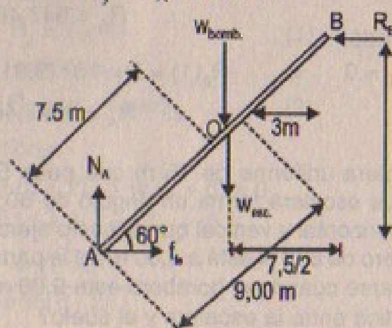
$$\Rightarrow 800(5{,}5) + 500\left(\frac{15}{4}\right) - 1300(7{,}5) + f_r(7{,}5\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \quad f_r = 267{,}5 \text{ N}$$

Luego las fuerzas que el suelo ejercerá sobre la escalera son:

$F_x = f_r = 267{,}5$ N $\qquad F_y = N_A = 1\,300$ N

Parte (b)



Sabemos que:

$N_A = 1300$ N

Además:

$f_r = \mu_e N = 1300 \cdot \mu_e$

Entonces por segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow w_{bom.}(3) + w_{esc}\left(\frac{7{,}5}{2}\right) + f_{le}(7{,}5\sqrt{3}) - N_A(7{,}5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1\,300(7{,}5) - 800(3) - 500\left(\frac{7{,}5}{2}\right) = \mu_e(1\,300)(7{,}5)\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mu_e = 0{,}32$$

42. Una escalera uniforme que pesa 200 N está reclinada contra una pared (Fig. 12.12). La escalera desliza cuando θ es 60°. Suponiendo que los coeficientes de fricción estática en la pared y en el suelo son los mismos, obtenga un valor para μ_e.

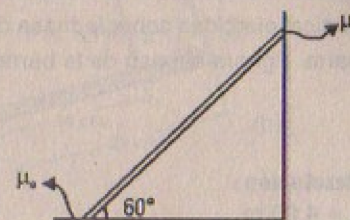


Figura 12.12

Resolución:

$w_{escalera} = 200$ N

$\mu_e = ?$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_{r1} - N_B = 0$

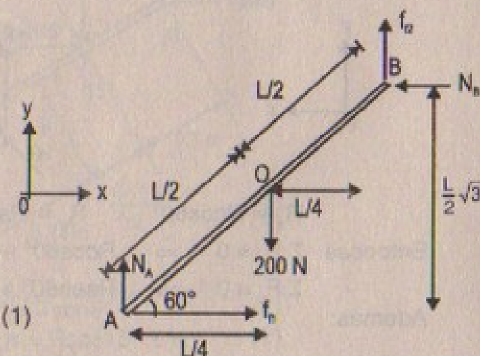
$\Rightarrow N_A \cdot \mu_e = N_B$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_{r2} + N_A - 200 = 0$

$\Rightarrow N_B \cdot \mu_e + N_A = 200$

$\Rightarrow (N_A \cdot \mu_e)\mu_e + N_A = 200$

$\Rightarrow N_A(\mu_e^2 + 1) = 200$ ... (1)



Por otro lado:

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow 200\left(\frac{L}{4}\right) + f_{r1}\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right) - N_A\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 50L + N_A \cdot \mu_e\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right) = N_A\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow N_A\left(1 - \mu_e\sqrt{3}\right) = 100 \quad \text{... (2)}$$

(1) ÷ (2) $\qquad \mu_e^2 + 1 = 2\left(1 - \mu_e\sqrt{3}\right)$

Desarrollando la ecuación de 2.° grado resulta que:

$$\mu_e = 0{,}268$$

43. Un tiburón de 10 000 N está sostenido por medio de un cable unido a una barra de 4,00 m que está articulada en la base. Calcule la tensión necesaria para mantener el sistema en la posición mostrada en la figura P12.43. Encuentre las fuerzas horizontal y vertical ejercidas sobre la masa de la barra. (Ignore el peso de la barra).

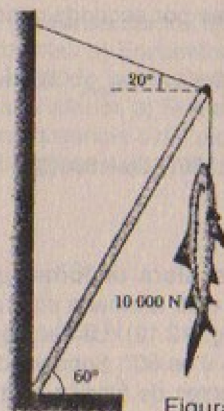
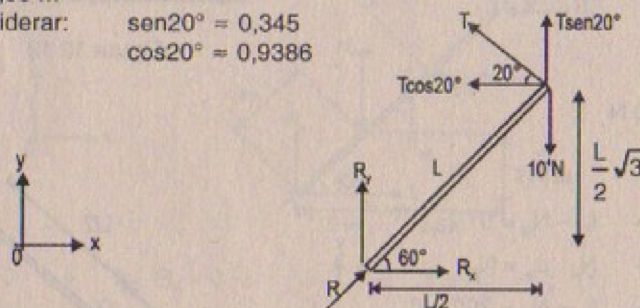


Figura P12.43

Resolución :

L = 4,00 m

Considerar: $\operatorname{sen}20° \approx 0{,}345$
$\cos 20° \approx 0{,}9386$



$R_x = R\cos 60° \quad \wedge \quad R_y = R\operatorname{sen}60°$

Entonces: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R\cos 60° - T\cos 20° = 0 \quad \therefore R\cos 60° = T\cos 20°$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R\operatorname{sen}60° + T\operatorname{sen}20° = 10^4$

Además:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow T\cos(20)\left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right) + T\operatorname{sen}20°\left(\frac{L}{2}\right) - 10^4\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T\left[\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}20° \cdot \frac{1}{2}\right] = 5 \times 10^3$$

$$\therefore T = 5{,}08 \text{ kN}$$

Parte (b)

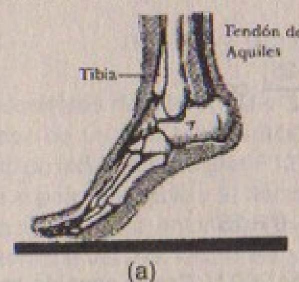
$R_x = R\cos 60° = T\cos 20° \Rightarrow R_x = (5{,}08 \text{ kN})(0{,}9386)$

$\therefore R_x = 4\,768 \text{ N}$

$$R_y = R\operatorname{sen}60° = \frac{T\cos 20°}{\cos 60°} \cdot \operatorname{sen}60° = \frac{(5{,}08 \text{ kN})(0{,}9386)(\sqrt{3}/2)}{(0{,}5)}$$

$\therefore R_y = 8\,258{,}6 \text{ N}$

44. Cuando una persona se para sobre la punta del pie (una posición difícil), la posición del pie es como se indica en la figura P12.44a. El peso total del cuerpo **w** es soportado por la fuerza **n** ejercida por el piso sobre la punta del pie. En la figura P12.44b se presenta un modelo mecánico para esta situación, donde **T** es la fuerza ejercida por el talón de Aquiles sobre el pie y **R** es la fuerza ejercida por la tibia sobre el pie. Encuentre los valores de T, R y θ cuando $w = 700$ N.



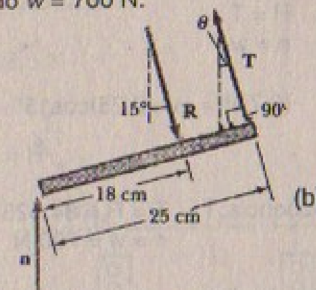
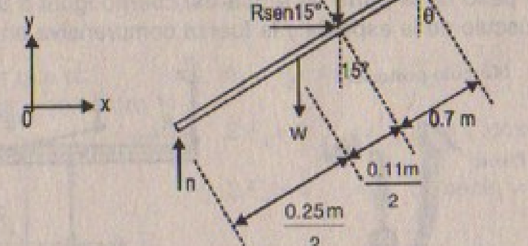


Figura P12.44

Resolución :

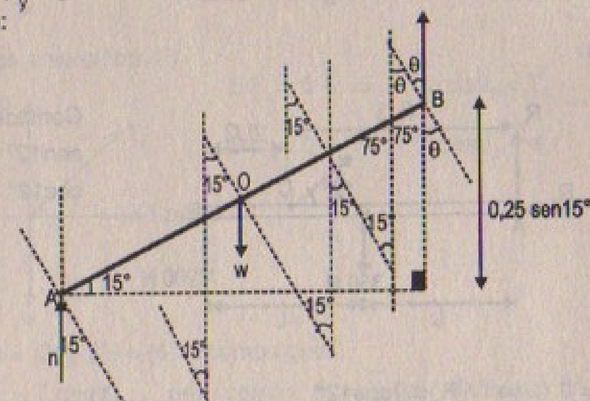
Considerar: $\operatorname{sen}15° \approx 0{,}259$
$\cos 15° \approx 0{,}966$



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R\operatorname{sen}15° = T\operatorname{sen}\theta \quad \text{... (1)}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta + n = R\cos 15° + w \quad \text{... (2)}$

Por otro lado:



En consecuencia $\theta = 15°$

$$\Sigma\tau_B = 0 \Rightarrow w\cdot\frac{(0{,}25)}{2}\cos15^\circ + R(0{,}7) - n(0{,}25)\cos15^\circ = 0$$

$$\Rightarrow n(0{,}25)\cos15^\circ = w\frac{(0{,}25)}{2}\cos15^\circ + R(0{,}7) \quad ...(3)$$

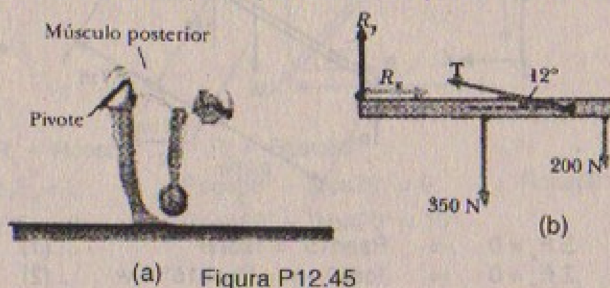
De (1): $R = T$
De (2): $n = w$

De (3): $(0{,}7)R = +w(0{,}25)\cos15^\circ - w\frac{(0{,}25)}{2}\cos15^\circ$

$\therefore R = 84{,}525$ N

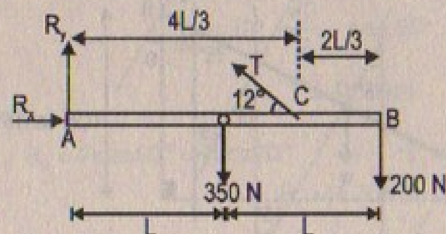
En consecuencia: $T = R = 84{,}525$
$n = w = 700$ N $\qquad \theta = 15^\circ$

45. Una persona se flexiona y levanta un objeto de 200 N. Con la espalda en la posición horizontal (una manera terrible de levantar un objeto) como en la figura P12.45a. El músculo de la espalda unido en un punto dos tercios arriba de la espina dorsal mantiene la posición de la espalda, donde el ángulo entre la espina dorsal y este músculo es 12,0°. Con el modelo mecánico que se presenta en la figura P12.45b y considerando el peso de la parte de arriba del cuerpo igual a 350 N, encuentre la tensión en el músculo de la espalda y la fuerza comprensiva en la espina dorsal.



(a) Figura P12.45

Resolución:
Sea:



Considerar:
$\operatorname{sen}12^\circ \approx 0{,}209$
$\cos12^\circ \approx 0{,}978$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = T\cos12^\circ \quad ...(1)$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y + T\operatorname{sen}12^\circ = 550$ N $\quad ...(2)$

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow T\operatorname{sen}12^\circ\left(\frac{4L}{3}\right) = 350\,(L) + 200\,(2L)$$

$$\Rightarrow T\operatorname{sen}12^\circ = 562{,}5 \quad \therefore T \approx 2\,691{,}4\text{ N}$$

Luego: $R_x = (2\,691{,}4)(0{,}978) \approx 2\,632{,}2$ N

$R_y = 550 - 562{,}5 \approx -12{,}5$ N

46. Dos semáforos de 200 N están suspendidos de un solo cable en la forma que se indica en la figura P12.46. Ignore el peso del cable y a) demuestre que si $\theta_1 = \theta_2 = 2$, entonces $T_1 = T_2$. b) Determine las tres tensiones si $\theta_1 = \theta_2 = 8{,}0^\circ$.

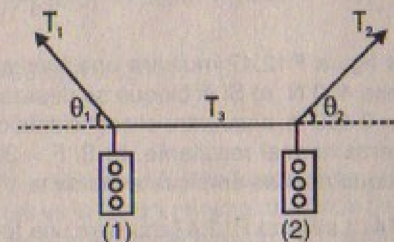
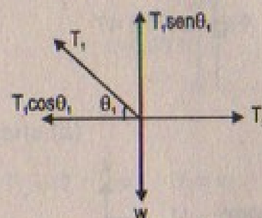


Figura P12.46

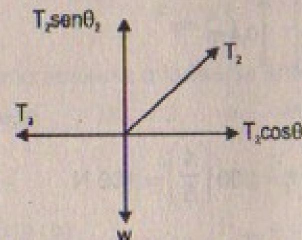
Resolución:
$w_{semáforo} = 200$ N

Parte (a)
Por demostrar que si: $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow T_1 = T_2$
D.C.L (sistema + semáforo 1)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_3 = T_1\cos\theta_1 \quad ...(1)$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1\operatorname{sen}\theta_1 = w \quad ...(2)$

D.C.L (sistema + semáforo 2)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2\cos\theta_2 = T_3 \quad ...(3)$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2\operatorname{sen}\theta_2 = w \quad ...(4)$

Igualando (1) = (3) y (2) = (4) tenemos que:

$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2$ pero como: $\theta_1 = \theta_2$ (por hipótesis)

$\Rightarrow T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_1 \quad \therefore T_2 = T_1$ l.q.q.d.

Parte (b)
Si $\theta_1 = \theta_2 = 8°$ (considerar: sen8° ≈ 0,141; cos8° ≈ 0,9899)

Luego: $T_1 = \frac{w}{\text{sen}\theta_1} = \frac{200}{\text{sen}8°} = \frac{200}{0,141}$ ∴ $T_1 = 1\,418{,}44$ N

$T_2 = \frac{w}{\text{sen}\theta_2} = \frac{200}{\text{sen}8°} = \frac{200}{0,141}$ ∴ $T_2 = 1\,418{,}44$ N

$T_3 = T_1\cos\theta_1 = 1\,418{,}44\cos 8°$ ∴ $T_3 = 1\,404{,}1$ N

47. La figura P12.47 muestra una fuerza que actúa sobre un bloque rectangular que pesa 400 N. a) Si el bloque se desliza con velocidad constante cuando F = 200 N y h = 0,400 m, encuentre el coeficiente de fricción por deslizamiento y la posición de la fuerza normal resultante. b) Si F = 300 N, determine el valor de *h* para el cual el bloque apenas empieza a ladearse.

47A. La figura P12.47 muestra una fuerza *F* que actúa sobre un bloque rectangular de masa *m*. a) Si el bloque se desliza con velocidad constante, encuentre el coeficiente de fricción por deslizamiento y la posición de la fuerza normal resultante. b) Determine el valor de *h* para el cual el bloque apenas empieza a ladearse.

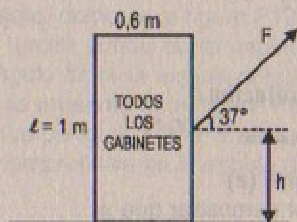
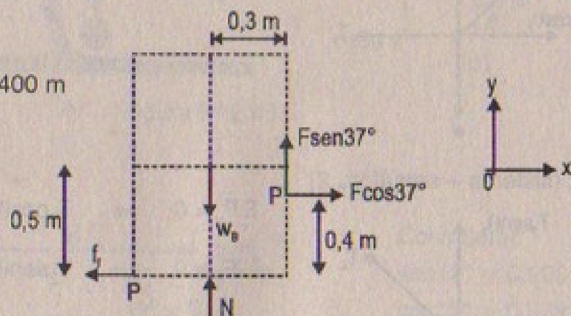


Figura P12.47

Resolución :
$w_{bloque} = 400$ N

Parte (a)
F = 200 N ; h = 0,400 m



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F\cos37° = f_f$ ∴ $f_f = 200\left(\frac{4}{5}\right) = 160$ N

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F\text{sen}37° = w_{bloque}$

$\Rightarrow N = 400 - 200\left(\frac{3}{5}\right) = 280$ N

Luego: $f_f = N\cdot\mu_e \Rightarrow 160 = 280\cdot\mu_e$ ∴ $\mu_e = 0{,}57$

Hallando la posición de la normal resultante

Sabemos que $N_{resultante} = w_{bloque} - F\text{sen}37° = 280$ N

Entonces: Esto quiere decir que el bloque es uniforme

Luego: $\Sigma\tau_P = 0 \Rightarrow N(x) - w_B(0,3) - F\cos37\,(0,4) = 0$

∴ $x_{posición} = 0{,}201$ m (hacia la izquierda)

Parte (b)
Si F = 300 N entonces: N = 0 (empieza a ladearse)

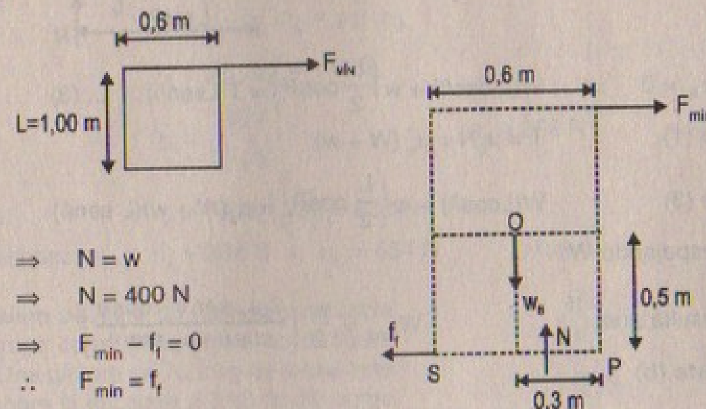
Luego: $\Sigma\tau_P = 0 \Rightarrow N(0,399) + w_B\,(0,3) - F\cos37\,(h) = 0$

$\Rightarrow (0,399) + 400(0,3) = (300)\left(\frac{4}{5}\right)h$

∴ h = 0,51 m

48. Considere que el bloque rectangular del problema 47. Una fuerza **F** se aplica horizontalmente en el borde superior a) ¿Cuál es la fuerza mínima requerida para que el bloque empiece a ladearse? b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática requerido para que el bloque se ladee con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? c) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza mínima requerida para volcar el bloque si el punto de aplicación puede elegirse en cualquier parte de éste.

Resolución :



Parte (a)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w$

$\Rightarrow N = 400$ N

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{min} - f_f = 0$

∴ $F_{min} = f_f$

Como empieza a ladearse entonces $f_f \to 0$

Luego: $\Sigma\tau_P = 0 \Rightarrow w(0,3) - F_{min}\,(1) = 0$

∴ $F_{mínima} = 400\,(0,3) = 120$ N

Parte (b) $F_{min} = f_f = \mu_e\,.\,N$

$\Rightarrow 120 = \mu_e\,(400)$ ∴ $\mu_e = 0{,}3$

Parte (c) $F_{mínima} = 120$ N

49. Una viga uniforme de peso *w* está inclinada a un ángulo θ respecto de la horizontal y con su extremo superior soportado por medio de una cuerda horizontal amarrada a una pared y su extremo inferior descansando sobre un piso rugoso (Fig. P12.49). a) Si el coeficiente de fricción estática entre la viga y el piso es μ_e, determine una expresión para el peso máximo W que puede colgarse de la parte superior antes de que la viga deslice. b) Determine la magnitud de la fuerza de reacción en el piso y la de la fuerza ejercida por la viga sobre la cuerda en P en función de w, W y μ.

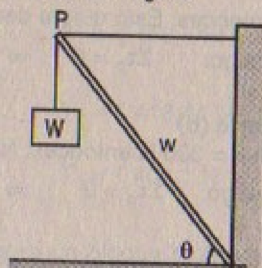


Figura P12.49

Resolución:

Parte (a)

$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad T = f_r \quad ...(1)$

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N = W + w \; ...(2)$

$$\Sigma\tau_A = 0 \quad \Rightarrow \quad W(L\cos\theta) + w\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = T(L\,\text{sen}\theta) \quad ...(3)$$

De (1) $\quad T = \mu_e N = \mu_e (W + w)$

De (3) $\quad W(L\cos\theta) + w\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = \mu_e(W + w)(L\,\text{sen}\theta)$

Despejando W:

Resulta que: $\quad W_{máx} = \frac{w}{2}\left[\frac{2\mu_e\,\text{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right]$

Parte (b)

$$T = \mu_e \cdot N = \mu_e\left[\frac{w}{2}\left(\frac{2\mu_e\,\text{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right) + w\right]$$

$$\therefore \quad T = \mu_e \cdot w\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\mu_e\,\text{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\,\text{sen}\theta}\right) + 1\right]$$

$$R = \sqrt{N^2 + f_r^2} = \sqrt{(W + w)^2 + \mu_e^2\,(W + w)^2}$$

$$\therefore \quad R = (W + w)\sqrt{1 + \mu_e^2}$$

50. La figura P12.50 muestra una armadura que soporta una fuerza hacia debajo de 1 000 N aplicada al punto *B*. Ignore el peso de la armadura y aplique las condiciones de equilibrio para demostrar que $n_A = 366$ N y $n_C = 634$ N.

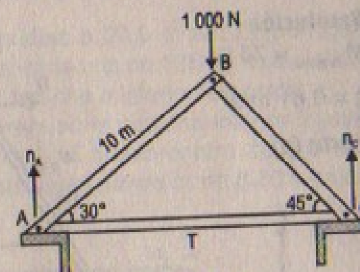


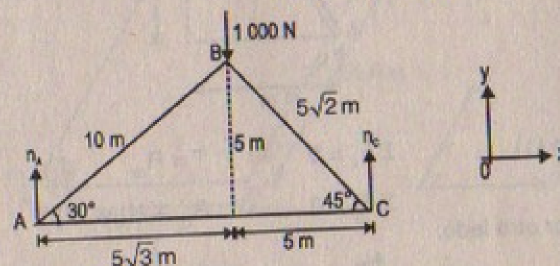
Figura P12.50

Resolución:

Por demostrar:

$n_A = 366$ N y

$n_C = 634$ N



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad n_A + n_C = 1\,000$ N

Por otro lado: $\quad \Sigma\tau_B = 0 \quad \Rightarrow \quad n_C(5) - n_A(5\sqrt{3}) = 0$

$\therefore \quad n_C = \sqrt{3}\; n_A$

Luego: $\quad n_A + \sqrt{3}\; n_A = 1\,000$

$\Rightarrow \quad n_A = \frac{1000}{1+\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad n_A = 366$ N

Entonces: $\quad n_C = (366)(\sqrt{3}) = 634$ N

En consecuencia: $\quad n_A = 366$ N $\wedge$ $n_C = 634$ N $\qquad$ l.q.q.d.

51. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.51. Una pintora de 70,0 kg de masa está parada sobre la escalera a 3,00 m del punto inferior. Suponga al piso sin fricción y encuentre, a) la tensión en la barra horizontal que conecta las dos patas de la escalera, b) las fuerzas normales en A y B, y c) las componentes de la fuerza de reacción en la articulación C que la pata izquierda de la escalera ejerce sobre la pata derecha. (*Sugerencia*: Trate cada pata de la escalera por separado.)

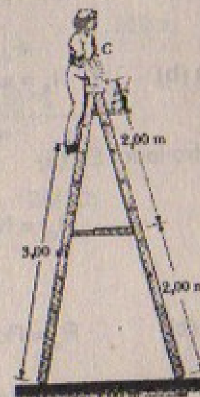


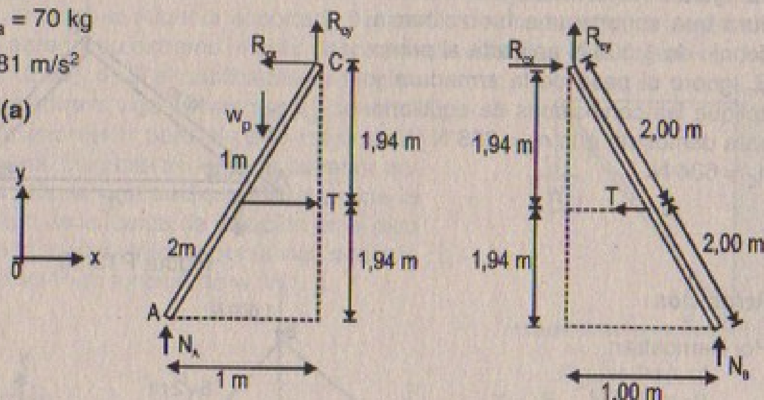
Figura P12.51

Resolución :

$M_{pintora} = 70$ kg

$g = 9,81$ m/s^2

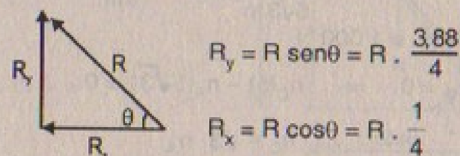
Parte (a)



En (1) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = R_{cx}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{cy} + N_A = W_P$

Por otro lado:



$R_y = R\,\text{sen}\theta = R \cdot \frac{3,88}{4}$

$R_x = R\cos\theta = R \cdot \frac{1}{4}$

Entonces además:

$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow R_{cx}(3,88) + R_{cy}(1) - w_p(3)\cos\theta - T(1,94) = 0$

$\Rightarrow R\left(\frac{1}{4}\right)(3,88) + R\left(\frac{3,88}{4}\right) = (70)(9,81)(3)(0,25) + R\left(\frac{1}{4}\right)(1,94)$

$\therefore R = 354$ N

Luego: $T = R(1/4) = 354\left(\frac{1}{4}\right) \quad \therefore \quad T = 88,5$ N

Parte (b) $N_A = w_p - R_{cy} = (70)(9,81) - (354)\left(\frac{3,88}{4}\right)$

$\therefore N_A = 343,32$ N

Por otro lado: En (2)

$R_{cy} = N_B \Rightarrow N_B = R\text{sen}\theta = (354)\left(\frac{3,88}{4}\right)$

$\therefore N_B = 343,38$ N

Parte (c) $R_x = R\cos\theta = (354)(0,25) = 88,5$ N

$R_y = R\text{sen}\theta = (354)\left(\frac{3,88}{4}\right) = 343,38$ N

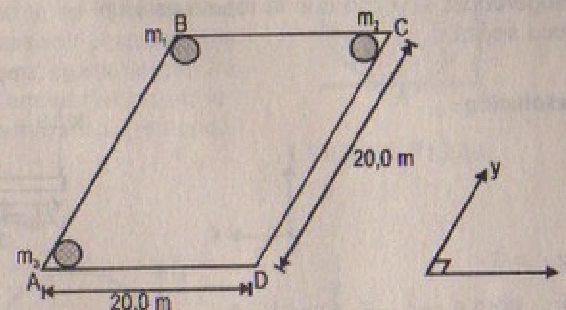
52. Una pista de baile plana de dimensiones iguales a 20,0 m por 20,0 m tiene una masa de 1 000 kg. Tres parejas de bailarines, cada una de 125 kg, están al principio en las esquinas superior izquierda, superior derecha e inferior izquierda. a) ¿Dónde está el centro de gravedad inicial? b) La pareja en la esquina inferior izquierda se mueve 10,0 m hacia la derecha. ¿Dónde está el nuevo centro de gravedad? c) ¿Cuál es la velocidad del centro de gravedad si esa pareja tarda 8,00 s en cambiar su posición?

Resolución :

Parte (a)

$m_1 = m_2 = m_3 = 125$ kg

$w_{pista} = (1\,000 \text{ kg})\, g$



$M_{total} = (125)(3) + 1\,000 = 1\,375$ kg

$\Rightarrow M_{total} \cdot x_{CG\,(sist)} = (1\,000)(10) + 125(20)$

$\therefore x_{CG(sist)} = 9,09$ m

Por otro lado: $M_{total} \cdot y_{CG(sist)} = (1\,000)(10) + 125(20) + 125(20)$

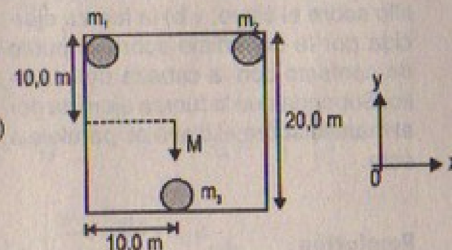
$\therefore y_{CG(sist.)} = 10,9$ m

$\therefore$ Centro de gravedad del sistema = (9,09; 10,9 m)

Parte (b)

$M_{total}\, x_{CG(sist)} = M(10) + m_3(10) + m_2(20)$

$\Rightarrow M_{total} \cdot x_{CG(sist)} = 1\,000(10) + 125(10) + 125(20)$



$\therefore x_{CG(sist)} = 10$ m

Por otro lado: $M_{total} \cdot y_{CG(sist)} = 1000\,(10) + 125(20) + 125(20)$

$\therefore y_{CG(sist)} = 10,9$ m

Luego: centro de gravedad del sistema = (10; 10,9) m

Parte (c) $v_{CG} \times t = 10,0$ m

$\Rightarrow v_{CG} = \frac{10,0}{8} = 125$ m/s

53. Una repisa está montada sobre una pared vertical por medio de un solo tornillo, como se muestra en la figura P12.53. Ignore el peso de la repisa y encuentre la componente horizontal de la fuerza que el tornillo ejerce sobre la repisa cuando se aplica una fuerza vertical de 80,0 N en la forma que se indica. (*Sugerencia*: Imagine que la repisa está un poco suelta.)

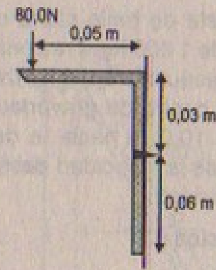
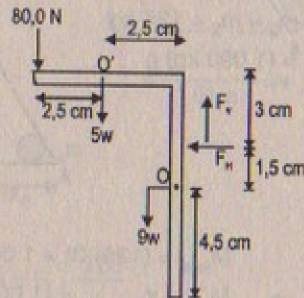


Figura P12.53

Resolución :





$\Sigma\tau_{o}' = 0$

$\Rightarrow \quad 80(2{,}5\ \text{cm}) - F_H\,(3\ \text{cm}) = 0$

$\therefore \quad F_H = 66{,}7\ \text{N}$

54. La figura P12.54 muestra un martillo de carpintero en el momento de sacar un clavo de una superficie horizontal. Si una fuerza de 150 N se ejerce horizontalmente, encuentre a) la fuerza ejercida por las uñas del martillo sobre el clavo, y b) la fuerza ejercida por la superficie sobre el punto de contacto con la cabeza del martillo. Suponga que la fuerza ejercida por el martillo sobre el clavo es paralela a éste.

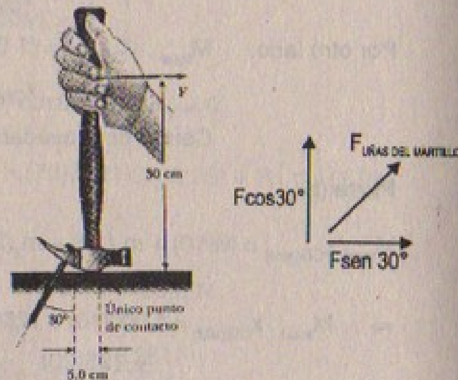


Figura P12.54

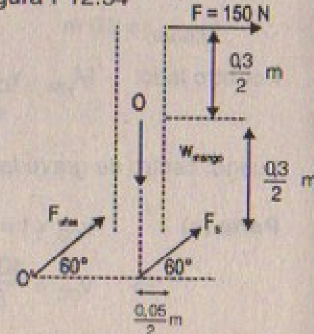
Resolución :
F = 150 N

Parte (a)

$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow$

$$F_{\text{uñas}}\operatorname{sen}30^\circ\left(\frac{0{,}3}{2}\right) = F_{\text{uñas}}\cos 30^\circ\left(\frac{0{,}05}{2}\right) + F\left(\frac{0{,}3}{2}\right)$$

$\therefore \quad F_{\text{uñas del mart.}} = 709{,}8\ \text{N}$



Parte (b)
Como son paralelas $\Rightarrow \quad F_S = F_{\text{uñas del martillo}} = 709{,}8\ \text{N}$

55. La figura P12.55 muestra una fuerza vertical aplicada tangencialmente a un cilindro uniforme de peso *w*. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y todas las superficies es 0,50. Encuentre, en función de *w*, la máxima fuerza **F** que puede aplicarse sin ocasionar que gire el cilindro. (*Sugerencia*: cuando el cilindro está a punto de deslizar, ambas fuerzas de fricción están en sus valores máximos. ¿Por qué?)

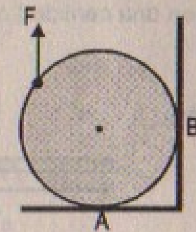
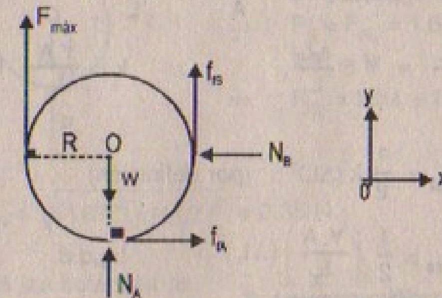


FIGURA P12.55

Resolución :

$w_{\text{cilindro}} = w$
$\mu_e = 0{,}5$



$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{A} = N_B \quad \Rightarrow \quad \mu_e \cdot N_A = N_B \quad \ldots (1)$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{máx}} + f_{B} + N_A = w \quad \ldots (2)$

$\Sigma\tau_o = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{A}(R) + f_{B}(R) = F_{\text{máx}}(R)$

$\Rightarrow \quad f_{A} + f_{B} = F_{\text{máx}} \quad \ldots (3)$

De (2): $\quad N_A = w - F_{\text{máx}} - \mu_e \cdot N_B$

$\Rightarrow \quad N_A = w - F_{\text{máx}} - \mu_e\,(\mu_e \cdot N_A) \qquad \therefore \quad N_A = \dfrac{w - F_{\text{máx}}}{1+\mu_e^2}$

En (3): $\quad \mu_e \cdot \left[\dfrac{w - F_{\text{máx}}}{1+\mu_e^2}\right] + \mu_e\,(\mu_e)\left[\dfrac{w - F_{\text{máx}}}{1+\mu_e^2}\right] = F_{\text{máx}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{w - F_{\text{máx}}}{1+\mu_e^2}\,(\mu_e^2 + \mu_e) = F_{\text{máx}}$

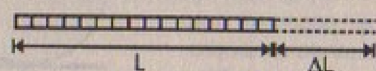
$\therefore \quad F_{\text{máx}} = \dfrac{w\,\mu_e\,(\mu_e + 1)}{2\mu_e^2 + \mu_e + 1}$

Reemplazando: $\quad F_{\text{máx}} = 0{,}375\ w = \dfrac{3}{8}\ w$

56. Un alambre de longitud L, módulo de Young Y y área de sección transversal A se extiende elásticamente en una cantidad ΔL. Por la ley de Hooke, la fuerza restauradora es $-k\Delta L$. a) Muestre que $k = YA/L$. b) Pruebe que el trabajo hecho al extender el alambre en una cantidad ΔL es

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}\frac{YA}{L}(\Delta L)^2$$

Resolución :



Datos:
Y, A, L

Parte (a)

Como: $F_R = F = k \cdot \Delta L \Rightarrow \frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot \Delta L}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \qquad \therefore \quad k = \frac{YA}{L} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Trabajo: $F_{elástica} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$ (por definición)

$$\Rightarrow W_{trabajo} = \frac{1}{2}\left(\frac{Y.A}{L}\right)(\Delta L)^2 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

57. Dos bolas de racket se colocan en un recipiente de cristal, como se muestra en la figura P12.57. Sus centros y el punto A se encuentran sobre una línea recta. a) Suponga que las paredes son sin fricción y determine P_1, P_2 y P_3. b) Determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre la bola derecha por la bola izquierda. Suponga que cada bola tiene una masa de 170 g.

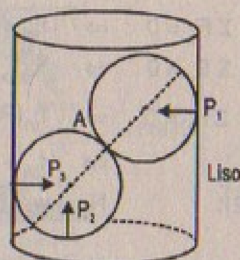


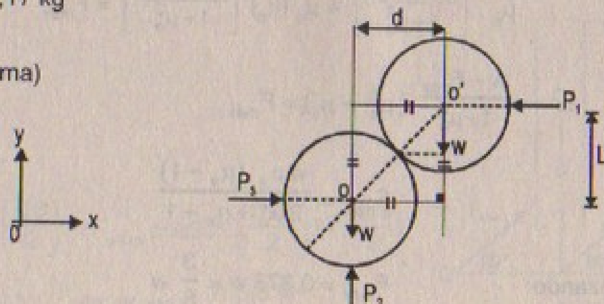
Figura P12.57

Resolución :

$M_{cada\ bola} = 0{,}17$ kg

Parte (a)

D.C.L. (sistema)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_3 = P_1$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_2 = w + w = 2w \therefore P_2 = 2(0{,}17)(9{,}81) = 3{,}34$ N

$\Sigma \tau_o = 0 \Rightarrow w(d) = P_1(L)$ ... (1)

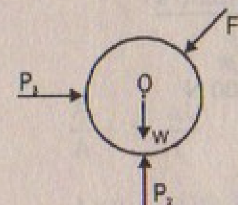
$\Sigma \tau_o' = 0 \Rightarrow w(d) + P_3(L) = P_2(d)$ ... (2)

Entonces: $P_1 L + P_3 L = 3{,}34\left(\frac{P_1 . L}{w}\right) \qquad \therefore \quad P_1 + P_3 = \frac{3{,}34\, P_1}{w}$

De (1) como: $w.d = P_1 . L \Rightarrow w = P_1 \wedge d = L$

$\therefore\ w = 1{,}67\ N = P_1 = P_3$

Parte (b)



$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow P_3 = F_{R_x} = 1{,}67$ N

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{Ry} = 3{,}34 - 1{,}67 = 1{,}67$ N

$$\therefore \quad F_R = \sqrt{(1{,}67)^2 + (1{,}67)^2} = 2{,}36\ \text{N}$$

58. En la figura P12.58 las balanzas registran $w_1 = 38$ N y $w_2 = 32$ N. Si se ignora el peso del tablón de soporte, ¿a qué distancia de pie de la mujer está su centro de masa, dado que su altura es de 2,0 m?

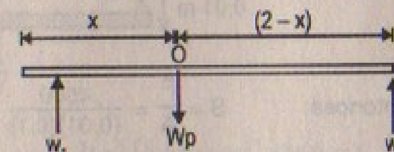


Figura P12.58

Resolución :

Sabemos que: $w_1 = 38N$; $w_2 = 32$ N

$\Sigma \tau_o = 0 \Rightarrow w_2(2 - x) - w_1(x) = 0$

$\Rightarrow 32(2 - x) = 38x \Rightarrow 64 = 38x + 32x$

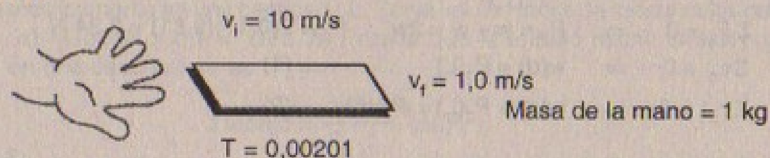
$\therefore\ x = 0{,}91$ m

El centro de masa al pie de la mujer estará a:

$(2 - (0{,}91)) = 1{,}09$ m

59. a) Calcule la fuerza con la cual un maestro de karate golpea una tabla si la velocidad de su mano en el momento del impacto es 10,0 m/s, disminuyendo hasta 1,0 m/s durante un tiempo de contacto de 0,0020 s con la tabla. La masa de la mano y el brazo coordinados es 1,0 kg. b) Estime el esfuerzo de corte si esta fuerza es ejercida sobre una tabla de pino de 1,0 cm de espesor que mide 10 cm de ancho. c) Si el máximo esfuerzo de corte que una tabla de pino puede recibir antes de romperse es $3{,}6 \times 10^6$ N/m², ¿se romperá la tabla?

Resolución :



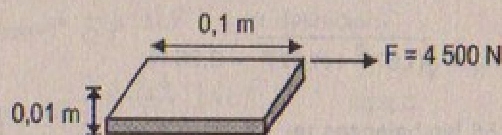
Parte (a) $F_{prom} \cdot \Delta t = \Delta P = P_{final} - P_{inicial}$

$$\Rightarrow \quad F_{prom} = \frac{1\,kg \times 1\,m/s - 1\,kg \cdot 10\,m/s}{0,0020}$$

$$\therefore \quad |F_{prom}| = 4\,500\ N$$

Parte (b) Esfuerzo de corte = $\frac{F}{A}$

Sea:



Entonces: $S = \frac{F}{A} = \frac{4500}{(0{,}01)(0{,}1)} = 45 \times 10^5\ N/m^2$

Parte (c)

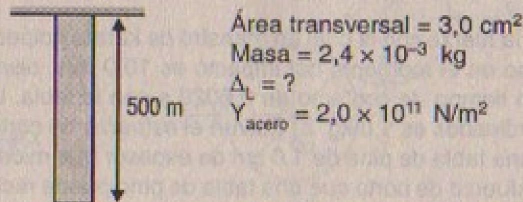
Como el máximo esfuerzo de corte es $36 \times 10^5\ N/m^2$ entonces:

como $45 \times 10^5 > 36 \times 10^5$

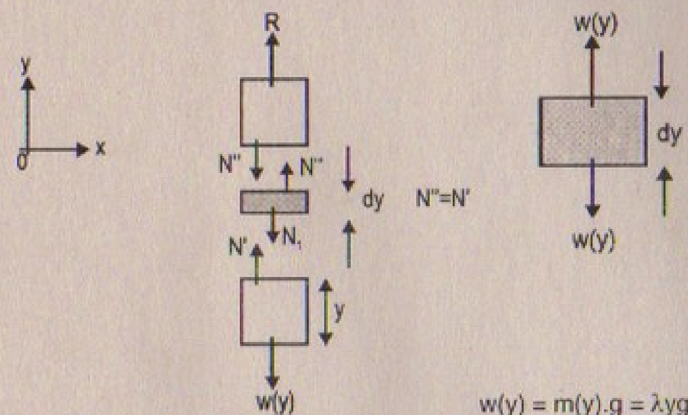
En consecuencia "sí" se romperá la tabla.

60. Un cable de acero de 3,0 cm² de área de sección transversal tiene una masa de 2,4 g por metro de longitud. Si 500 m de cable cuelgan de un peñasco vertical, ¿cuánto se estira el cable bajo su propio peso? $Y_{acero} = 2{,}0 \times 10^{11}\ N/m^2$.

Resolución :



Área transversal = 3,0 cm²
Masa = $2{,}4 \times 10^{-3}$ kg
Δ_L = ?
$Y_{acero} = 2{,}0 \times 10^{11}\ N/m^2$



$w(y) = m(y).g = \lambda y g$

Entonces: $\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda y g}{AY} = \frac{\Delta(dy)}{dy} \qquad \text{(deformación de un diferencial)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L \frac{\lambda y g dy}{AY} = \int_0^L \Delta(dy)$$

$$\therefore \quad \Delta L = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda g}{AY} \cdot L^2 = \frac{MgL}{2AY}$$

Reemplazando: $\Delta L = \text{estiramiento} = \frac{(2{,}4\times10^{-3}kg)(9{,}81\ m/s^2)(500\ m)}{2(3{,}0)(10^{-4}m^2)(2{,}0\times10^{11})}$

$$\therefore \quad \Delta L = 981 \times 10^{-10}\ m$$

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L., Lima, Perú
RUC 10090984344



Editorial San Marcos

Jr. Natalio Sánchez 220 of. 304. Jesús María, Lima
(alt. cdra. 5 Av. Arenales)Telefax: 330-8553 / 332-0153. Ventas-telf.: 423-1297
Av. Garcilaso de la Vega 911 of. 404 Lima. Telefax: 424-6563
E-mail: san-marcos@terra.com.pe

Serway

Vol. 2

FÍSICA

SOLUCIONARIO



SAN MARCOS

Solucionario
Física de Serway

Vol. 2



Solucionario
Física de Serway

Vol. 2

SAN MARCOS

SOLUCIONARIO - FÍSICA DE SERWAY, Volumen 2

Primera Edición: 2005

Hecho el depósito legal ley n.° 26905
Biblioteca Nacional del Perú
REG. n.° 2005-2513
ISBN 9972-34-254-9

© Aníbal Paredes Galván - Editor.
Editorial San Marcos
Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304 Jesús María, Lima
Telefax 330-8553 / 332-0153
E-mail: san-marcos@terra.com.pe

Solucionario a cargo de Juan Garibay Calderón

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 974 Of. 404, Lima, telf.: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304, Jesús María, telf.: 423-1297

Impreso en Perú / Printed in Peru

Composición, diagramación y montaje
Editorial San Marcos

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L., Lima, Perú (RUC 10090984344).

ÍNDICE

Presentación 7

CAPÍTULO 13. MOVIMIENTO OSCILATORIO.
Movimiento armónico simple. 9
Una masa unida a un resorte. 15
Energía de un oscilador armónico simple 21
El Péndulo. 26
Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme. 33
Oscilaciones amortiguadas. 34
Oscilaciones forzadas. 36
Problemas adicionales. 40

CAPÍTULO 14. LA LEY DE LA GRAVEDAD.
Ley de la gravedad, medida de la constante gravitacional, peso y fuerza gravitacional. 61
Las leyes de Kepler. 68
El campo gravitacional. 73
Energía potencial gravitacional. 75
Consideraciones de energía en el movimiento planetario y de satélites. 77
La fuerza gravitacional entre un objeto extendido y una partícula. 85
Fuerza gravitacional entre una partícula y una masa esférica. 86
Problemas adicionales. 88

CAPÍTULO 15. MECÁNICA DE FLUIDOS.
Presión. 113
Variación de la presión con la profundidad. 115
Medida de presión. 119
Fuerzas de rotación y principio de Arquímedes. 122
Dinámica de fluidos y la ecuación de Bernoulli. 131
Otras aplicaciones de la ecuación de Bernoulli. 136
Energía del viento. 141
Problemas adicionales. 142

PARTE II: ONDAS MECÁNICAS

CAPITULO 16. MOVIMIENTO ONDULATORIO.
Ondas viajeras unidimensionales. 161
Superposición e interferencia de ondas. 163
La velocidad de ondas en cuerdas. 166
Ondas senoidales. 172
Energía trasmitida por ondas senoidales en cuerdas. 181
La ecuación de onda lineal. 185
Problemas adicionales. 186

CAPITULO 17. ONDAS SONORAS.
Velocidad de ondas sonoras. 199
Ondas sonoras periódicas. 201
Intensidad de ondas sonoras periódicas. 207
Ondas esféricas y planas. 212
El efecto Doppler. 215
Problemas adicionales. 223

CAPÍTULO 18. SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS.
Superposición e interferencia de ondas senoidales. 237
Ondas estacionarias. 243
Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos 247
Ondas estacionarias en columnas de aire. 254
Ondas estacionarias en barras y placas. 263
Pulsaciones: interferencia en el tiempo. 265
Problemas adicionales. 267

CAPÍTULO 19. TEMPERATURA.
El termómetro de gas a volumen constante y la escala Kelvin. 281
Expansión térmica de sólidos y líquidos 286
Descripción macroscópica de un gas ideal 297
Problemas adicionales. 308

CAPÍTULO 20. CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.
Calor y energía térmica. 331
Capacidad calorífica, calor específico y calor latente. 332
Trabajo y calor en procesos termodinámicos. 344
La primera ley de la termodinámica. 351
Algunas aplicaciones de la primera ley de la termodinámica 354
Transferencia de calor. 362
Problemas adicionales 369

CAPÍTULO 21. LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES.
Modelo molecular de un gas ideal. 385
Calor específico de un gas ideal 392
Proceso adiabáticos para un gas ideal 398
La equipartición de la energía. 406
La ley de distribución de Boltzmann, distribución de velocidades moleculares. 409
Trayectoria libre media. 414
Ecuación de estado de Van der Waals 417
Problemas adicionales. 418

CAPÍTULO 22. MÁQUINA TÉRMICAS, ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.
Máquinas térmicas y la segunda ley de la termodinámica. 437
La máquina de Carnot. 440
El motor de gasolina. 449
Bombas de calor y refrigeradores. 451
Entropía. 454
Problemas adicionales. 462

PRESENTACIÓN

Debido al papel preponderante de la física en disciplinas como la ingeniería, la química y la medicina, y a la trascendencia de las aplicaciones de las leyes físicas en la moderna tecnología y en los avances científicos, en ese sentido el SOLUCIONARIO FÍSICA DE SERWAY *tiene como principal objetivo brindarle al estudiante la posibilidad de comprender y consolidar los conocimientos teóricos aprendidos, esto es, reforzar el aprendizaje de conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones en el mundo real.*

La obra está desarrollada en tres volúmenes que hacen un total aproximado de 2 400 problemas resueltos, en 34 capítulos; abarca temas fundamentales de la física clásica que se dividen en 4 partes. La parte I (capítulos 1 - 15) se abordan los fundamentos de la mecánica newtoniana y de la física de fluidos; la parte II (capítulos 16 -18) que comprende el movimiento ondulatorio y el sonido; la parte III (capítulos 19 - 22) considera el calor y la termodinámica y la parte IV (capítulos 23-34) comprende la electricidad y el magnetismo.

Cada uno de los capítulos se ha desarrollado siguiendo un orden coherente de temas con el propósito de llegar didácticamente al estudiante, por lo que esperamos que esta obra sirva como un libro de consulta práctica, dentro de esa gran senda del conocimiento científico que le toca a Ud. descubrir.

El editor

Capítulo 13

MOVIMIENTO OSCILATORIO

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. El desplazamiento de una partícula en $t = 0{,}25$ s está dado por la expresión $x = (4{,}0\ \text{m})\cos(3{,}0\,\pi t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine, a) la frecuencia y el período del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, y d) el desplazamiento de la partícula en $t = 0{,}25$ s.

Resolución :

$$x(t) = (4{,}0)\cos(3\pi t + \pi)$$

Parte (a)

Sabemos que: $\omega = 2\pi . f \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{3\pi}{2\pi} = 1{,}5\ \text{Hz}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66\ \text{s}$$

Parte (b) $A = 4{,}0\ \text{m}$

Parte (c) $\phi = \pi$

Parte (d) $x(0{,}25\ \text{s}) = 4{,}0\cos\,[1{,}75\pi + \pi] = 4{,}0\cos(\pi/4) = 2{,}83\ \text{m}$

2. Una bola pequeña se pone en movimiento horizontal haciéndola rodar con una velocidad de 3,00 m/s a través de un cuarto de 12,0 m de largo, entre dos paredes. Supóngase que los choques con cada pared son perfectamente elásticos y que el movimiento es perpendicular a las dos paredes. a) Demuestre que el movimiento es periódico, y b) determine su período. ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

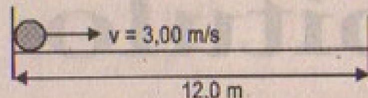
Resolución :

Por dato: La bola realiza un choque perfectamente elástico entonces:

$$E_{K\ inicial} = E_{K\ final} \qquad \therefore \quad v_{inicial} = v_{final}$$

$\Rightarrow$ «v» no cambia en el tiempo

Por otro lado: $x = 0$



El máximo desplazamiento de la partícula es 12 m, y como la velocidad no cambia en el tiempo entonces el tiempo en el recorrido no cambiará en consecuencia el movimiento «es periódico».

Parte (b)

En un M.A.S. $\qquad E_{mecánica} = cte = \frac{1}{2}k.A^2$

En un choque P. elástico $\qquad E_{mecánica} = E_K = \frac{1}{2}m.v^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore \quad \frac{k}{m} = \frac{9}{144}$$

Entonces: $\qquad T = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi.\sqrt{\frac{144}{9}} \qquad \therefore \quad T = 25,1\ s$

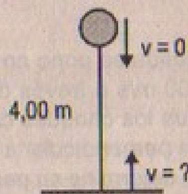
Parte (c)
Por analogía en choque perfectamente elástico horizontal la energía mecánica es constante, y como en un M.A.S. también lo es. Entonces por analogía:

$\frac{k}{m}$ = cte. Luego el movimiento es armónico.

3. Una bola que se deja caer desde una altura de 4,00 m efectúa un choque perfectamente elástico con el suelo. Suponiendo que no se pierde energía debido a la resistencia del aire, a) demuestre que el movimiento es periódico, y b) determine el período del movimiento. c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

Resolución :

Parte (a)



Por conservación de la energía:

$$E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuando la bola choca con el suelo por primera vez, rebota con la misma velocidad por consiguiente recorrerá la misma altura en «tiempos iguales» por lo tanto el tiempo no cambia. Luego el período no cambia, entonces «es periódico».

Parte (b)
Por analogía: En un péndulo que realiza un M.A.S.

Entonces: $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Depende de la longitud en la que se encuentra del punto más bajo la partícula (P.E.)

Entonces: $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{4,00\ m}{9,81}}$

$$\therefore \quad T = 2(3,1416)\sqrt{\frac{4}{9,81}} = 4,01\ s$$

4. Si la posición y velocidad iniciales de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple son x_o, v_o y a_o, y si la frecuencia angular de oscilación es ω, a) demuestre que la posición y la velocidad del objeto para todo el tiempo puede escribirse como

$$x(t) = x_o\cos\omega t + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\operatorname{sen}\omega t$$

$$v(t) = -x_o\operatorname{sen}\omega t + v_o\cos\omega t$$

b) Si la amplitud del movimiento es A, demuestre que

$$v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$$

Resolución :

Datos: $\qquad$ En $t = 0$ x_o; v_o, a_o

«ω» frecuencia angular

Parte (a)

Por demostrar: $\qquad x(t) = x_o\cos\omega t + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\operatorname{sen}\omega t$

Sabemos que la posición de un armónico simple es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\ .\ \operatorname{sen}\phi]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos\omega t.\cos\phi - A\operatorname{sen}\omega t.\operatorname{sen}\phi \qquad ...\ (1)$$

Por otro lado: (por dato)

$$x(t = 0) = x_0 = A\cos(\phi)\ ...\ (2)$$

$$v_o = \frac{dx}{dt}(t = 0) = -A\omega\operatorname{sen}(\phi) \qquad \Rightarrow \quad -A\ \operatorname{sen}(\phi) = \frac{v_o}{\omega}\ ...\ (3)$$

$$a_0 = \frac{dv}{dt}(t = 0) = -A\omega^2\cos(\phi)$$

Luego: (3) y (2) en (1)

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}(\omega t) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar: $v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$

Sabemos que:

$$x_o^2 = A^2\cos^2(\phi) \qquad \Rightarrow \quad x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi))$$

$$v_o^2 = A^2\omega^2\,\text{sen}^2(\phi)$$

$$\therefore \quad x_o^2\omega^2 + v_o^2 = A^2\omega^2$$

Por otro lado: $a_o = -\omega^2(x_o) \quad \Rightarrow \quad -a_o x_o = \omega^2 x_o^2$

Luego: $v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$ l.q.q.d.

5. El desplazamiento de un objeto es $x = (8{,}0\text{ cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$, donde x está en centímetros y t está en segundos. Calcule, a) la velocidad y aceleración en $t = \pi/2$ s, b) la velocidad máxima y el tiempo anterior ($t > 0$) en el cual la partícula tiene esta velocidad y c) la aceleración máxima y el tiempo anterior ($t > 0$) en el cual la partícula tiene esta aceleración.

Resolución:

$$x(t) = (8{,}0\text{ cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$$

Parte (a) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = (-16{,}0\text{ cm})\text{sen}(2{,}0t + \pi/3)$

Luego: $v(t = \pi/2) = (-16{,}0\text{ cm})\text{sen}\,[\pi + \pi/3]$

$$\therefore \quad v(t = \pi/2) = 8\sqrt{3}\text{ cm/s} = 13{,}86\text{ cm/s}$$

Parte (b) $v_{máx} = (-16{,}0\text{ cm})\text{sen}[2{,}0t + \pi/3]$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = +16{,}0\text{ cm/s}$$

Luego: $2{,}0t + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{12}\text{ s} = 0{,}262\text{ s}$$

Parte (c) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -(32{,}0\text{ cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$

$$\Rightarrow \quad a_{máx}\text{ será cuando }\cos[2{,}0t + \pi/3] = -1$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}0t + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{3} = 1{,}04\text{ s}$$

En consecuencia: $a_{máx} = +32\text{ cm/s}^2$

6. Una partícula de 20 g se mueve en un movimiento armónico simple con una frecuencia de 3,0 oscilaciones /s y una amplitud de 5,0 cm. a) ¿Qué distancia total se mueve la partícula durante un ciclo de su movimiento? b) ¿Cuál es su velocidad máxima? ¿Dónde ocurre ésta? c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. ¿En qué parte del movimiento ocurre la aceleración máxima?

Resolución:

$$m = 20\text{ g} \quad ; \quad f = 3\,\frac{\text{oscilaciones}}{\text{s}} \quad ; \quad A = 5\text{ cm}$$

Parte (a)

Como: $f = \dfrac{3}{s} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{3}\text{ s}$

Como parte del origen: $x(t) = A\cos(\omega t)$

Por otro lado: $\omega = 2\pi.f \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi(3) = 6\pi\text{ rad/s}$

Luego: $x(t = 1/3\text{ s}) = (5\text{ cm})\cos\left[6\pi\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$

$$\therefore \quad x(t = 1/3) = (5\text{ cm})\cos(2\pi) = 5\text{ cm}$$

Parte (b) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = A\omega = 5\text{ cm }(6\pi) = 30\pi = 94{,}25\text{ cm/s}$$

$$\omega t = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad 6\pi.t = \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore \quad t = 0{,}25\text{ s}$$

Parte (c) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad a_{máx} = A\omega^2 = (5\text{ cm})(94{,}25)^2$$

$$\therefore \quad a_{máx} = 17{,}76\text{ m/s}^2$$

Luego: $\omega t = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\pi}{6\pi} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}17\text{ s}$

7. Una partícula se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x en un movimiento armónico simple a partir del origen en $t = 0$. Si la amplitud de su movimiento es de 2,00 cm y la frecuencia es 1,50 Hz, a) pruebe que su desplazamiento está dado por $x = (2{,}00\text{ cm})\text{sen}(3{,}00\text{ t})$. Determine b) la velocidad máxima y el tiempo más anterior ($t > 0$) en el cual la partícula tiene esta velocidad, c) la aceleración máxima y el

tiempo más anterior (t > 0) en el cual la partícula tiene esta aceleración, y d) la distancia total recorrida entre t = 0 y t = 1,00 s.

Resolución :

Parte (a)
Por demostrar $x(t) = (2{,}00\ \text{cm})\ \text{sen}(3{,}00t)$

Sabemos que la partícula tiene M.A.S. entonces:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Por otro lado: $f = 1{,}50\ \text{Hz} \Rightarrow \omega = 3\pi\ \text{rad/s}$

Luego: como parte del origen: $x(t = 0) = 0 = 2{,}00\cos(\phi)$

$$\therefore\ \phi = \pi/2 \text{ ó } 3\pi/2$$

Además: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t)\ .\ \cos\phi - A\text{sen}(\omega t)\ .\ \text{sen}\phi$

Si: $\phi = 3\pi/2$
$x(t) = A\text{sen}(\omega t)$

Reemplazando: $x(t) = 2{,}00\ \text{cm sen}(3{,}00\ \pi t)$ l.q.q.d

Parte (b) $v(t) = \frac{dx}{dt} = 2{,}00.\omega\cos(\omega t)$

$\Rightarrow v_{máx} = (2{,}00)(3\pi) = 6\pi = 18{,}85\ \text{cm/s}$

$3\pi.t = 2\pi$ $\therefore\ t = 2/3 = 0{,}667\ \text{s}$

Parte (c) $a(t) = \frac{dv}{dt} = -2{,}00\ .\ \omega^2\ \text{sen}(\omega t)$

$\Rightarrow a_{máx} = (2{,}00)(3\pi)^2 \approx 1{,}776\ \text{m/s}^2$

Entonces: $\omega t = 3\pi/2$ $\therefore\ t = 1/2 = 0{,}5\ \text{s}$

8. Un émbolo en un motor de automóvil efectúa un movimiento armónico simple. Si su amplitud de oscilación a partir de la línea central es ±5,0 cm y su masa es de 2,0 kg, encuentre la velocidad y la aceleración máximas del émbolo cuando el motor trabaja a una tasa de 3 600 rev/min.

Resolución :

Dato: $A = +5\ \text{cm}$; $m = 2{,}0\ \text{kg}$
$f = 3\ 600\ \text{rev/min}$

$v_{máx} = A\omega$

• Por otro lado: $\omega = 2\pi.f \Rightarrow \omega = 2\pi \times 3\ 600 \times \frac{1}{60\ \text{s}}$

$\therefore\ \omega = 377\ \text{rad/s}$

Luego: $v_{máx} = (5 \times 10^{-2}) \times 377$

$\therefore\ v_{máx} = 18{,}85\ \text{m/s}$

• Por otro lado: $a_{máx} = A.\omega^2$

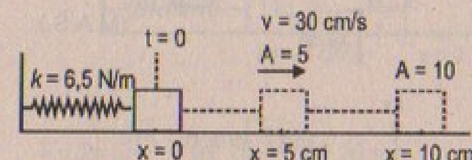
$\Rightarrow a_{máx} = (5 \times 10^{-2}) \times (377)$ $\therefore\ a_{máx} = 2\ 842{,}58\ \text{m/s}^2$

UNA MASA UNIDA A UN RESORTE

(*Nota:* ignore la masa del resorte en todos estos problemas)

9. Un bloque de masa desconocida se une a un resorte de constante igual a 6,50 N/m y experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 10,0 cm. Cuando la masa está a la mitad del camino entre su posición de equilibrio y el punto extremo, se mide su velocidad y se encuentra un valor igual a + 30,0 cm/s. Calcule a) la masa del bloque, b) el período del movimiento y c) la aceleración máxima del bloque.

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que en un M.A.S.: $E_{mecánica} = \frac{1}{2}kA^2 = \text{cte}$

$\Rightarrow$ En $x = A/2 = 5\ \text{cm}$

La $E_K + E_p = \frac{1}{2}k.A^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(m)v^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = kA^2$

$\Rightarrow m(30)^2 + (5)^2(6{,}5) = (6{,}5)(10)^2$ $\therefore\ m = 0{,}542\ \text{kg}$

Parte (b)

Sabemos que: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\Rightarrow T = 2\pi \times \sqrt{\frac{0{,}542}{6{,}5}} = 2(3{,}1416)\sqrt{\frac{0{,}542}{6{,}5}}$

$\therefore\ T = 1{,}81\ \text{s}$

Parte (c)
Sabemos que en un movimiento armónico simple: $a_{máx} = A\omega^2$

Como: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{(6,5)}{0,542} = 11,993 \text{ rad}^2/\text{s}^2$

y como: $A = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

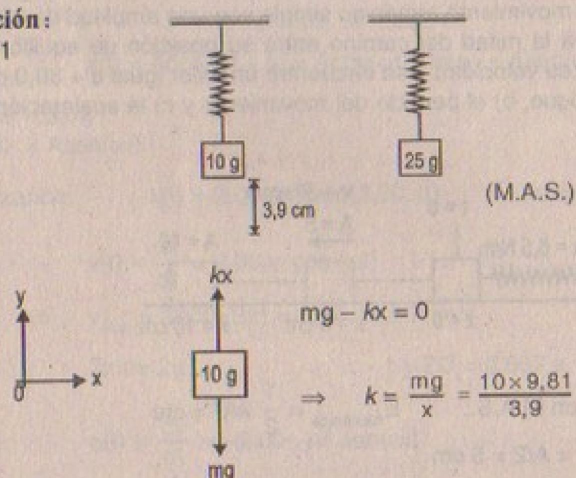
Entonces: $a_{máx} = \frac{(0,1)(6,5)}{0,542}$

$\therefore \quad a_{máx} = 1,199 \text{ m/s}^2 = 1,2 \text{ m/s}^2$

10. Un resorte se extiende 3,9 cm cuando cuelga de él una masa de 10 g. Si una masa de 25 g unida a este resorte oscila en un movimiento armónico simple, calcule el período del movimiento.

Resolución:

g = 9,81



$mg - kx = 0$

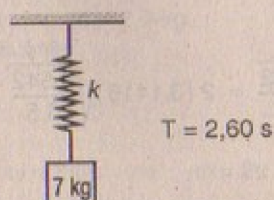
$\Rightarrow \quad k = \frac{mg}{x} = \frac{10 \times 9,81}{3,9}$

Por otro lado: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 \times 3,9}{10 \times 9,81}}$

$\therefore \quad T = 0,63 \text{ s}$

11. Una masa de 7,00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical fijo a una viga volada. La masa se pone a oscilar verticalmente con un período de 2,60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

Resolución:



$T = 2,60 \text{ s}$

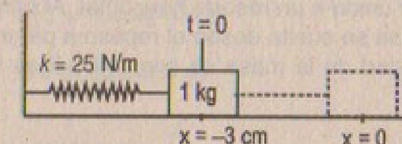
En un M.A.S. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{k}} \quad \Rightarrow \quad (2,6)^2 = 4\pi^2 . \frac{7}{k}$

$\Rightarrow \quad k = \frac{28}{(2,6)^2} . \pi^2 \quad \therefore \quad k = 40,9 \text{ N/m}$

12. Una masa de 1,0 kg unidad a un resorte de constante de fuerza igual a 25 N/m oscila sobre una pista horizontal sin fricción. En t = 0, la masa se suelta desde el reposo en x = −3,0 cm. (Es decir, el resorte se comprime 3,0 cm.) Encuentre: a) el período de su movimiento, b) los valores máximos de su velocidad y aceleración, y c) el desplazamiento, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

Resolución:



Parte (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{25}} = 1,26 \text{ s}$

Parte (b) $v_{máx} = \omega A = A\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow v_{máx} = 3 \times \sqrt{\frac{25}{1}} = 15 \text{ cm/s}$

$a_{máx} = A\omega^2 = A\frac{k}{m} \Rightarrow a_{máx} = 3 \times 25 = 75 \text{ cm/s}^2$

Parte (c) $x(t) = (3 \text{ cm})\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi\right]$

$x(t=0) = -3 = 3\cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = -1$

$\therefore \quad \phi = \pi$

Luego: $x(t) = (3 \text{ cm})\cos[5t + \pi]$

Por otro lado: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -(3 \text{ cm}) . \omega\text{sen}[5t + \pi]$

$v(t) = -(15 \text{ cm})\text{sen}[5t + \pi]$

Por último: $\frac{dv}{dt} = a(t) = (-15 \text{ cm}).\omega\cos[5t + \pi]$

$\therefore \quad a(t) = (-75 \text{ cm})\cos[5t + \pi]$

13. Un oscilador armónico simple tarda 12,0 s para efectuar cinco vibraciones completas. Encuentre: a) el período de su movimiento, b) la frecuencia en Hz, y c) la frecuencia angular en rad/s.

Resolución :

Dato: En 12 s (efectúa 5 vibraciones)

Parte (a) $f = \dfrac{5}{12\ s} \Rightarrow T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4\ s$

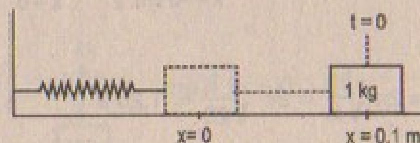
Parte (b) $f = \dfrac{5}{12} = 0{,}417\ Hz$

Parte (c) $\omega = 2\pi . f = 2(3{,}1416)\ (0{,}417)$

$\therefore\ \omega = 2{,}62\ rad/s$

14. Una masa de 1,0 kg unida a un resorte horizontal. Al principio el resorte está extendido 0,10 m y la masa se suelta desde el reposo a partir de esa posición. Después de 0,50 s, la velocidad de la masa es cero. ¿Cuál es la velocidad máxima de la masa?

Resolución :



$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow\ x(t_o) = 10\ cm = 10\ cm\cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = 1$

$\therefore\ \phi = 0°$

Luego: $x(t) = (10\ cm)\cos(\omega t)$

Entonces: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) = -(10\ cm)\ \omega \operatorname{sen}(\omega t)$

En t = 0,5 s la velocidad es cero

$\Rightarrow\ v(0{,}5\ s) = 0 = (-10\ cm\ \omega)\operatorname{sen}(0{,}5\ \omega)$

$\Rightarrow\ -10\omega = 0 \ \vee\ \operatorname{sen}(0{,}5\ \omega) = 0$ (No cumple)

ó también $-10\omega = \pi \ \vee\ \operatorname{sen}(0{,}5\ \omega) = \pi$ (cumple)

$\Rightarrow\ \omega = 2\pi \quad \therefore\ v_{máx} = \omega A = 2\pi(10) = 62{,}8\ cm/s$

15. Una masa de 0,50 kg unida a un resorte de 8,0 N/m de constante de fuerza vibra en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10 cm. Calcule, a) el valor máximo de su velocidad y aceleración, b) la velocidad y aceleración cuando la masa

está a 6,0 cm de la posición de equilibrio, y c) el tiempo que tarda la masa en moverse de x = 0 a x = 8,0 cm.

Resolución :

Datos: (M.A.S.) m = 0,5 kg ; k = 8,0 N/m ; A = 10 cm

Parte (a) $v_{máx} = A\omega = A\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\sqrt{\dfrac{8{,}0}{0{,}5}} \quad \therefore\ v_{máx} = 40\ cm/s$

$a_{máx} = A\omega^2 = A\dfrac{k}{m} = 10 \times \dfrac{8}{0{,}5} \quad \therefore\ a_{máx} = 160\ cm/s^2$

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 4\ rad/s$

Entonces: $x(t) = 10\cos(4t + \phi)$

$\Rightarrow\ 6 = 10\cos(4t + \phi) \quad \therefore\ \cos(4t + \phi) = \dfrac{3}{5}$

Entonces: $\operatorname{sen}(4t + \phi) = \dfrac{4}{5}$

Luego: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) = -40\operatorname{sen}(4t + \phi)$

$\therefore\ v = (-40)\left(\dfrac{4}{5}\right) = -0{,}32\ m/s$

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -160\cos(4t + \phi)$

$\Rightarrow\ a = -160\left(\dfrac{3}{5}\right) = -0{,}96\ m/s^2$

Parte (c) Tiempo de x = 0 → x = 8,0 cm

$x(t = 0) = 0 = 10\cos(\phi) \Rightarrow \phi = 0$

$x(t = ?) = 8\ cm = 10\ cm\cos(4t) \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \cos(4t)$

$\therefore\ 4t = 37 \times \dfrac{\pi}{180} \quad \therefore\ t = 0{,}16\ s$

16. a) Un bloque de 100 g se coloca sobre un bloque de 200 g, como se muestra en la figura P13.16. El coeficiente de fricción estático entre los dos bloques es 0,20. El bloque de abajo se mueve después hacia delante y hacia atrás horizontalmente en

un movimiento armónico simple que tiene una amplitud de 6,0 cm. Si se mantiene la amplitud constante, ¿cuál es la frecuencia más alta para la cual el bloque superior no deslizará respecto del bloque inferior? b) Suponga que el bloque inferior se mueve verticalmente en un movimiento armónico simple y no horizontalmente. La frecuencia se mantiene constante en 2,0 oscilaciones / s mientras la amplitud se incrementa en forma gradual. Determine la amplitud a la cual el bloque superior ya no mantendrá contacto con el bloque inferior.

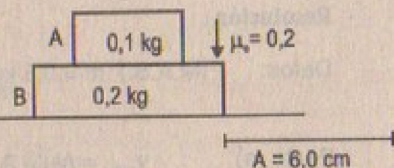
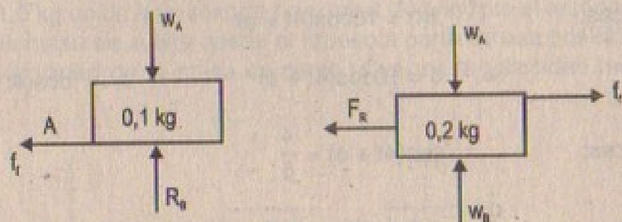


Figura P13.16

Resolución :

Parte (a) D.C.L. (de cada bloque)



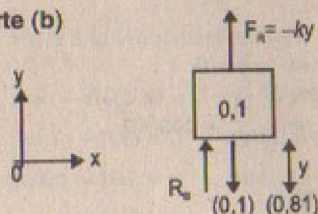
$f_r = \mu_e . N = (0,2)(R_B) = (0,2)(0,1)$ $\therefore$ $F_R = f_r$

$\Rightarrow$ $k(x) = (0,2)(0,1)$ $\Rightarrow$ $k(0,06) = (0,2)(0,1)$ $\therefore$ $k = 0,3$ N/m

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_B}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{0,3}{0,2}}$

Luego: $\omega = 2\pi . f \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{0,3}{0,2}} = 0,195$ Hz

Parte (b)



$\Rightarrow$ $2,0 = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\Rightarrow$ $k = 16$ N/m

Luego: $+ ky = (0,1)(9,81) - R_B = (0,1)(9,81) - (0,2)(9,81)$

$\Rightarrow$ $y = \text{amplitud} = \dfrac{(0,1)(9,81)}{16} - \dfrac{(0,2)(9,81)}{16} = 0,06$ am

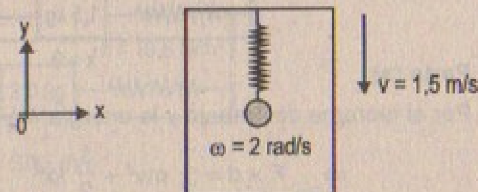
17. Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular de 2,00 rad/s. El resorte está suspendido del techo de la caja de un elevador y cuelga sin moverse (respecto de la caja de un elevador) conforme la caja desciende a una velocidad constante de 1,50 m/s. La caja se detiene repentinamente. a) ¿Con qué amplitud oscila la partícula? b) ¿Cuál es la ecuación de movimiento para la partícula? (Elija la dirección hacia arriba como positiva).

17A. Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular ω. El resorte está suspendido del techo de la caja de un elevador y cuelga sin moverse (respecto de la caja del elevador) conforme la caja desciende a una velocidad constante v. La caja se detiene repentinamente. a) ¿Con qué amplitud oscila la partícula? b) ¿Cuál es la ecuación de movimiento para la partícula? (Elija la dirección hacia arriba como positiva).

Resolución :

Parte (a)

Como el resorte oscila, entonces emplea un M.A.S.



Luego:

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Con respecto del elevador (observador adentro)

$x(t = 0) = x_o = 0$ $\qquad$ $x(t = 0) = -v = \text{cte}$

$\Rightarrow$ $0 = A\cos(\phi)$ $\therefore$ $\phi = \pi/2$

$\Rightarrow$ $-v = -A.\omega \operatorname{sen}(\phi)$ (Baja)

$\Rightarrow$ $\dfrac{v}{\omega} = A\operatorname{sen}(\pi/2)$ $\therefore$ $A = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$ m

Parte (b)

La ecuación del movimiento será:

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ $\therefore$ $x(t) = \left(\dfrac{v}{\omega}\right)\cos(\omega t + \pi/2)$

Reemplazando: $x(t) = (0,75)\cos(2t + \pi/2)$

ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

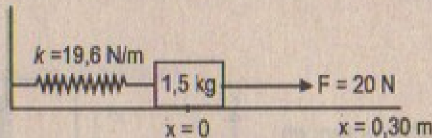
(*Nota: ignore la masa del resorte en todos estos problemas.*)

18. Un bloque de 1,5 kg en reposo sobre una mesa se une a un resorte horizontal con una constante de 19,6 N/m. Al principio el resorte no está extendido. Se aplica una fuerza constante horizontal de 20,0 N al objeto causando que el resorte se extienda.

a) Determine la velocidad del bloque después de que se ha movido 0,30 m a partir del equilibrio si la superficie entre el bloque y la mesa no presenta fricción. b) Conteste el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es 0,20.

18A. Un bloque de masa m en reposo sobre una mesa se une a un resorte horizontal con una constante *k*. El resorte no está extendido inicialmente. Se aplica una fuerza constante F al objeto causando que el resorte se extienda. a) Determine la velocidad del bloque después de que se ha movido una distancia d a partir del equilibrio si la superficie entre el bloque y la mesa no presenta fricción. b) Conteste el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es μ.

Resolución :



Parte (a)

Por el teorema del trabajo y la energía: $W_f = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad F \times d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad 20(0,3) = \frac{1}{2}(1,5)v^2 + \frac{1}{2}(19,6)(0,3)^2$$

$$\therefore \quad v = 2,61 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Si hay fricción y el $\mu_k = 0,20$

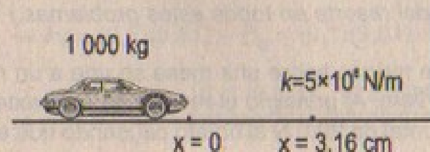
$$20(0,3) - f_f(0,3) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k.x^2$$

$$\Rightarrow \quad 20(0,3) - (0,20)(1,5)(9,81)(0,3) - \frac{1}{2}(19,6)(0,3)^2 = \frac{1}{2}(1,5)v^2$$

$$\therefore \quad v = 2,376 \text{ m/s}$$

19. Un automóvil que tiene una masa de 1 000 kg se dirige hacia un muro de ladrillos en una prueba de seguridad. El parachoques se comporta como un resorte de constante igual a $5,0 \times 10^6$ N/m y se comprime 3,16 cm cuando el auto se lleva al reposo. ¿Cuál fue la velocidad del auto antes del impacto, suponiendo que no se pierde energía durante el impacto con la pared?

Resolución :



Por conservación de energía

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

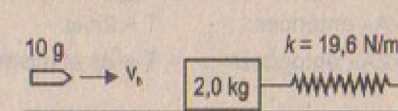
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(10^3).v^2 = \frac{1}{2}(5 \times 10^6)(0,0316)^2$$

$$\therefore \quad v = 2,23 \text{ m/s}$$

20. Una bala de 10,0 g de masa se dispara contra y queda incrustada en un bloque de 2,0 kg unido a un resorte con constante igual a 19,6 N/m. a) ¿Cuánto se comprime el resorte si la velocidad de la bala justo antes de incidir en el bloque es de 300 m/s y el bloque se desliza a lo largo de una pista sin fricción? b) Responda el inciso a) si el coeficiente de fricción entre la pista y el bloque es 0,200.

Resolución :



Parte (a) $\quad v_{bala} = 300$ m/s

Por choque inelástico: $\quad P_{inicial} = P_{final}$

Entonces: $\quad m_B \cdot v_{bala} = (m_B + m_{bloque}) \cdot v_{final}$

$$\therefore \quad v_{final} = \frac{(3,00)(0,01)}{2,01} = 1,49 \text{ m/s}$$

Por conservación de energía: $\quad \frac{1}{2}mv^2_{final} = \frac{1}{2}kA^2$

$$\Rightarrow \quad (2,01)(1,49)^2 = 19,6A^2$$

$$\therefore \quad A = 0,477 \text{ m}$$

Parte (b) $\quad \mu_k = 0,2 \quad \Rightarrow \quad f_f = (0,2)(2)(9,81) = 3,924$ N

por el teorema del trabajo y la energía:

$$-f_f(d) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}M_{total} \cdot v^2_{final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(9,6)A^2 + 3,924\,A - \frac{1}{2}(2,01)(1,49)^2$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado resulta que:

$$A = 0,32 \text{ m}$$

21. La amplitud de un sistema que se mueve en un movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en: a) la energía total, b) la velocidad máxima, c) la aceleración máxima, y d) el período.

Resolución :

Si la amplitud de un sistema es «A» entonces: $E_{total} = \frac{1}{2} kA^2$

a) Si «A» se duplica entonces:

$$E_{total} = \frac{1}{2} k(2A)^2 = 4\left(\frac{1}{2} k A^2\right)$$

$\therefore$ $E_{total\ final}$ = se cuadruplica

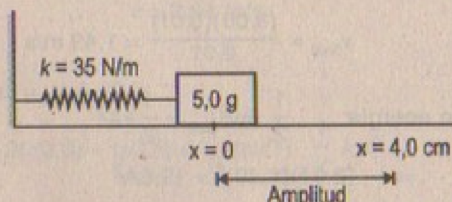
b) Si la amplitud es «A» entonces: $v_{máx} = A.\omega$
Si la amplitud es «2A» entonces: $v_{máx}$ = se duplica

c) Si la amplitud es «A» entonces: $a_{máx} = A.\omega^2$
Si la amplitud es «2A» entonces: $a_{máx}$ = se duplica

d) Si la amplitud es «A» entonces: $T = 2\pi/\omega$
Si la amplitud es «2A» entonces: T = es el mismo

22. Una masa de 50 g conectada a un resorte de 35 N/m de constante de fuerza oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4,0 cm. Encuentre, a) la energía total del sistema, y b) la velocidad de la masa cuando el desplazamiento es 1,0 cm. Cuando el desplazamiento es 3,0 cm, encuentre c) la energía cinética, y d) la energía potencial.

Resolución :



Parte (a) $E_{total} = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2}(35)(4 \times 10^{-2})^2$

$\therefore$ $E_{total} = 0{,}028$ J

Parte (b) $E_{total} = E_K + E_p$

$\Rightarrow$ $0{,}028 = \frac{1}{2}(50 \times 10^{-3})v^2 + \frac{1}{2}(35)(0{,}01)^2$

$\therefore$ $v = 1{,}02$ m/s

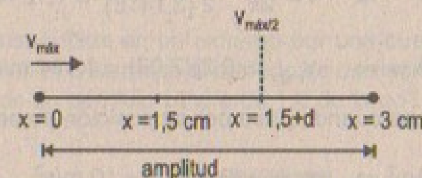
Parte (c) $0{,}028 = E_K + \frac{1}{2}(35)(3 \times 10^{-2})^2$ $\therefore$ $E_K = 0{,}01225$ joules

Entonces: $E_p = 0{,}01575$ joules

23. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con una amplitud de 3,00 cm. ¿A qué desplazamiento desde el punto medio de su movimiento su velocidad es igual a la mitad de su velocidad máxima?

Resolución :

Amplitud = 3,0 cm



$E_{total} = E_K + E_p$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m.\left(\frac{v_{máx}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} k(1{,}5 + d)^2$

$\therefore$ Por otro lado: $\frac{1}{2} k(3{,}0)^2 = \frac{1}{2} m. v_{máx}^2$

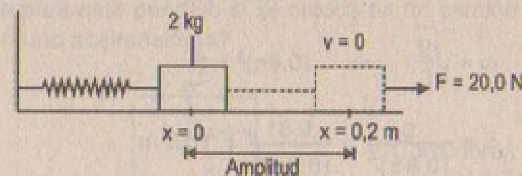
$\therefore$ $v_{máx} = 3{,}0\sqrt{k/m}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} k(3{,}0)^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{3{,}0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 + \frac{1}{2} k(1{,}5 + d)^2$

$\Rightarrow$ $9 - \frac{9}{4} = (1{,}5 + d)^2$ $\therefore$ $1{,}5 + d = \pm 2{,}60$ cm

24. Una masa de 2,00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie lisa horizontal. Se necesita una fuerza horizontal de 20,0 N para mantener la masa en reposo cuando se jala 0,200 m a partir de su posición de equilibrio (el origen del eje x). La masa se suelta después desde el reposo con un desplazamiento inicial de x_0 = 0,200 m y subsecuentemente experimenta oscilaciones armónicas simples. Encuentre, a) la constante de fuerza del resorte, b) la frecuencia de las oscilaciones, y c) la velocidad máxima de la masa. ¿Dónde ocurre esta velocidad máxima? d) Encuentre la aceleración máxima de la masa. ¿Dónde ocurre? e) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Cuando el desplazamiento es igual a un tercio del valor máximo, encuentre f) la velocidad y g) la aceleración.

Resolución :



Parte (a) $\Sigma F_x = 0$ $\Rightarrow$ $20 - kx = 0$ $\therefore$ $k = \frac{20}{0{,}2} = 100$ N/m

Parte (b) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{2}}$ $\therefore$ $\omega = 7{,}07$ rad/s

Como: $\omega = 2\pi.f \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{7{,}07}{2\,(3{,}1416)} = 1{,}12$ Hz

Parte (c) $v_{máx} = A.\omega \Rightarrow v_{máx} = (0{,}2)(7{,}07) = 1{,}414$ m/s

Esta velocidad ocurre cuando pasa por su posición de equilibrio.

Parte (d) $a_{máx} = A\omega^2 \Rightarrow a_{máx} = (0{,}2)(50) = 10$ m/s^2

Esta aceleración ocurre cuando pasa por su posición de equilibrio

Parte (e) $E_{total} = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}(100)(0{,}2)^2 = 2$ joules

Parte (f) Cuando desplazamiento $= \dfrac{A}{3} = \dfrac{0{,}2}{3}$

$$E_{total} = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{0{,}2}{3}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2)v^2 + \frac{1}{2}(100)\left(\frac{0{,}2}{3}\right)^2$$

$\therefore$ $v = 1{,}33$ m/s

Parte (g) $k.\left(\dfrac{A}{3}\right) = m.a \Rightarrow a = \dfrac{100\times(0{,}2)}{3\times(2)} = 3{,}33$ m/s^2

El péndulo:

EL PÉNDULO

25. Un péndulo simple tiene un período de 2,50 s. a) ¿Cuál es su longitud? b) ¿Cuál sería su período en la Luna, donde $g_{Luna} = 1{,}67$ m/s^2?

Resolución:

$T_{péndulo} = 2{,}5$ s

Sabemos que: $T\omega = 2\pi \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{2{,}5} = 0{,}8\,\pi$ rad/s

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \Rightarrow (0{,}8\pi)^2 = \dfrac{g}{L}$

$$\Rightarrow L = \frac{g}{(0{,}8\pi)^2} = \frac{9{,}81}{(0{,}8\pi)^2} = 1{,}55 \text{ m}$$

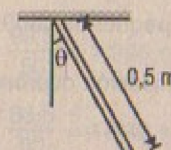
Parte (b) $g_{Luna} = 1{,}67$ m/s^2

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g_L}{L}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g_L}} = \frac{2\,(3{,}1416)\sqrt{1{,}55}}{\sqrt{1{,}67}} \quad \therefore T = 6{,}05 \text{ s}$$

26. Una regla métrica suspendida en un extremo por una cuerda ligera de 0,50 m de largo, se pone a oscilar. a) Determine el período de oscilación. b) ¿En qué porcentaje difiere lo anterior de un péndulo simple de 1,0 de largo?

Resolución:

Considerar: $g = 9{,}81$ m/s^2



Parte (a)

$T.\omega = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} = 2\,(3{,}1416)\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} = 1{,}42 \text{ s}$$

Parte (b) Si: L = 1,0 m

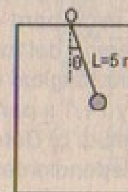
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2\,(3{,}1416)\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}00 \text{ s}$$

Difiere en: 29%

27. Un péndulo simple mide 5,0 m de largo. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5,0 m/s^2? b) ¿Cuál es la respuesta del inciso a) si el elevador acelera hacia abajo a 5,0 m/s^2? c) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5,0 m/s^2?

27A. Un péndulo simple tiene una longitud L. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se ubica en un elevador que se mueve hacia arriba con una aceleración a? b) ¿Cuál es la respuesta del inciso a) si el elevador se mueve hacia abajo con una aceleración a? c) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se coloca en un camión que se mueve horizontalmente con una aceleración a?

Resolución:



Considerar: g: 9,81 m/s^2

Parte (a)

Inicialmente cuando el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio y acelera hacia arriba y se cumple:

$$T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g + a) = m.g_{ef}$$

Entonces «T» es el peso aparente dentro del ascensor. Luego la componente del peso aparente, es la fuerza restauradora que realiza el M.A.S. entonces:

$$\Sigma \tau_0 = I_0 . \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -m.g_{ef}\,\text{sen}\theta\,.\,L = mL^2\ddot{\theta}$$

Para desplazamientos pequeños senθ = θ

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g_{ef}}{L}\theta = 0 \quad \text{(ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

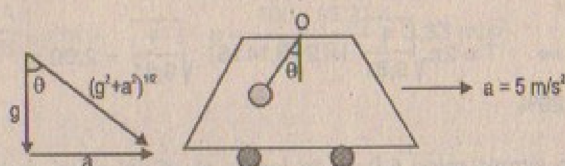
$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}} = 2(3{,}1416)\sqrt{\frac{5{,}00}{9{,}81+5}} = 3{,}65\text{ s}$$

Parte (b)

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}} = 2(3{,}1416)\sqrt{\frac{5}{9{,}81-5}}$

$$\therefore \quad T = 6{,}41\text{ s}$$

Parte (c)



Entonces: La F_R para el M.A.S. es: $-m\left(g^2+a^2\right)^{1/2}\text{sen}\theta$

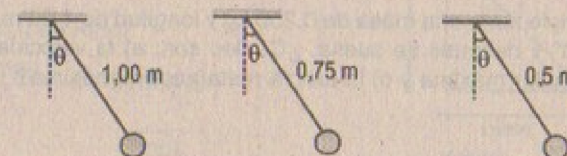
Luego: $\Sigma\tau_0 = mL^2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -m(g^2+a^2)^{1/2}\theta L = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\left(g^2+a^2\right)^{1/2}}}\ ; \text{ reemplazando: } T = 4{,}23\text{ s}$$

28. Una masa se une al extremo de una cuerda para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para desplazamientos angulares pequeños y tres longitudes, midiendo el tiempo del movimiento en cada caso con un cronómetro durante 50 oscilaciones. Para longitud de 1,00 m; 0,75 m y 0,50 m, se miden tiempos totales de 99,8 s; 86,6 s y 71,1 s para 50 oscilaciones. a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelo con el valor aceptado. c) Grafique T_2 contra L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta mejor ajustada. Compare este valor con el obtenido en el inciso b).

Resolución:



Parte (a)

$$f_1 = \frac{50}{99{,}8} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{99{,}8}{50} = 1{,}996\text{ s}$$

$$f_2 = \frac{50}{86{,}6} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{86{,}6}{50} = 1{,}732\text{ s}$$

$$f_3 = \frac{50}{71{,}1} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{71{,}1}{50} = 1{,}422\text{ s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} \quad \Rightarrow \quad g_1 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 L_1 \quad \therefore \quad g_1 = 9{,}90\text{ m/s}^2$

Sabemos que: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}} \quad \Rightarrow \quad g_2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 L_2 \quad \therefore \quad g_2 = 9{,}87\text{ m/s}^2$

Sabemos que: $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{L_3}{g_3}} \quad \Rightarrow \quad g_3 = \left(\frac{2\pi}{T_3}\right)^2 L_3 \quad \therefore \quad g_3 = 9{,}76\text{ m/s}^2$

En consecuencia: $g_{media} = \frac{g_1+g_2+g_3}{3} = \frac{9{,}90+9{,}87+9{,}76}{3} = 9{,}84\text{ m/s}^2$

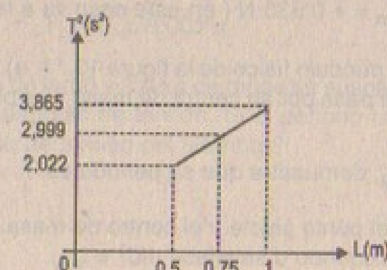
Parte (c) $T_1^2 = 3{,}865\text{ s}^2$ para L = 1,00 m

$T_2^2 = 2{,}999\text{ s}^2$ para L = 0,75 m

$T_3^2 = 2{,}002\text{ s}^2$ para L = 0,50 m

Luego:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L$$

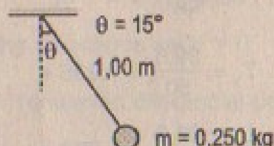


Sabemos que:

$$m = \frac{3{,}865 - 2{,}022}{1{,}00 - 0{,}50} = \frac{1{,}843}{0{,}5} = \frac{4\pi^2}{g} \qquad \therefore \quad g = 10{,}71\ m/s^2$$

29. Un péndulo simple tiene una masa de 0,250 kg y longitud de 1,00 m. Se desplaza un ángulo de 15,0° y después se suelta. ¿Cuáles son: a) la velocidad máxima, b) la aceleración angular máxima y c) la fuerza restauradora máxima?

Resolución:



$\text{sen}15° = 0{,}259$
$\cos 15° = 0{,}966$

Parte (a)

Por energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow \quad mgL(1 - \cos 15°) = \frac{1}{2} m v^2_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2gL\,(1 - \cos 15°)} = v_{máx}$$

Reemplazando:

$$v_{máx} = \sqrt{2\,(9{,}81)\,(1 - 0.966)}$$

$$\therefore \quad v_{máx} = 0{,}817\ m/s$$

Parte (b)

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \quad mg\,L\text{sen}15° = mL^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g\,\text{sen}15°}{L} = \alpha \qquad \therefore \quad \alpha = 2{,}54\ rad/s^2$$

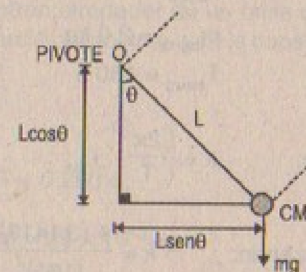
Parte (c) $F_{restauradora} = -mg\text{sen}15° = (0{,}250)(9{,}81)(0{,}259)$

$\therefore \quad F_R = +\,0{,}635$ N (en este caso va a favor del desplazamiento)

30. Considere el péndulo físico de la figura 13.11. a) Si su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es paralelo al eje que pasa por su punto pivote, es I_{CM}, demuestre que su periodo es $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$ donde d es la distancia entre el punto pivote y el centro de masa. b) Muestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{CM}$.

Resolución:

Sabemos: $\Sigma\tau_o = I_o \cdot \alpha$



$$\Rightarrow \quad -mgL\text{sen}\theta = I_o \cdot \ddot{\theta}$$

Si $\text{sen}\theta \approx \theta$ (pequeño)

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mg\,L}{I_o} \cdot \theta = 0 \text{ (M.A.S.)}$$

Entonces: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgL}{I_o}}$

Luego: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_o}{mg\,L}}$

Por ejes paralelos: $I_o = I_{CM} + m.L^2$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m\,.\,L^2}{mgL}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b) Si: $I_{CM} = m.L^2$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2 + mL^2}{mgL}} \qquad \therefore \quad T_{mín} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

31. Un péndulo simple tiene una longitud de 3,00 m. Determine el cambio en su periodo si éste se toma desde un punto donde g = 9,80 m/s² hasta una elevación donde la aceleración en caída libre disminuye a 9,79 m/s².

Resolución:

L = 3,00 m

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2(3{,}1416)\sqrt{\frac{3{,}00}{9{,}80}} = 3{,}476\ s$$

si: g = 9,80

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_2}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2(3{,}1416)\sqrt{\frac{3{,}00}{9{,}79}} = 3{,}478\ s$$

si: g = 9,79

$$\therefore \quad T_2 - T_1 = 0{,}002\ s$$

32. Una barra horizontal de 1,0 m de largo y 2,0 kg de masa se suspende de un alambre en su centro para formar un péndulo de torsión. Si el periodo resultante es de 3,0 minutos, ¿cuál es la constante de torsión del alambre?

Resolución:

Sabemos que: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{CM}}{k}}$

Por dato: $L_{barra} = 1{,}0$ m

$m_{barra} = 2{,}0$ kg $\qquad I_{barra} = \frac{1}{12} ML^2$

$T_{barra} = 180$ s

Entonces: $k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_{CM}$

Reemplazando: $k = \frac{4\,(3{,}1416)^2}{(180)^2} \cdot \frac{1}{12}\,(2)(1)^2$

$\therefore \quad k = 203 \times 10^6$ N.m

33. Un péndulo físico en la forma de un cuerpo plano efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia de 0,450 Hz. Si el péndulo tiene una masa de 2,20 kg y el pivote se localiza a 0,350 m del centro de masa, determine el momento de inercia del péndulo.

Resolución :

$f = 0{,}450$ Hz

θ 0,350 m m = 0,220 kg

$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mg\,d}}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{0{,}450}\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \times mg\,.\,d = I_o$

Entonces: $I_o = \frac{1}{(0{,}450)^2} \times \frac{1}{(2\pi)^2} \times (2{,}20)(9{,}81)(0{,}350) = 0{,}944$ kg.m^2

34. El desplazamiento angular de un péndulo se representa por la ecuación $\theta = 0{,}32 \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4{,}43$ rad/s. Determine el periodo y la longitud del péndulo.

Resolución : 34

$\theta(t) = 0{,}32\cos(\omega t)$

$\omega = 4{,}43$ rad/s

Sabemos que: $\omega.T = 2\pi$

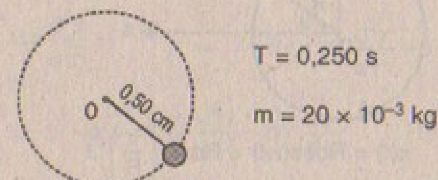
$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{4{,}43} \qquad \therefore \quad T = 1{,}42$ s

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{g}{(4{,}43)^2} = \frac{9{,}81}{(4{,}43)^2}$

$\therefore \quad L = 0{,}499$ m

35. Un volante de reloj tiene un periodo de oscilación de 0,250 s. La rueda se construye de modo que 20,0 g de masa se concentren alrededor de un orilla de 0,500 cm de radio. ¿Cuáles son: a) el momento de inercia del volante, y b) la constante de torsión del resorte unido?

Resolución :



$T = 0{,}250$ s

$m = 20 \times 10^{-3}$ kg

Parte (a)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mg\,d}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 .\, mgd = I_o$

Reemplazando: $I_o = \left[\frac{0{,}250}{2\,(3{,}1416)}\right]^2 \times (20 \times 10^{-3})(9{,}81)(0{,}5 \times 10^{-2})$

$\therefore \quad I_o = 15 \times 10^7$ kg.m^2

Parte (b)

Por otro lado: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{k}}$

$\Rightarrow \quad k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_o = \left(\frac{2\pi}{0{,}250}\right)^2 \times 15 \times 10^7$

$\therefore \quad k = 9{,}47 \times 10^{10}$ N.m

COMPARACIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE CON EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

36. Mientras usted viaja atrás de un carro que se desplaza a 3,0 m/s, observa que una de las llantas del automóvil tiene una pequeña protuberancia hemisférica sobre su borde, como muestra la figura P13.36. a) Explique por qué la protuberancia, desde su punto de visión detrás del auto, ejecuta un movimiento armónico simple. b) Si los radios de las llantas del auto son iguales a 0,30 m, ¿cuál es el periodo de oscilación de la protuberancia?

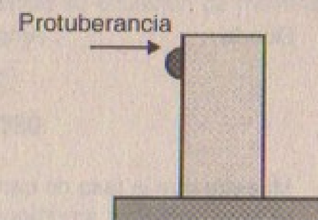
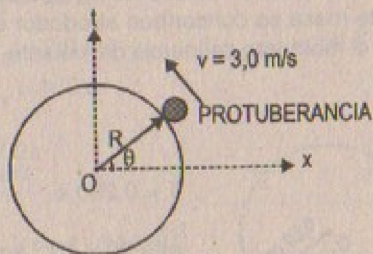


Figura P13.36

Resolución :

R = 0,30 m
v = 3,0 m/s



⇒ Por M.C.U. $x(t) = R\cos(\omega t) = R\cos\left(\frac{v}{R}\right).t$

En consecuencia: $x(t) = 0{,}3\cos(10t)$ (M.A.S.) Ecuación de movimiento en x

Por consiguiente: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2(3{,}1416)}{10} = 0{,}63$ s

37. Considere el motor simplificado de un solo émbolo de la figura P13.37. Si la rueda gira a una velocidad angular constante ω, explique por qué la barra del émbolo oscila en un movimiento armónico simple.

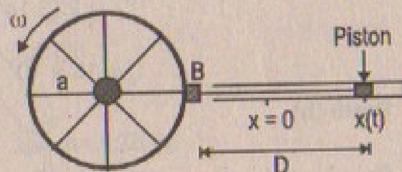


Figura P13,37

Resolución :

$x_B(t) = a\cos(\omega t)$ (Ecuación de un M.A.S.)

$x_B(t = 0) = a\cos(0) = a$

Inicialmente la barra del embolo está en la misma linea de acción de «B» de la rueda, entonces tendrá arcos iguales en tiempos iguales con la misma «ω»

Luego: $x_{embolo}(t) = (a + D)\cos(\omega.t)$

Donde Amplitud = a + D ∴ Realiza un M.A.S.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

38. Muestre que la tasa de cambio en el tiempo de la energía mecánica correspondiente a un oscilador amortiguado sin accionamiento está dada por $dE/dt = -bv^2$ y, en consecuencia, siempre es negativa. (Sugerencia: Diferencie la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ y utilice la ecuación 13.29.)

Resolución :

Por demostrar: $\frac{dE}{dt} = -bv^2$

Por la ecuación: 13,29

$$-kx - \frac{b\,dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} \quad \text{(por v)}$$

$$\therefore \quad -kx.v = mv\frac{d^2x}{dt^2} + bv\frac{dx}{dt} \quad ...(1)$$

Por otro lado: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = mv\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} \quad ...(2)$$

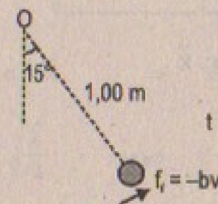
Igualando (1) y (2)

Entonces: $kx = b$

En consecuencia: $\frac{dE}{dt} = -bv^2$ l.q.q.d.

39. Un péndulo 1,00 m de longitud se suelta desde un ángulo inicial de 15,0°. Después de 1 000 s, debido a la fricción su amplitud se ha reducido a 5,5°. ¿Cuál es el valor de b/2 m?

Resolución :



Considerar: sen15° = 0,259
cos15° = 0,966

t = 1 000 s

La fuerza de fricción es una fuerza amortiguadora, entonces el movimiento es un movimiento oscilatorio amortiguador. En consecuencia su ecuación de movimiento está dada por:

$$x(t) = A e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Luego: $\Sigma\tau_o = I_o.\ddot{\theta}$

⇒ $-mgL\sin\theta - bL^2.\dot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}$

⇒ $\ddot{\theta} + \left(\frac{b}{m}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$ (Ecuación diferencial del movimiento)

Donde: $2\beta = \dfrac{b}{m} \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{b}{2m}$

Luego: $\theta(t) = \theta_{máx} \cdot e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$

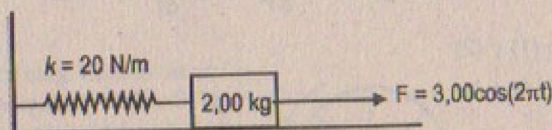
$\Rightarrow \quad \theta(t = 1\,000\ s) = 5{,}5° = 15\ e^{-b(1000)}$

$\Rightarrow \quad \ln(2{,}72) = -\beta\,(1\,000) = 1 \quad \therefore \quad \beta = b/2m = 1 \times 10^{-3}\ s^{-1}$

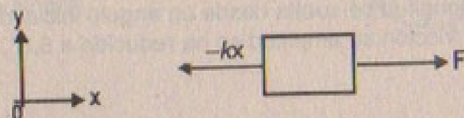
OSCILACIONES FORZADAS

40. Una masa de 2,00 kg unida a un resorte es accionada por una fuerza externa $F = (3{,}00\ N)\cos(2\pi t)$. Si la constante de fuerza del resorte es 20,0 N/m determine, a) el periodo, y b) la amplitud del movimiento. (Sugerencia: Suponga que no hay amortiguamiento, es decir, que b = 0, y utilice la ecuación 13.34.)

Resolución:



Parte (a)



$$\Sigma F_x = m\,.\,\ddot{x}$$

$\Rightarrow \quad F(t) - kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\dfrac{k}{m}\right)x = \left(\dfrac{3}{m}\right)\cos(2\pi + t) \qquad \dots (1)$

Luego: $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = \left(\dfrac{3}{m}\right)\cos(2\pi t)$

donde: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

donde: $x(t)$ = solución general = $x_{particular} + x_{homogénea}$

$x_p(t) = D\cos(2\pi t)$

$x_H(t) = A\cos(\omega t + f)$

Luego: $D = \dfrac{\frac{3}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2}$

En consecuencia: $x_{total} = \left[\dfrac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{20}{2}\right) - (2\pi)^2}\right]\cos(2\pi t) + A\cos(\omega_o t + \phi)$

Donde: frecuencia angular: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{20}} \qquad \therefore \quad T = 1{,}98\ s$

Parte (b) $\quad A = \dfrac{1{,}5}{\left|10 - (2\pi)^2\right|} = \dfrac{1{,}5}{|-29{,}5|} = +\,0{,}05\ m$

41. Calcule las frecuencias resonantes de: a) una masa de 3,00 kg unida a un resorte de 240 N/m de constante de fuerza, y b) un péndulo simple de 1,50 m de longitud.

Resolución:

Parte (a)

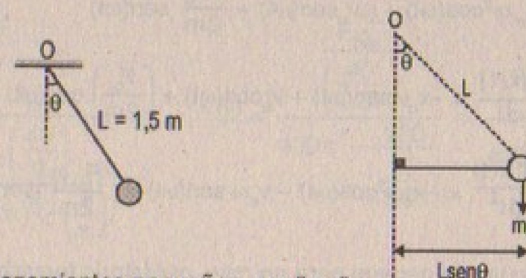


$-kx = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$ (Ecuación diferencial del M.A.S.)

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Reemplazando: $f = \dfrac{1}{2\,(3{,}1416)}\sqrt{80} \approx 1{,}42\ Hz$

Parte (b)



Para desplazamientos pequeños: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

Entonces: $\Sigma\tau_0 = I_0 \cdot \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -mgL\text{sen}\theta = mL^2\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$ (Ecuación diferencial del M.A.S.)

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

En consecuencia: $f = \dfrac{1}{2\pi} \times \omega = \dfrac{1}{2\,(3{,}1416)}\sqrt{\dfrac{9{,}81}{1{,}5}}$

$\therefore \quad f = 0{,}41$ Hz

42. Considere un oscilador forzado subamortiguado en resonancia de modo que $\omega = \omega_0 = \sqrt{h/m}$. La ecuación de movimiento es $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \left(\dfrac{F_0}{m}\right)\cos\omega t$.

Demuestre, por sustitución directa, que la solución de esta ecuación es

$$x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}(\omega t) + \left(\frac{F_o}{2m\omega}\right)\text{sen}(\omega t)$$

donde x_0 y v_0 son su posición y velocidad iniciales.

Resolución:

Por dato: $\omega = \omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

La ecuación del mov. oscilatorio forzado subamortiguado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos\omega t$$

Por demostrar: $x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\dfrac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}(\omega t) + \left(\dfrac{F_o}{2m\omega}\right)\text{sen}(\omega t) \quad \ldots (\alpha)$

Por sustitución directa: de la ecuación (α)

$$\omega^2 x = x_o.\omega^2\cos(\omega t) + \omega v_o\text{sen}(\omega t) + \frac{\omega F_o}{2m}\text{sen}(\omega t) \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $\dfrac{dx(t)}{dt} = -x_o\omega\text{sen}(\omega t) + v_o\cos(\omega t) + \left(\dfrac{F_o}{2m}\right)\cos(\omega t)$

Entonces: $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -x_o\omega^2\cos(\omega t) - v_o\omega\,\text{sen}(\omega t) - \left(\dfrac{F_o.\omega}{2m}\right)\text{sen}(\omega t) \ldots (2)$

Sabemos que la ecuación general para un mov. oscilatorio forzado es:

$$x(t) = \frac{\dfrac{F_o}{m}}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}.\cos(\omega t) + A\cos(\omega_o t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \text{Como } \omega = \omega_o$$

Luego: $x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$ (M.A.S.)

Donde: $\ddot{x} + \omega^2.x = 0$ (ecuación diferencial)

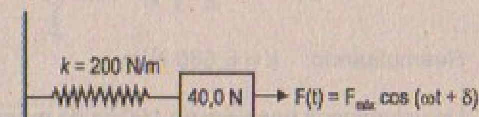
Sumando (1) + (2): $0 = \dfrac{F_o}{m}\cos(\omega t)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = \dfrac{F_o}{m}\cos(\omega t)$ cumple

$\therefore \quad x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\dfrac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}(\omega t) + \left(\dfrac{F_o}{2m\omega}\right)\text{sen}(\omega t)$ l.q.q.d.

43. Un peso de 40,0 N se suspende de un resorte cuya constante de fuerza es de 200 N/m. El sistema es subamortiguado y se somete a una fuerza armónica de 10,0 Hz de frecuencia, lo que origina una amplitud de movimiento forzado de 2,00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza.

Resolución:



Amplitud = 2,00 cm

$\omega = 2\pi f = 2\pi\,(10) = 20\pi$ rad/s

Por mov. forzado: $F(t) - kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m} = \left(\dfrac{F_{máx}}{m}\right)\cos(\omega t + \delta)$ (ecuación diferencial)

Sabemos que: $x(t)_{total} = \left[\dfrac{\dfrac{F_{máx}}{m}}{\omega^2 - \omega_0^2}\right]\cos(\omega t + \delta) + A\cos(\omega_o t + \phi)$

Por dato:

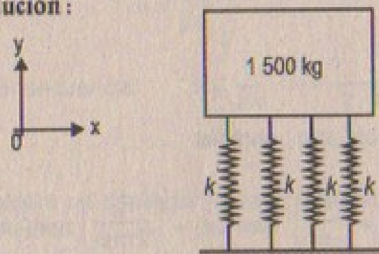
$$0{,}02 = \frac{\dfrac{F_{máx}}{\left(\dfrac{40}{g}\right)}}{(20\pi)^2 - \left(\dfrac{k}{m}\right)} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = \frac{\dfrac{F_{máx}}{\left(\dfrac{40}{9{,}81}\right)}}{400\pi^2 - \dfrac{200}{\left(\dfrac{40}{9{,}81}\right)}} = \frac{\dfrac{(F_{máx}).(9{,}81)}{40}}{400\pi^2 - \dfrac{(200)\,(9{,}81)}{40}}$$

Despejando resulta que: $F_{máx} = 318$ N

PROBLEMAS ADICIONALES

44. Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un periodo de 1,5 s después de golpear un tope. El carro tiene una masa de 1 500 kg y es soportado por cuatro resortes cuyas constantes de fuerza *k* son iguales. Determine un valor para *k*.

Resolución :



$T = 1{,}5\ s$

$\Sigma F_y = m\ddot{y} \Rightarrow -4ky = m\ddot{y}$

$\Rightarrow \ddot{y} + \dfrac{4k}{m}y = 0$

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{4k}{m}} = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow k = 1\,500 \times \left(\dfrac{\pi}{1{,}5}\right)^2$

Reemplaando: $k = 6\,580$ N/m

45. Un voluminoso pasajero de 150 kg de masa viaja en el carro del problema 44. ¿Cuál es el nuevo periodo de oscilación?

Resolución :

Sabemos que: $T = \dfrac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_{total}}{k}}$

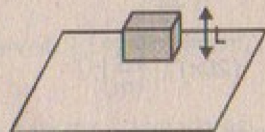
$\Rightarrow T = (3{,}1416)\cdot\sqrt{\dfrac{1\,500 + 150}{6\,580}} \Rightarrow T = (3{,}1416)(0{,}5)$

$\therefore T = 1{,}57$ s

46. Un bloque descansa sobre una placa plana que ejecuta un movimiento armónico simple vertical con un periodo de 1,2 s. ¿Cuál es la amplitud máxima del movimiento en el cual el bloque no se separa de la placa?

Resolución :

El bloque ejecuta un M.A.S. como si fuera un péndulo.



Entonces:

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \Rightarrow g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = L = \text{amplitud}$

Luego: Amplitud $= (9{,}81)\left(\dfrac{1{,}2}{2\pi}\right)^2 = 0{,}36$ m

47. Cuando el péndulo simple mostrado en la figura P13.47 forma un ángulo con la vertical su velocidad es v. a) Calcule la energía mecánica total del péndulo como una función de v y θ. b) Pruebe que cuando θ es pequeña, la energía potencial puede expresarse como $1/2\ mgL\theta^2 = 1/2\ m\omega^2 s^2$. (Sugerencia: En el inciso b) aproxime $\cos\theta$ por $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$.)

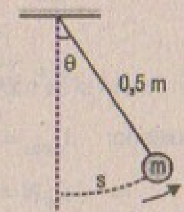
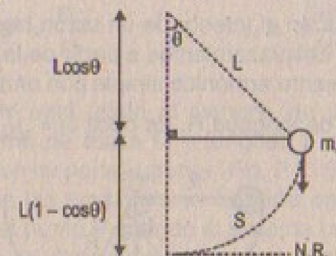


Figura P13.47

Resolución :

Parte (a)



$S = \theta.L$

$\omega = \sqrt{g/L}$

$E_{mecánica\ total} = E_K + E_p \Rightarrow E_{total} = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta)$

Parte (b)

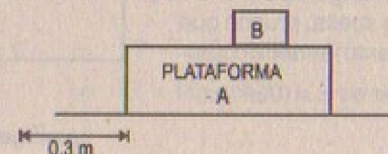
Como: $E_{potencial} = mgL(1 - \cos\theta)$ si $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

$\Rightarrow E_{potencial} = mgL\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}m(\theta L)^2\left(\dfrac{g}{L}\right)$

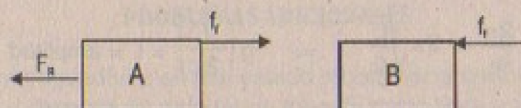
$\therefore E_{potencial} = \dfrac{1}{2}mgL(\theta)^2 = \dfrac{1}{2}ms^2\omega^2$ l.q.q.d.

48. Una plataforma horizontal vibra con movimiento armónico simple en la dirección horizontal con un periodo de 2,0 s. Un cuerpo sobre la plataforma empieza a deslizarse cuando la amplitud de la vibración alcanza 0,30 m. Encuentre el coeficiente de fricción estática entre el cuerpo y la plataforma.

Resolución :



D.C.L.



Sabemos:

$$T = 2{,}0\ s \Rightarrow \frac{1}{2{,}0} = f \Rightarrow f = 0{,}5\ Hz \quad \therefore \quad \omega = 2\pi f = 3{,}1416\ rad/s$$

Pero: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A}} \Rightarrow k = (3{,}1416)^2\ (m_A) \quad ...(1)$

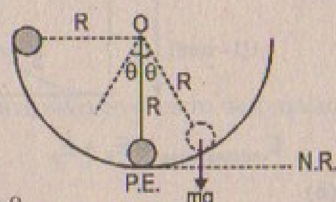
Por equilibrio: $f_{emáx} = F_R$

$$\Rightarrow \mu_e.N = \mu_e.m_A.g = (0{,}3)(3{,}1416)^2 \times m_A$$

$$\therefore \mu_e = (0{,}3)(3{,}1416)^2/(9{,}81) = 0{,}302$$

49. Una partícula de masa m se desliza en el interior de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que, para pequeños desplazamientos a partir de la posición de equilibrio, la partícula efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual a la de un péndulo simple de longitud R. Es decir $\omega = \sqrt{g/R}$.

Resolución :



$$\Sigma \tau_o = I_o . \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg\ L\text{sen}\theta = mL^2.\ddot{\theta}$$

Para desplazamientos pequeños $\text{sen}\theta = \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0 \quad \text{(M.A.S.)}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

50. Un tablón horizontal de masa m y longitud L está articulado en un extremo, y en el otro está unido a un resorte de constante de fuerza k (Fig. P13.50). El momento de inercia del tablón alrededor del pivote es $1/3\ mL^2$. Cuando el tablón se desplaza un ángulo pequeño θ a partir de la horizontal y se suelta, pruebe que se mueve con un movimiento armónico simple cuya frecuencia angular es $\omega = \sqrt{3k/m}$.

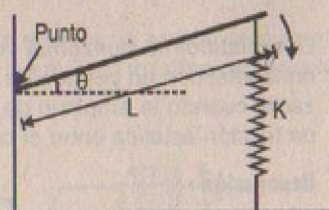
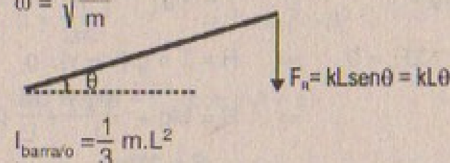


Figura P13.50

Resolución :

Por demostrar: $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$



$$I_{barra/o} = \frac{1}{3}\ m.L^2$$

Por hipótesis:

Realiza un M.A.S. entonces el que realiza el mov. armónico es la fuerza restauradora, por lo tanto el peso de la barra no se considera, luego:

$$\Sigma \tau_o = I_o . \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -(kL\theta)L = \frac{1}{3}\ ML^2.\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{3k}{M}\right)\theta = 0$$

Luego: $\omega^2 = \frac{3k}{m} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad$ l.q.q.d.

51. Una masa M está unida al extremo de una barra uniforme de masa M y longitud L que puede girar en su parte superior (Fig. P13.51). a) Determine las tensiones en la barra en el pivote y en el punto P cuando el sistema está estacionario. b) Calcule el periodo de oscilación para desplazamientos pequeños desde la posición de equilibrio, y determine este periodo para L = 2,00 m. (Sugerencia: Suponga que la masa en el extremo de la barra es una masa puntual y utilice la ecuación 13.25.)

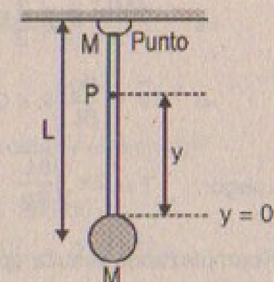
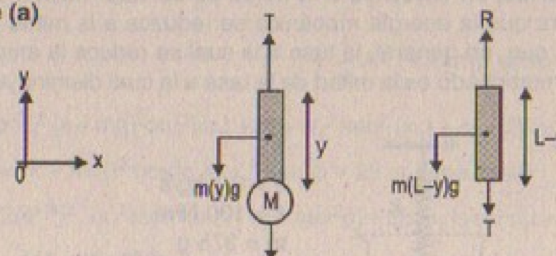


Figura P13.51

Resolución :

Parte (a)



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T - my(g) - Mg = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = Mg + my(g) \quad ...(1)$$

Sea λ = densidad lineal

$\Rightarrow \quad Mg + \lambda y.g = T$

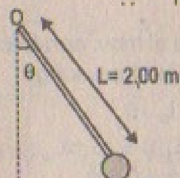
$\Rightarrow \quad Mg + \dfrac{M}{L}\,yg = T \qquad \therefore \qquad T = Mg\left(1+\dfrac{y}{L}\right)$

Por otro lado: $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R = T + m(L-y)\,.\,g$

$\Rightarrow \quad R = Mg + \dfrac{Mg\,y}{L} + \dfrac{M}{L}(L-y)g$

$\therefore \quad R = 2Mg$

Parte (b)



Nota: Para desplazamientos pequeños. $\operatorname{sen}\theta = \theta$

Entonces: $\Sigma\,\tau_o = I_o\,.\,\ddot{\theta}$ (sistema)

$\Rightarrow \quad -Mg\,\dfrac{L}{2}\operatorname{sen}\theta - Mg\,L\operatorname{sen}\theta = \left(\dfrac{1}{3}ML^2 + ML^2\right)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + \left(\dfrac{3}{2}MgL\right)\theta = 0$

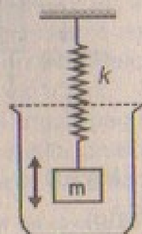
$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{9g}{8L}\right)\theta = 0$ (Ley del movimiento)

Luego: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{8L}{9g}} = \dfrac{4\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$

Reemplazando resulta que: T = 2,68 s

52. Considere un oscilador amortiguado, como el de la figura 13.16. Suponga que la masa es de 375 g, la constante de resorte igual a 100 N/m y b = 0,100 kg/s. a) ¿Cuánto tarda la amplitud en reducirse a la mitad de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo transcurre para que la energía mecánica se reduzca a la mitad de su valor inicial? c) Demuestre que, en general, la tasa a la cual se reduce la amplitud en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la tasa a la cual disminuye la energía mecánica.

Resolución :



b = 0,1 kg/s
k = 100 N/m
m = 375 g

Parte (a)

Ecuación diferencial para un mov. oscilatorio amortiguador: $-kx - b\dot{x} = m.\ddot{x}$

$\therefore \quad \ddot{x} + \dfrac{b}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Donde: $\beta = \dfrac{b}{2m} \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Luego: $x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}(\cos\omega_1 t + \phi)$

Por dato:
Inicialmente: la amplitud es A

$\Rightarrow \quad A.e^{-b/2m.t} = A/2 \quad \Rightarrow \quad t = -\dfrac{2m}{b}.\ln(0,5)$

Reemplazando: $t = \dfrac{-2(0,375)}{0,1}(-0,75) = 5,625$ s

Parte (b)

Sabemos que: $E_p(t) = \dfrac{1}{2}k(A.e^{-\beta t})^2 \quad \Rightarrow \quad E_K(t) = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$

$\Rightarrow \quad E_K(t) = \dfrac{1}{2}m(A.e^{-\beta t})^2\,.\,[\beta\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi)]^2$

$\Rightarrow \quad E_{M\ inicial} = E_p(t=0) + E_K(t=0)$

$\therefore \quad E_{Mecánica\ inicial} = \dfrac{1}{2}kA^2 + \dfrac{1}{2}mA^2.(\beta\cos(\phi) + \omega_1\operatorname{sen}(\phi))^2$

Sabemos primeramente que: $\omega_0^2 = 100/0,375 \approx 266,66$

$\beta^2 = (0,1)^2/4(0,375)^2 \approx 0,01777$

$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \approx \omega_0^2 \approx 266,6 \quad \therefore \quad \beta^2 \approx 0$

Por condición y dato: $\dfrac{1}{2}k(A.e^{-\beta t})^2 + \dfrac{1}{2}m(A.e^{-\beta t})^2\,[b\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi)]^2$

$= \dfrac{1}{4}A^2\left[k + m(\beta\cos\phi + \omega_1\operatorname{sen}\phi)^2\right]$

$\Rightarrow 2(e^{-\beta t})^2\,[k + m(\beta^2\cos^2(\omega_1 t + \phi) + \omega_1^2\operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \phi) + 2\beta.\omega_1\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi)\,.\,\cos(\omega_1 t + \phi))]$

$= k + m(\beta^2.\cos^2\phi + \omega_1^2\operatorname{sen}^2\phi + 2\beta.\omega_1\operatorname{sen}\phi.\cos\phi)$

$\Rightarrow m(2(e^{-\beta t})^2\,.\,\omega_1^2\,[\operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \phi) - \operatorname{sen}^2\phi] + 2\beta.\omega_1\,[\operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi).\cos(\omega_1 + \phi) - \operatorname{sen}\phi.\cos\phi]$

$= k(1 - 2(e^{-\beta t})^2)$

Entonces como $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ y aproximando $\dfrac{\beta}{\omega_1} \approx 0$

$\Rightarrow \quad 1 = 2.(e^{-\beta t})^2\,[1 + \omega_1(\operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \phi) - \operatorname{sen}^2\phi)]$

$$\therefore \quad (0,5)^{1/2} = e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \ln(0,707) = -\frac{b}{2m}\,.\,t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2\,(0,375)}{0,1}\ln(0,707) = t \qquad \therefore \quad t \approx 2,60$$

Parte (c)

Sabemos que: $A(t) = A.e^{-b/2m.t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = -\frac{b}{2m} A\, e^{-\frac{b}{2m}.t}$

Así también: $E_M(t) = \frac{1}{2} k\,(A.e^{-\beta t})^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}(t))^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,E_M}{dt} = -b.\dot{x}(t)^2 = -b[A^2(e^{-\beta t})^2\,(\beta\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi))^2]$$

Entonces: $-\beta.A.e^{-\beta t} = -\frac{1}{2}\, b\,[A^2.(e^{-\beta t})^2\,(\beta\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi))^2$

$$\Rightarrow \quad 2\beta = b.A(e^{-\beta t})\,(\beta\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\, \mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi))^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} = A.e^{-\beta t}\,(\beta\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\, \mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi))^2$$

Para que esto se cumpla $\beta = \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 0 \quad \therefore \quad k = 0$

53. La figura P13.53 muestra un pequeño disco delgado de radio r y masa m que está rígidamente unido a la cara de un segundo disco delgado de radio R y masa M. El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco grande, el cual está montado en su centro sobre un eje sin fricción. El arreglo se hace girar un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio y se suelta. a) Demuestre que la velocidad del centro del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es

$$v = 2\left[\frac{Rg\,(1-\cos\theta)}{(M/m)+(r/R)^2+2}\right]^{1/2}$$

b) Muestre que el periodo de movimiento es

$$T = 2\pi\left[\frac{(M+2m)R^2+mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$$

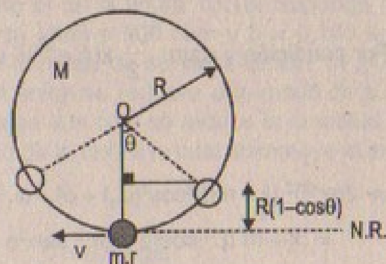


Figura P13.53

Resolución:

$$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2}\,MR^2$$

Parte (a)

Por conservación de energía: $E_{M\ inicial\ del\ sistema} = E_{M\ final\ del\ sistema}$

$$\Rightarrow \quad mgR\,(1-\cos\theta) = E_{rot\ (disco\ grande)} + E_{rot(disco\ peq.)} + E_{Trasl.\ (disco\ peq.)}$$

$$\Rightarrow \quad mgR\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right).\,\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right).\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,mv^2$$

$$\Rightarrow \quad 4mg\,R(1-\cos\theta) = M.v^2 + mr^2.\,\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}\,m.v^2$$

Luego: $v^2 = \dfrac{4\,gRm\,(1-\cos\theta)}{M+m\left(\frac{r}{R}\right)^2+2m} \qquad \therefore \quad v = 2\left[\dfrac{gR\,(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m}\right)+\left(\frac{r}{R}\right)^2+2}\right]^{1/2}$ l.q.q.d.

Parte (b) $\Sigma\,\tau_o = I_o\,.\,\ddot{\theta}$ (sistema)

$$\Rightarrow \quad -mg\,R\,\mathrm{sen}\theta = (\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}\,MR^2)\,\ddot{\theta}$$

Para desplazamientos angulares pequeños $\Rightarrow$ $\mathrm{sen}\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad -2mg\,R\theta = (mr^2 + mR^2 + MR^2)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{2mgR}{mr^2+MR^2+2mR^2}\,.\,\theta = 0\ (M.A.S.) \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgR}{mr^2+2mR^2+MR^2}}$$

Por lo tanto: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2\,(M+2m)+mr^2}{2mgR}}$ l.q.q.d.

54. Una masa m se conecta a dos resortes de constantes de fuerza k_1 y k_2, como muestran las figuras P13.54a y P13.54b. En cada caso la masa se mueve sobre una mesa sin fricción y se desplaza de la posición de equilibrio y se suelta. Demuestre que en cada caso la masa tiene movimiento armónico simple con periodos.

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,(k_1+k_2)}{k_1\,.\,k_2}}$

b) $T = 2\pi\,.\,\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

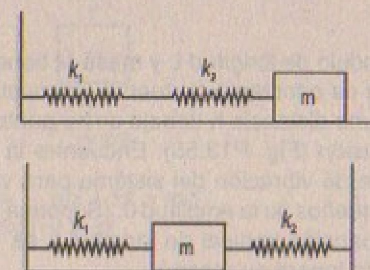
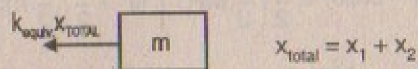


Figura P13.54

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,(k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}}$



$x_{total} = x_1 + x_2$

$$-\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{equiv.}} \Rightarrow k_{equiv.} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

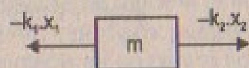
Luego: $-x_{total} \cdot \dfrac{(k_1 k_2)}{k_1 + k_2} = m \,.\, \ddot{x}_{total}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m\,(k_1 + k_2)} \,.\, x = 0 \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar: $T = 2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$



Nota: Si se elonga a la izquierda una cantidad «x» entonces se comprime a la derecha una cantidad «x»

Luego: $-k_1\,x - k_2\,x = m.\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x \qquad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Por consiguiente: $T = 2\pi \,.\, \sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$ l.q.q.d.

55. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte de constante de fuerza *k* conectado a él a una distancia h debajo de su punto de suspensión (Fig. P13.55). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud θ. (Suponga que la suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.)

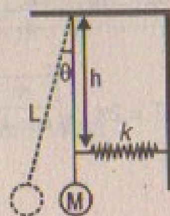
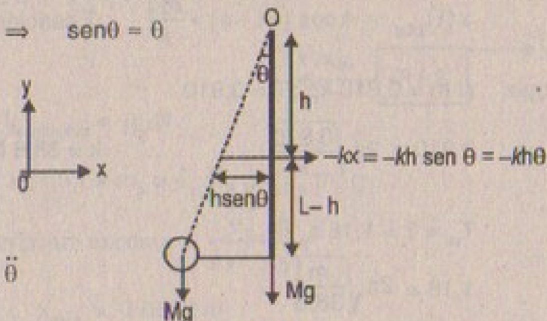


Figura P13.55

Resolución :

θ = pequeño ⇒ senθ = θ



$$\Sigma \tau_0 = I_0 \,.\, \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -Mg\,L\text{sen}\theta - kh\theta\,(h) = ML^2\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{MgL + kh^2}{ML^2}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}}$$

Luego: $f = 1/2\pi.\omega \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi} \times \sqrt{\dfrac{MgL + kh^2}{ML^2}}$

56. Una masa m oscila libremente en un resorte vertical (Fig. P13.56). Cuando m = 0,810 kg, el periodo es 0,910 s. Una masa desconocida en el mismo resorte tiene un periodo de 1,16 s. Determine a) la constante de resorte *k*, y b) la masa desconocida.

56.A Una masa m oscila libremente en un resorte vertical con un periodo T. (Fig. P13.56). Una masa desconocida m' en el mismo resorte tiene un periodo de T'. Determine a) la constante de resorte k, y b) la masa desconocida m'.

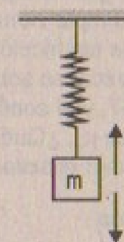
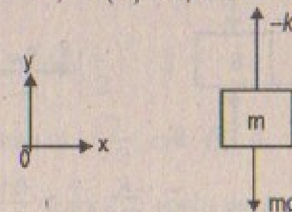


Figura P13.56

Resolución :

Datos: m = 0,810 kg ; T = 0,910 s
m = ? ; T(m) = 1,16 s

Parte (a)



$$mg - kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = mg$$

Luego: $x(t)_{total} = x_p(t) + A\cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{mg}{k} \qquad \text{ya que } -kx + mg = 0$$

Luego: $x(t)_{total} = A\cos(\omega t + \phi) + \dfrac{mg}{k}$ (Ecuación del movimiento)

Sabemos que: si m = 0,810 kg ; T = 0,910

$\Rightarrow \quad 0{,}910 = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}810}{k}} \qquad \therefore \quad k = 38{,}6\ \text{N/m}$

Parte (b)

Por dato $T_m = ? = 1{,}16$ s

Entonces: $1{,}16 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{38{,}6}}$

$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{1{,}16}{2\pi}\right)^2 38{,}6 = m \qquad \therefore \quad m = 1{,}32\ \text{kg}$

57. Un gran bloque P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal deslizándose sobre una superficie sin fricción con una frecuencia f = 1,5 Hz. Un bloque B descansa sobre él, como se ilustra en la figura P13.57, y el coeficiente de fricción estático entre los dos es $\mu_e = 0{,}60$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque no se desliza?

57A. Un gran bloque P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal deslizándose sobre una superficie sin fricción con una frecuencia f. Un bloque B descansa sobre él, como se ilustra en la figura P13.57, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_e. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque no se desliza?

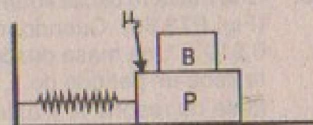


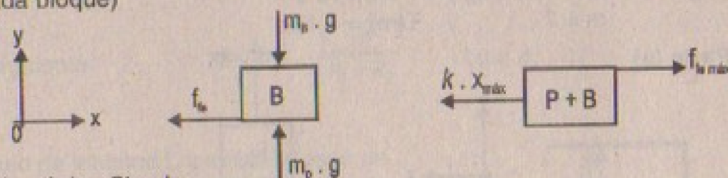
Figura P13.57

Resolución:

Considerar: $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Datos: $f = 1{,}5$ Hz ; $\mu_e = 0{,}6$

D.C.L. (cada bloque)



Por Mov. Armónico Simple

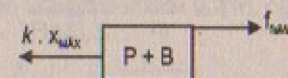
$-kx = m_p\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m_p}x = 0$

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_p}}$

Por otro lado: $f = 1{,}5 = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_p}}$

$\Rightarrow \quad k = 4\pi^2 \times (1{,}5)^2\, m_p \quad \dots (1)$

Luego:



$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad k.x_{máx} = f_{fe\ máxima} = \mu_e.N$

$\Rightarrow \quad x_{máx}\, 4\pi^2 \times (1{,}5)^2 \times m_p = \mu_e.m_B\, g = \mu_e.m_p\, g$

$\Rightarrow \quad x_{máx} = \text{Amplitud máxima} = \dfrac{\mu_e \cdot g}{4\pi^2(1{,}5)^2}$

$\therefore \quad x_{máx} = 0{,}0662\ \text{m}$

58. Una barra larga y delgada de masa M y longitud L oscila alrededor de su centro sobre un cilindro de radio R (Fig. P13.58). Demuestre que desplazamientos pequeños originan movimiento armónico simple con un periodo $\pi L/\sqrt{3gR}$.

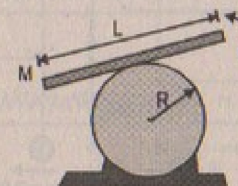
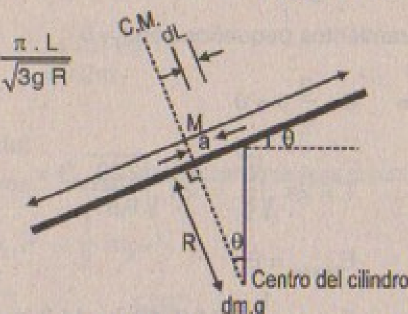


Figura P13.58

Resolución:

Por demostrar: $T = \dfrac{\pi . L}{\sqrt{3g\,R}}$

Sea la figura:



Tenemos que:

La fuerza que produce el movimiento armónico es el peso de la mitad de la barra con respecto del CM de la barra total; luego:

$\Sigma\tau_{CM} = I_{CM} . \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -dm . g\cos\theta . a = \dfrac{1}{3}dm\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 . \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -dm . g. \cos\theta . (R\tan\theta) = \dfrac{1}{12} . dm . L^2 . \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -g . \cos\theta . R . \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{12} . L^2.\ddot{\theta}$; para desplazamientos pequeños $\text{sen}\,\theta \approx 0$

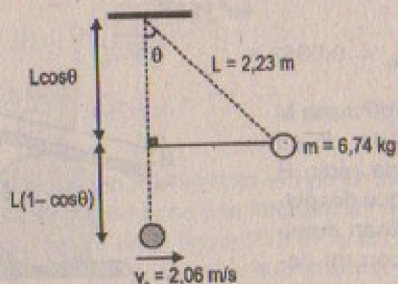
$\Rightarrow \quad \dfrac{L^2}{12} . \ddot{\theta} + R . g\,\theta = 0$

$\therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{12Rg}{L^2}\right)\theta = 0$ M.A.S. $\quad \therefore \quad \omega = \dfrac{2\sqrt{3gR}}{L}$

Luego: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.L}{2\sqrt{3gR}}$ $\therefore$ $T = \frac{\pi.L}{\sqrt{3gR}}$ l.q.q.d.

59. A un péndulo simple que tiene una longitud de 2,23 m y una masa de 6,74 kg se le imprime una velocidad inicial de 2,06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple y determine, a) su periodo, b) su energía total, y c) su máximo desplazamiento angular.

Resolución :



Considerar: g: 9,81 m/s^2

Parte (a) $-mg\,L\text{sen}\theta = mL^2\ddot{\theta}$

Para desplazamientos pequeños $\text{sen}\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\theta = 0 \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Luego: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}23}{9{,}81}}$ $\therefore$ $T = 2{,}995$ s

Parte (b) $E_{M\,total} = E_K$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2}(6{,}74)(2{,}06)^2 = 14{,}3 \text{ joules}$$

Parte (c)

Por energía: $14{,}3 = mgL(1 - \cos\theta)$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 1 - \frac{14{,}3}{mg\,L}$

$$\therefore \quad \cos\theta = 0{,}9 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0{,}9)$$

Como: $1\text{rad} = \frac{360°}{2\pi}$

$$\Rightarrow \quad \theta = [\cos^{-1}(0{,}9)]\,\frac{1 \text{ rad}}{\frac{360°}{2\pi}} \text{ (calculadora)}$$

$$\therefore \quad \theta = 0{,}441 \text{ rad}$$

60. La figura P13.60a muestra una masa, m_1 = 9,0 kg, que está en equilibrio mientras se encuentra conectada a un resorte ligero de constante k = 100 N/m y, que a su vez

está unido a una pared. Una segunda masa, m_2 = 7,0 kg, se empuja lentamente contra la masa m_1, comprimiendo el resorte en la cantidad A = 0,2 m, como muestra la figura P13.60b. El sistema se suelta después, lo que ocasiona que las dos masas se muevan hacia la derecha sobre la superficie sin fricción. a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (Fig. P13.60c) y se mueve hacia la derecha con velocidad v. Determine el valor de v. b) ¿Cuánto se separan las masas cuando el resorte está completamente estirado por primera ocasión (D en la figura P13.60d)? (Sugerencia: Determine primero el periodo de oscilación y la amplitud del sistema m_1-resorte después de que m_2 pierde el contacto con m_1.)

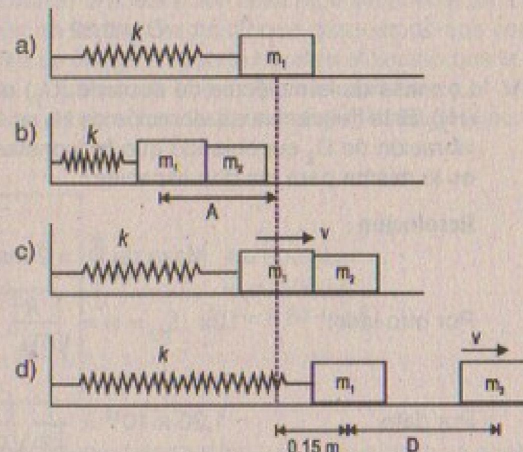


Figura P13.60

Resolución :

Datos: m_1 = 9,0 kg ; m_2 = 7,0 kg
k = 100 N/m ; A = 0,2m

Parte (a)

Por conservación de energía:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final} \quad \text{(Justo cuando se llega al punto de equilibrio)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(A)^2 = \frac{1}{2}m_1.v^2 + \frac{1}{2}m_2.v^2$$

$$\Rightarrow \quad v = A\,.\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = (0{,}2)\,.\sqrt{\frac{100}{16}}$$

$$\therefore \quad v = 0{,}5 \text{ m/s} = v_{(m_1)} = v_{(m_2)}$$

Parte (b)

Cuando «m_2» se separa en el P.E. de «m_1», «m_1» recorrerá un determinado desplazamiento hasta alcanzar la amplitud máxima, luego:

$$E_{M(m_1)} \text{ en el P.E.} = \frac{1}{2}k.x^2_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}k.x^2_{máx} \qquad \therefore \quad x_{máx} = 0{,}15 \text{ m}$$

El tiempo que emplea «m_1» en alcanzar su amplitud máxima desde el punto de equilibrio, va a ser igual al tiempo en que «m_2» recorrerá (0,15 + D),entonces:

$$t_{(m_1)} = \frac{T_{(m_1)}}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \pi\sqrt{\frac{9}{100}} = 0{,}94 \text{ s}$$

En consecuencia: $v_{(m2)} \times (0{,}94) = 0{,}15 + D$

$\Rightarrow \quad (0{,}5)\,(0{,}94) = 0{,}15 + D$

$\therefore \quad D = 0{,}32$ m

61. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula del hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración de H_2 es $1{,}30 \times 10^{14}$ Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración de D_2 suponiendo que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos especies?

Resolución:

Masa de D_2 = 2 masa del H_2

Por otro lado: $2\pi \cdot f_{H_2} = \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}} \quad \Rightarrow \quad f_{H_2} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}}$

Por dato: $1{,}30 \times 10^{14} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}}$

$\Rightarrow \quad k = 4\pi^2\,(1{,}3 \times 10^{14})^2\, m_{H_2} \qquad \ldots (1)$

Luego: $f_{D_2} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4\pi^2 \times (1{,}3 \times 10^{14})^2 \cdot m_{H_2}}{2\, m_{H_2}}}$

$\therefore \quad f_{D_2} = 9{,}19 \times 10^{13}$ Hz

62. Demuestre que si un péndulo de torsión se tuerce un ángulo y después se mantiene en esa condición la energía potencial es $U = 1/2k\theta^2$.

Resolución:

Sabemos que: $-k.\theta = I_o . \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{I}}$

Por otro lado: $\omega.T = 2\pi.\theta \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{4\pi^2.\theta^2}{T^2}$

Como: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{I}{k}$

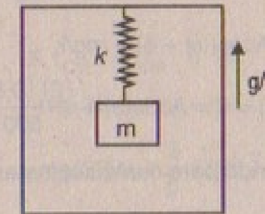
Luego: $\tau = k\theta \quad \Rightarrow \quad k\theta d\theta = \dfrac{1}{2}\, I \,.\, \omega^2$ (por trabajo)

$\Rightarrow \quad E_{K\,rot} = E_p = \dfrac{1}{2} I . \left(\dfrac{4\pi^2 \times \theta^2}{4\pi^2 \times \dfrac{I}{k}} \right)$

$\therefore \quad E_p = \dfrac{1}{2}\, k.\theta^2$ l.q.q.d.

63. Un bloque de 2,00 kg cuelga sin vibrar en el extremo de un resorte (k = 500 N/m) que está unido al techo de la caja de un elevador. La caja está ascendiendo con una aceleración hacia arriba de g/3 cuando la aceleración cesa repentinamente (en t = 0). a) ¿Cuál es la frecuencia angular de oscilación del bloque después de que cesa la aceleración? b) ¿En qué cantidad se alarga el resorte durante el tiempo que la caja del elevador está acelerando? c) ¿Cuáles son la amplitud de oscilación y el ángulo de fase inicial observados por una persona que viaja en la caja? Considere positiva la dirección hacia arriba.

Resolución:



k = 500 N/m
m = 2,00 kg
g = 9,81 m/s²

Parte (a)

Cuando cesa: el bloque experimenta una deformación «x» ya que para un observador fuera del elevador se cumple que:

kx
y
x
0
m
g/3 = a = 0
mg

$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = m.a$

$\Rightarrow \quad kx - mg = m\left(\dfrac{g}{3}\right) = m(0)$ cesa

$\therefore \quad x = \dfrac{mg}{k}$

Donde x = la máxima amplitud del resorte cuando cesa el elevador.

Luego: $x = \dfrac{(2)\,(9{,}81)}{500} = 0{,}03924$ m

Por otro lado:

El bloque realiza un mov. armónico simple puesto que:

$-kx + mg = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = mg$

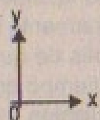
Donde: $x(t) = x_{particular}(t) + x_{homog}(t)$

Pero: $x_p(t) = mg/k \qquad \therefore \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + mg/k$

Luego: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

En consecuencia: $\omega = \sqrt{\dfrac{500}{2}} \approx 15{,}8$ rad/s

Parte (b)



Sabemos que: $\Sigma F_y = m.a$

$\Rightarrow \quad kx - mg = m(g/3)$

$\Rightarrow \quad kx = \dfrac{4}{3}\ m.g$

Obs. fuera

$\therefore \quad x = \dfrac{4mg}{3k} = \dfrac{4(2)\,(9{,}81)}{3\,(500)} = 0{,}0523\ m$

Parte (c)

Para una persona dentro: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + mg/k$

$x(t=0) = 0 = A\cos(\phi) + \dfrac{(2)\,(9{,}81)}{500}$

Pero cuando el ascensor está viajando para cualquier instante de tiempo,se cumple que:

$x(t) = 0{,}0523 = A\cos(\omega t + \phi) + 0{,}03924$

$\therefore \quad 0{,}013 = A\cos(\omega t + \phi) \qquad ...(\alpha)$

Por otro lado: el observador dentro observa que el bloque no oscila, ni se mueve en consecuencia tendrá una velocidad relativa = 0

Entonces: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) = 0$

$\Rightarrow \quad v(t=0) = -A\,\omega\mathrm{sen}(\phi) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\phi) = 0 \qquad \therefore \quad \phi = \pi\ rad$

Luego: De (α) para t = 0 condiciones iniciales

$0{,}013 = A\cos(\pi) \qquad \therefore \quad A = 0{,}013\ m$

64. Una esfera sólida (radio = R) rueda sin deslizar en un canal cilíndrico (radio = 5R) como se indica en la figura P13.64. Demuestre que, para pequeños desplazamientos desde el punto de equilibrio perpendicular a la longitud del canal, la esfera ejecuta un movimiento armónico simple con un período

$T = 2\pi.\sqrt{\dfrac{28R}{5g}}$

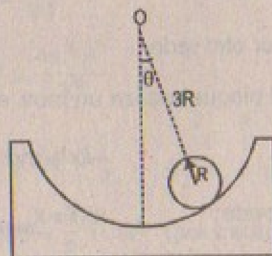
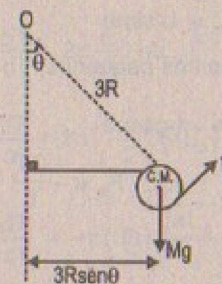


Figura P13.64

Resolución:

Por demostrar: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{28R}{5g}}$



$I_{CM\ esfera} = 2/5MR^2$

Nota: Para desplazamientos pequeños $\mathrm{sen}\theta \approx \theta$

Sabemos que: $\Sigma\,\tau_{CM} = I_{CM}\,.\,\ddot{\theta} \Rightarrow \quad f_r = \dfrac{2}{5}\ MR^2.\ddot{\theta}$

Por otro lado: $-mg(3R\ \mathrm{sen}\theta) - f_r = I_o.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -mg(3R)\theta = \dfrac{2}{5}\ MR^2.\ddot{\theta} + \left[\dfrac{2}{5}MR^2 + M\,(4R)^2\right]\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -\theta.gR = \ddot{\theta}\left(\dfrac{28R^2}{5}\right)$

$\therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{5g}{28R}\right)\theta = 0$ (Ecuación diferencial del M.A.S.)

En consecuencia: $T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{28\,R}{5\,g}}$ l.q.q.d.

65. Una masa m está conectada a dos ligas de hule de longitud L, cada una bajo una tensión T, como en la figura P13.65. La masa se desplaza verticalmente una pequeña distancia "y". Suponga que la tensión no cambia, demuestre que a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)$ y b) que el sistema efectúa movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$

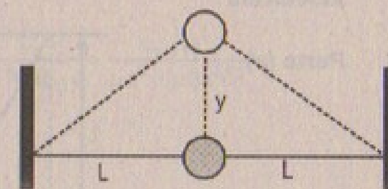
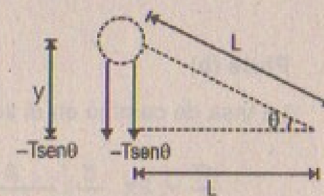


Figura P13.65

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar: $F_R = -\dfrac{2T}{L}$



a) Por analogía en un resorte $F_R = -kx = -ky$

$\Rightarrow \quad F_R = -2T\ \mathrm{sen}\theta\ .\ y \qquad ...(1)$

Pero según el triángulo rectángulo: $y \approx \theta L \approx L\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad F_R = -2Ty\theta \quad \text{(desplazamientos pequeños)}$$

b) Por analogía para un péndulo $F_R = -mg\theta = -mg\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad F_R = -2T \cdot \frac{\theta L}{L} \ \text{(componente)} \qquad \therefore \quad F_R = -\frac{2T}{L} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por movimiento armónico simple $-\dfrac{2T}{L} \cdot y = m.\ddot{y}$

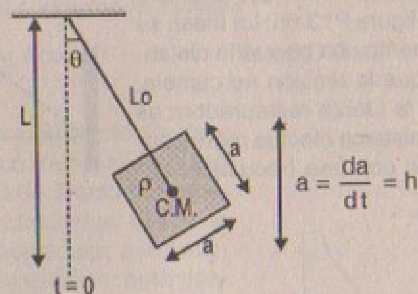
$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2T}{mL} \cdot y = 0 \quad \text{(ecuación diferencial)}$$

Entonces: $$\omega = \sqrt{\frac{2T}{mL}}$$

66. Un recipiente cúbico ligero de volumen a^3 al principio está lleno de un líquido de densidad de masa ρ. El cubo está soportado inicialmente, por una cuerda ligera y forma un péndulo de longitud L_0 medida desde el centro de masa del recipiente lleno. Se deja que el líquido fluya desde el fondo del recipiente a una tasa constante (dM/dt). En cualquier tiempo t, el nivel de fluido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida en relación con el centro de masa instantáneo). a) Dibuje el aparato y denote las dimensiones a, h, L_0 y L. b) Encuentre la tasa de cambio en el tiempo del periodo como una función del tiempo t. c) Encuentre el periodo como una función del tiempo.

Resolución :

Parte (a)



Vista frontal del cubo

Parte (b)

La tasa de cambio en el tiempo será:

$$\frac{dT}{dt} = 2\pi \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{a\,L_o}{g\,(a+3ht)}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = 2\pi\frac{d}{dt}\left[(aL_o)^{1/2}(g)^{-1/2}(a+3ht)^{-1/2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)(aL_o)^{1/2}(g)^{-1/2}(a+3ht)^{-3/2}.(3h)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -\pi(3h)\sqrt{\frac{aL_o}{g}}\sqrt{\frac{1}{(a+3ht)^3}}$$

Parte (c)

Por dato: $\dfrac{dM}{dt} = \text{cte} \ \Rightarrow \ dM = k\,dt$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_i=M_i}^{t_f=M_f} dM = k\int_{t_i}^{t_f} dt$$

$$\Rightarrow \quad M(t) = M_{inicial} + kt \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado: $M_{inicial} = \rho.a^3$

Como: $$\frac{dM}{dt} = k = \rho \cdot \frac{dV}{dt} = \rho.3a^2.\frac{da}{dt} = \rho 3a^2 h$$

Por lo tanto de (1) $$M(t) = \rho a^3 + \rho 3a^2 ht$$

Así también: $$\frac{d}{dt}C.M_{inst} = L(t) = \frac{L_o}{d\,M_{total(t)}} = \frac{L_o\,\rho a^3}{\rho a^3 + \rho 3a^2 ht}$$

Luego: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L(t)}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\left(\frac{L_o \rho a^3}{g\rho\left(a^3 + 3a^2ht\right)}\right)^{1/2} = 2\pi \cdot \left(\frac{a\,L_o}{g(a+3ht)}\right)^{1/2}$$

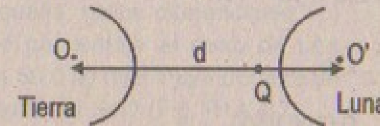
Capítulo 14

LA LEY DE LA GRAVEDAD

LEY DE LA GRAVEDAD DE NEWTON : MEDIDA DE LA CONSTANTE GRAVITACIONAL PESO Y FUERZA GRAVITACIONAL

1. En su trayecto a la Luna los astronautas del Apolo alcanzaron un punto donde la atracción gravitacional de la Luna es más intensa que la de la Tierra. a) Determine la distancia de este punto desde el centro de la Tierra. b) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad terrestre en este punto?

Resolución :



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$

$M_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

$T_{Tierra} = 3{,}156 \times 10^7$ s

$T_{Luna} = 2{,}36 \times 10^6$ s

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2_{Luna} = \dfrac{4\pi^2}{G \,.\, M_{Tierra}} \,.\, d^3$

$$\Rightarrow \quad (2{,}36 \times 10^6)^2 = \frac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}\times d^3 \qquad \therefore \quad d = 3{,}84 \times 10^8 \text{ m}$$

Luego: $\dfrac{G.M_T}{x^2} = \dfrac{G \,.\, M_L}{(d-x)^2} \;\Rightarrow\; 5{,}98 \times 10^{24}\,(3{,}84 \times 10^8 - x)^2 = 7{,}36 \times 10^{22}\,(x)^2$

$$\therefore \quad x = 3{,}46 \times 10^8 \text{ m}$$

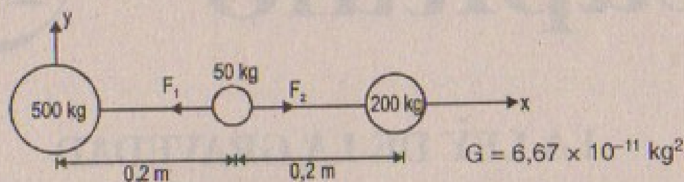
Parte (b)

$$g = \frac{M_T \,.\, G}{(3{,}46\times10^8)^2} \;\Rightarrow\; g = \frac{(5{,}98\times10^{24})(6{,}67\times10^{-11})}{(3{,}46\times10^8)^2}$$

$$\therefore \quad g = 3{,}34 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

2. Una masa de 200 kg y una de 500 kg están separadas por 0,400 m. a) Encuentre la fuerza gravitacional neta ejercida por las masas sobre una masa de 50,0 kg situada a la mitad entre ellas. b) ¿En qué posición (aparte de las infinitamente remotas) la masa de 50,0 kg experimenta una fuerza neta igual a cero?

Resolución :



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ kg²

Parte (a) $\vec{F}_1 = \dfrac{G\,(50)(500)}{(0{,}2)^2}\left(-\hat{i}\right) \Rightarrow F_1 = -G \times 625 \times 10^3\hat{i}$

$\vec{F}_2 = \dfrac{G(50)(200)}{(0{,}2)^2}\left(\hat{i}\right) \Rightarrow F_2 = G \times 25 \times 10^4\hat{i}$

$\therefore\ F_{neta} = -2{,}5 \times 10^{-17}\hat{i}$ N

Parte (b) Como $F_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

Entonces: $\dfrac{G\,(200)(50)}{x^2} = \dfrac{G(500)(50)}{(x-d)^2}$

Por lo tanto: $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{200}{500}}}$

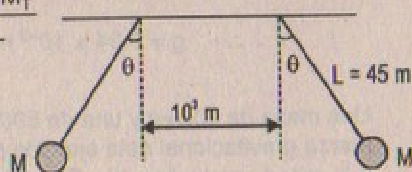
(posición general para cualquier distancia de separación)

3. Un estudiante propone medir la constante gravitacional G, suspendiendo dos masas esféricas desde el techo de una alta catedral y midiendo la desviación respecto de la vertical. Si las dos masas, de 100 kg, se suspenden en el extremo de cables de 45,00 m de largo, y los cables se pegan en el techo separados por una distancia de 1 000 m, ¿cuál es la separación de las masas?

Resolución :

Se cumple que: $2L\text{sen}\theta + x = 10^3$

Por otro lado: $v^2 = 2gL\,(1-\cos\theta) = \dfrac{G\,.\,M_T}{L}$



$\Rightarrow\quad \cos\theta = 1 - \dfrac{R_T^2}{2L^2}$

Entonces: $1-\text{sen}^2\theta = \left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2 \Rightarrow 1-\left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2 = \text{sen}^2\theta$

Luego: $x = 10^3 - 2L\sqrt{1-\left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2}$

Reemplazando: $x = 1 - 63{,}3 \times 10^{-9}$ m

4. a) Determine el cambio y el cambio fraccional en la fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre una mujer de 50,0 kg parada sobre el ecuador a mediodía y a medianoche. (Sugerencia: Como Δr es muy pequeña, utilice diferenciales.) b) ¿En qué porcentaje el peso de una mujer de 50,0 kg disminuye durante un eclipse total del Sol? (Fig. P14.4)?

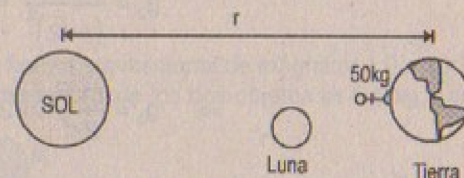


Figura P14.4

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $r = 1{,}496 \times 10^{11}$ m y $M_{sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg

$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Por la tercera ley de Kepler:

(1) $T^2_{Tierra} = \dfrac{4\pi^2}{G\,.\,M_{Sol}} \times r_1^3$ (medianoche)

(2) $\left(\dfrac{T_{Tierra}}{2}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2}{G_{MSol}} \times r_2^3$ (mediodía) $\Rightarrow \dfrac{(1)}{(2)}$ Resulta que: $r_1 = \sqrt[3]{4}\,r_2 = r$

Luego: $F_{medianoche} = \dfrac{G.M_{Sol} \times M_T}{2 \times r^2}$ $\therefore\ \Delta F = \dfrac{G.M_{Sol} \times M_T}{2r^2} = 1{,}77 \times 10^{22}$ N

$F_{mediodía} = \dfrac{G.M_{Sol} \times M_T}{r^2}$

Parte (b)

Datos incorrectos.

5. Tres masas iguales son colocadas en tres esquinas de un cuadrado de longitud de borde ℓ como en la figura P14.5. Encuentre este campo gravitacional g en la cuarta esquina debida a estas masas.

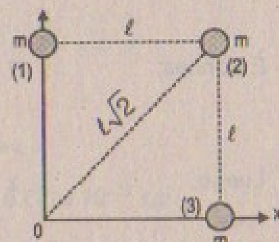


Figura P14.5

Resolución:

$$g_2 = \frac{m.G}{(\ell\sqrt{2})^2} = \frac{m.G}{2\ell^2}$$

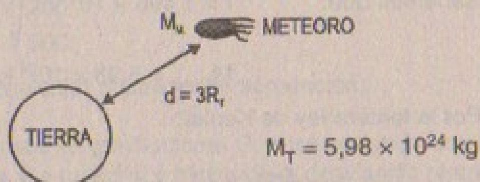
$$\Rightarrow \quad g_3 = \frac{m.G}{2\ell^2}.\sqrt{2} \quad \wedge \quad g_1 = \frac{G.m}{2\ell^2}\times\sqrt{2}$$

En consecuencia: $g_{\text{campo grav.}} = (g_1 + g_3) + g_2$

$$\Rightarrow \quad g_{\text{campo gravitacional}} = G\times\frac{m}{\ell^2}\frac{(2\sqrt{2}+1)}{2}$$

6. Cuando un meteoro que cae está a una distancia $d = 3R_T$ sobre la superficie terrestre, ¿cuál es su aceleración en caída libre?

Resolución:



$R_T = 6{,}37\times10^6$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

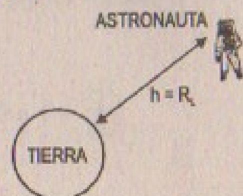
$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$$\Rightarrow \quad M_M.g = \frac{M_M.M_T.G}{(d+R_T)^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{5{,}98\times10^{24}\times(6{,}67\times10^{-11})}{[4(6{,}37\times10^6)]^2}$$

$$\therefore \quad g = 0{,}61\ \text{m/s}^2$$

7. Un astronauta pesa 140 N sobre la superficie de la Luna. Cuando se encuentra en una órbita circular alrededor de la Luna a una altitud $h = R_1$, ¿qué fuerza gravitacional ejerce la Luna sobre él?

Resolución:



$W_{\text{astron.}} = 140$ N

$M_{\text{Luna}} = 7{,}36\times10^{22}$ kg

$R_{\text{Luna}} = 1{,}74\times10^6$ m

Sabemos que: $$140\ \text{N} = \frac{M_{ast}M_{Luna}.G}{(R_{Luna})^2}$$

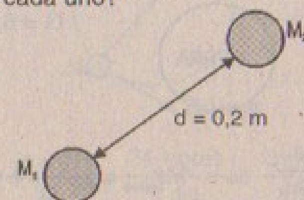
Por otro lado: Nos piden $$F_g = \frac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{(R_{Luna}+h)^2} = \frac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{(2R_{Luna})^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{1}{4}\left[\frac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{R^2_{Luna}}\right]$$

$$\therefore \quad F_g = \frac{1}{4}(140) = 35\ \text{N (hacia la luna)}$$

8. Dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de magnitud $1{,}0\times10^{-8}$ N cuando están separados 20 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5,0 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

Resolución:



$F_g = 1{,}0\times10^{-8}$ N

$M_1 + M_2 = 5$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Por dato: $M_1 + M_2 = 5$ kg

Por otro lado: $1{,}0\times10^{-8} = G.\dfrac{M_1\times M_2}{(0{,}2)^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1{,}0\times10^{-8}\times(0{,}2)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = M_1\times(5-M_1)$$

Entonces resolviendo la ecuación resulta que:

Si: $M_1 = 3$ kg $\Rightarrow$ $M_2 = 2$ kg

Si: $M_1 = 2$ kg $\Rightarrow$ $M_2 = 3$ kg

Tiene dos soluciones

9. Si la masa de Marte es $0{,}107\ M_T$ y su radio es $0{,}53\ R_T$, calcule el campo gravitacional g en la superficie de Marte.

Resolución:



$R_{Marte} = 0{,}53\ R_T$

$M_{Marte} = 0{,}107\ M_T$

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$R_T = 6{,}37\times10^6$ m

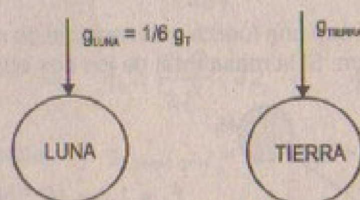
$$F_g = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2}$$

$$\Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{(0{,}107\ M_{Tierra})}{(0{,}53 \times R_{Tierra})^2} \Rightarrow g = (6{,}67 \times 10^{-11}) \times \frac{(0{,}107)(5{,}98 \times 10^{24})}{(0{,}53)^2 \times (6{,}37 \times 10^6)^2}$$

$$\therefore \quad g = 3{,}74\ m/s^2$$

10. La aceleración en caída libre sobre la superficie de la Luna es aproximadamente 1/6 que la de sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Luna es más o menos 0,25 R_T, calcule la razón de sus densidades, $\rho_{luna}/\rho_{tierra}$

Resolución:



$$R_{Luna} = 0{,}25\ R_T$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$$

Sabemos que: $g_{Tierra} = G.\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_{Tierra} = \frac{R_T^2 \times g_T}{G}$

Además: $g_{Luna} = G.\frac{M_{Luna}}{R_L^2} \Rightarrow g_{Luna} = \frac{1}{6} g_T = G.\frac{M_{Luna}}{(0.25\ R_T)^2}$

$$\Rightarrow \quad M_{Luna} = \frac{1}{96} \cdot g_T \cdot \frac{R_T^2}{G}$$

Luego: $\frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{\frac{M_{Luna}}{\text{Volumen de la luna}}}{\frac{M_{Tierra}}{\text{Vol. Tierra}}} = \frac{\frac{\frac{g_T \cdot R_T^2}{96 \cdot G}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (R_L)^3}}{\frac{g_T \cdot R_T^2/G}{4/3\,\pi R_T^3}}$

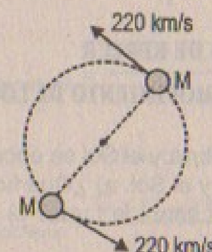
Entonces: $\frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{\frac{1}{96 R_L^3}}{\frac{1}{R_T^3}} = \frac{\frac{1}{96 (0{,}25\ R_T)^3}}{\frac{1}{R_T^3}}$

$$\therefore \quad \frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

11. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales (Fig. P14.11). Si la velocidad orbital de cada estrella es de 220 km/s y el periodo orbital de cada una es de 14,4 días, calcule la masa M de cada estrella. (Por comparación, la masa de nuestro Sol es 2 × 10^{30} kg.)

11A. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales (Fig. P14.11). Si la velocidad orbital de cada estrella es v y el período orbital de cada una es T, calcule la masa M de cada estrella.

Resolución:



$$T_M = 14{,}4\ \text{días}$$

$$M_{Sol} = 2 \times 10^{30}\ kg$$

$$T = 14{,}4\ \text{días} \times \frac{24\ \text{horas}}{1\ \text{dia}} \times \frac{3\ 600\ s}{1\ \text{hora}} = 1{,}24 \times 10^6\ s$$

Por otro lado: $r = \frac{v.T}{2\pi} = \frac{(22 \times 10^4)(1{,}24 \times 10^6)}{2\ (3{,}1416)} \quad \therefore \quad r = 4{,}34 \times 10^{10}\ m$

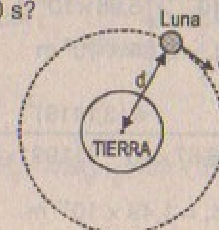
Entonces por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_p} \times r^3$

$$\Rightarrow \quad M_p = \frac{4(3{,}1416)^2 (4{,}34 \times 10^{10})^3}{(1{,}24 \times 10^6)(6{,}67 \times 10^{-11})} \quad \therefore \quad M_p = 3{,}15 \times 10^{31}\ kg$$

En consecuencia: Luego M será: 1,6 × 10^{31} kg

12. La Luna está a 384 400 km del centro de la Tierra y completa una órbita en 27,3 días. a) Determine la velocidad orbital de la Luna. b) ¿Qué distancia «cae» la Luna hacia la Tierra en 1,00 s?

Resolución:



$$T_{Luna} = 27{,}3\ \text{dias}$$

$$d \doteq 384\ 400\ km$$

Parte (a) Sabemos que: $T = \frac{2\pi . R}{v}$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2\pi . R}{T} = \frac{2\,(3{,}1416)(384\,400)}{27{,}3 \text{ dias}} \times \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ horas}} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$$

$$\therefore \quad v = 1{,}02 \text{ km/s}$$

Parte (b)
Sabemos que: $v.T = s$

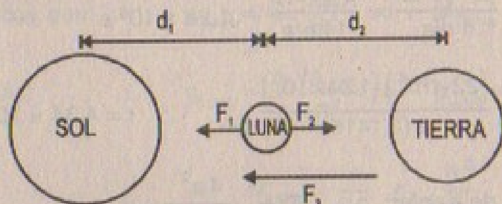
$$\Rightarrow \quad 1{,}02\ \frac{km}{s} \times 1s = 1{,}02 \text{ km}$$

LAS LEYES DE KEPLER

LA LEY DE LA GRAVEDAD Y EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

13. Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con el satélite terrestre entre la Tierra y el Sol. a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra?

Resolución :



$T_{Luna} = 2{,}36 \times 10^6$ s
$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$M_{Luna} = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²
$T_{Tierra} = 3{,}156 \times 10^7$ s

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2_{Luna} = \frac{4\pi^2}{G \,.\, M_{Tierra}} \times (d_2)^3$ ... (1)

$$T^2_{Tierra} = \frac{4\pi^2}{G \,.\, M_{Sol}} (d_1 + d_2)^3 \text{ ... (2)}$$

De (1): $(2{,}36 \times 10^6)^2 = \frac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})\,(5{,}98\times10^{24})} \cdot d_2^3$

$$\therefore \quad d_2 = 3{,}84 \times 10^8 \text{ m}$$

Luego de (2) $(3{,}156 \times 10^7)^2 = \frac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})\,(1{,}991\times10^{30})} \times (d_1 + 3{,}84 \times 10^8)^3$

$$\therefore \quad d_1 = 1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}$$

Entonces: $F_{Sol/Luna} = \frac{G \times M_{Sol} \times M_{Luna}}{d_1^2}$

$$\Rightarrow \quad F_{Sol/Luna} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})(7{,}36\times10^{22})}{(1{,}49\times10^{11})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Sol/Luna} = 4{,}39 \times 10^{20} \text{ N}$$

Parte (b) $F_{Tierra/Luna} = \frac{G.\, M_L \,.\, M_T}{d_2^2}$

$$\Rightarrow \quad F_{Tierra/Luna} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times(7{,}36\times10^{22})(5{,}98\times10^{24})}{(3{,}84\times10^{8})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Tierra/Luna} = 1{,}99 \times 10^{20} \text{ N}$$

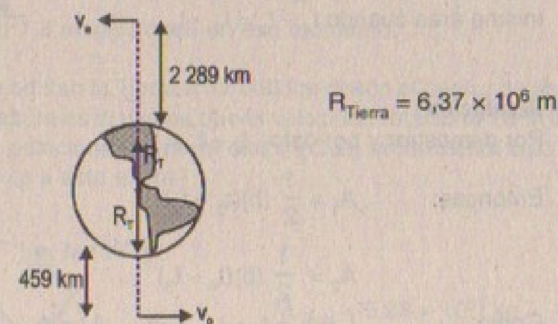
Parte (c) $F_{Sol/Tierra} = \frac{G \times M_{sol} \times M_{tierra}}{(d_1 + d_2)^2}$

$$F_{Sol/Tierra} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})(5{,}98\times10^{24})}{(1{,}49\times10^{11})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Sol/Tierra} = 3{,}55 \times 10^{22} \text{ N}$$

14. El satélite Explorer VIII, puesto en órbita el 3 de noviembre de 1960 para investigar la ionosfera, tenía los siguientes parámetros orbitales: perigeo, 459 km, y apogeo, 2 289 km (las dos distancias sobre la superficie de la Tierra); periodo, 112,7 min. Calcule la razón v_p/v_a.

Resolución :



$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Por la conservación del momento angular:

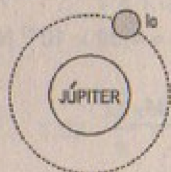
$$L_o = L_f$$

$$\Rightarrow \quad M_s.v_o.(2\,289 + R_T) = M_s.v_p(459 + R_T)$$

$$\therefore \ \frac{v_p}{v_a} = \frac{2\,289 + R_{Tierra}}{459 + R_{Tierra}} = \frac{8{,}659\times10^6}{6{,}829\times10^6} = \frac{8{,}659}{6{,}829}$$

15. Io, una pequeña Luna de Júpiter, tiene un periodo orbital de 1,77 días y un radio orbital de $4{,}22 \times 10^5$ km. De acuerdo con estos datos, determine la masa de Júpiter.

Resolución :



T = 1,77 días

Radio = $4{,}22 \times 10^5$ km

G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley: $\quad T^2 = \frac{4\,.\,\pi^2}{G\,.\,M_J}\,.\,r^3 \qquad M_{Júp} = \frac{4\,.\,\pi^2}{G\,.\,T^2}\times r^3$

$$T = 1{,}77 \text{ días} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}}\times\frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1{,}53\times10^5$$

Luego: $\quad M_{Jup} = \frac{4(3{,}1416)^2}{6{,}67\times10^{-11}}\times\frac{(4{,}22\times10^8)^3}{(1{,}53\times10^5)^2} \qquad \therefore \quad M_{Júp} = 1{,}9\times10^{27}$ kg

16. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad constante en la dirección x una distancia b de dicho eje (Fig. P14.16). Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface mostrando que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

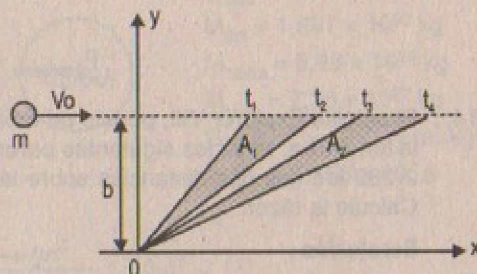


Figura P14.16

Resolución :

Por demostrar y por dato $\quad t_4 - t_3 = t_2 - t_1$

Entonces: $\quad A_1 = \frac{1}{2}\,(b)(t_2 - t_1)$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,(b)(t_4 - t_3)$$

Como: $\quad t_4 - t_3 = t_2 - t_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 \quad$ (La segunda ley se cumple)

17. Dos planetas X y Y viajan en órbitas circulares en dirección contraria a las de las manecillas del reloj en torno de una estrella, como muestra la figura P14.17. Los radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En cierto momento están alineados, como en la figura P14.17a, formando una línea recta con la estrella. Cinco años después, el planeta X ha girado 90° como en la figura P14.17b. ¿Dónde está el planeta Y en ese momento?

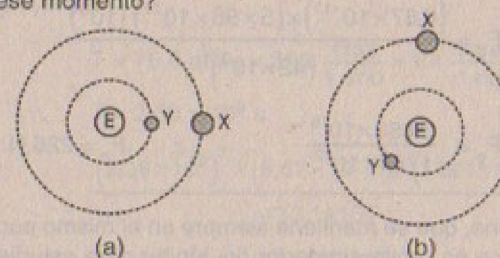


Figura P14.17

Resolución :

Sabemos que por la tercera ley de Kepler:

$$T_x^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,.\,M_E}\times(3R_y)^3$$

$$T_y^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,.\,M_E}\times R_y^3 \quad \Rightarrow \quad T_x = 3\sqrt{3}\,.T_y \quad \therefore \quad T_y = \frac{\sqrt{3}}{9}T_x \ \ldots (1)$$

Por otro lado: $\quad 2\pi$.rad —— T_x

$\frac{\pi}{2}$ rad —— 5 años ≡ $1{,}57\times10^8$ s

$\therefore \quad T_x = 6{,}3\times10^8$ s

Entonces: $\quad$ Si: 1rev — 2π rad — $T_y = \sqrt{3}/9\,T_x$

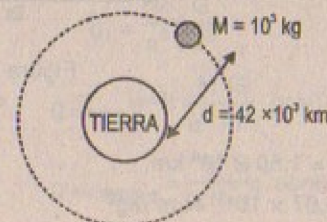
— x — $1{,}57\times10^8$ s

$\Rightarrow \quad x = 1{,}3$ rev

Luego Y habrá completado 1,3 revoluciones en ese momento.

18. Los satélites geosíncronos orbitan la Tierra a 42 000 km desde el centro de ésta. Su velocidad angular en esta altura es la misma que la velocidad rotacional de la Tierra, razón por la cual parecen estacionarios en el cielo. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un satélite de 1 000 kg a esta altura?

Resolución :



$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

G = $6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

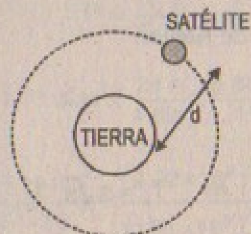
$$F_g = \frac{G.M_T.M}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{(6{,}67\times10^{-11})\times(5\times98\times10^{24})\,(10^3)}{(42\times10^6)^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{39{,}88\times10^{16}}{1764\times10^{12}} \qquad \therefore \quad F_g = 226 \text{ N}$$

19. Un satélite síncrono, que se mantiene siempre en el mismo punto sobre un ecuador planetario, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira una vez cada 9,9 h. Con los datos de la tabla 14.2 encuentre la altura del satélite.

Resolución:



$T = 9{,}9$ horas

$M_{Júpiter} = 1{,}9\times10^{27}$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Sabemos que: $F_g = F_c$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_J.M_S.G}{d^2} = M_S.\frac{v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_J.G}{d} = \left(\frac{2\pi.d}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_J.G\times T^2}{4\pi^2} = d^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1{,}9\times10)^{27}(6{,}67\times10^{-11})}{4\,(2{,}1416)^2}(9{,}9)^2\times(3\,600)^2$$

$$\therefore \quad d = 8{,}98\times10^7 \text{ m}$$

20. El cometa Halley se acerca al Sol a una distancia aproximada de 0,57 UA, y su periodo orbital es de 75,6 años. (UA es la abreviatura de unidad astronómica, donde 1 UA = 1,50 × 10⁶ km es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de que inicie su viaje de regreso? (Fig. P14.20.)

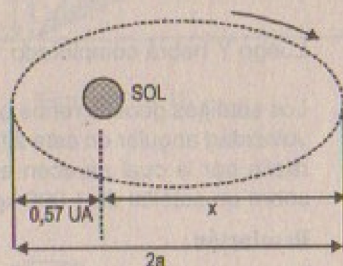


Figura P14.20

Resolución:

$T = 75{,}6$ años ; 1 UA = $1{,}50\times10^6$ km.

$M_{Sol} = 1{,}991\times10^{30}$ kg ; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\times M_{sol}}\times x^3$

Entonces: sustituyendo:

previamente: $T = 75{,}6 \text{ años}\times 365\,\dfrac{\text{dias}}{1\text{ año}}\times 24\,\dfrac{\text{horas}}{1\text{ dia}}\times\dfrac{3\,600\text{ s}}{1\text{ hora}}$

$\therefore \quad T = 2{,}38\times10^9$ s

luego: $\dfrac{(2{,}38\times10^9)^2\times(6{,}67\times10^{-11})\times(1{,}991\times10^{30})}{4\,(3{,}1416)^2} = a^3$

$\therefore$ a = (calculadora)

Luego: $x = 2(a) - 0{,}57$ UA

$\therefore$ x = (calculadora)

EL CAMPO GRAVITACIONAL

21. Calcule la magnitud y dirección del campo gravitacional en el punto P sobre el bisector perpendicular de dos masas iguales separadas por una distancia 2a, como se muestra en la figura P14.21.

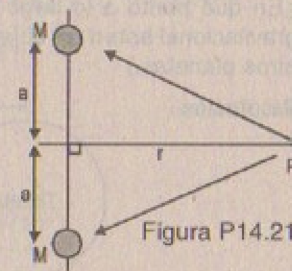
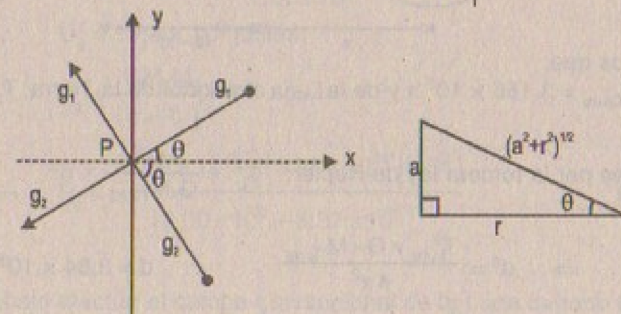


Figura P14.21

Resolución:



$$g_1 = \frac{M.G}{a^2+r^2} \quad ; \quad g_2 = \frac{M.G}{a^2+r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{g}_{resul\,x} = -2\,\frac{M.G}{a^2+r^2}\cos\theta\,\hat{i}$$

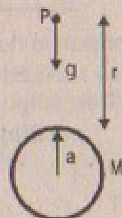
$$\vec{g}_{resultante\,y} = \frac{M.G}{a^2+r^2}\,\text{sen}\theta\,\hat{j} - \frac{M.G}{a^2+r^2}\,\text{sen}\theta\,\hat{j} = 0$$

Luego: $$g_{resultante} = \frac{2\,.\,GM}{a^2+r^2}\cdot\frac{r}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}}$$

$$\therefore\quad g_{resultante} = \frac{2MGr}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\qquad \text{(hacia la izquierda)}$$

22. Determine el campo gravitacional a una distancia r a lo largo del eje de un anillo delgado de masa M y radio a.

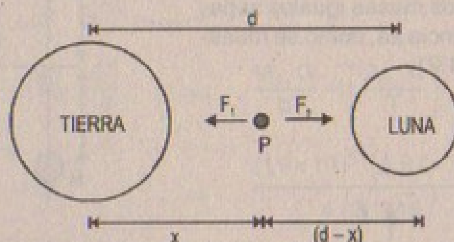
Resolución:



$$g_p = \frac{M.G}{(r+a)^2}\qquad \text{dirigido hacia el anillo}$$

23. ¿En qué punto a lo largo de la línea que conecta la Tierra y la Luna la fuerza gravitacional sobre un objetó es igual a cero? (Ignore la presencia del Sol y de los otros planetas.)

Resolución:



Sabemos que:

$T_{Tierra} = 3{,}156\times10^7$ s y de la Luna alrededor de la Tierra: $T_L = 2{,}36\times10^6$ s

Entonces por la tercera ley de Kepler: $T_L^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_{Tierra}}\times d^3$

$$\Rightarrow\quad d^3 = \frac{T_{Luna}^2\times G\times M_{Tierra}}{4\pi^2}\qquad \therefore\quad d = 3{,}84\times10^8\ \text{m}$$

Luego: $g_p = 0$

Entonces: $F_1 = F_2$

$$\Rightarrow\quad \frac{G.Mp.M_T}{x^2} = \frac{G.Mp\,.\,M_{Luna}}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{G\,.\,M_{Tierra}}{x^2} = \frac{G.M_{Luna}}{(d-x)^2}$$

Reemplazando: $$\frac{5{,}98\times10^{24}}{x^2} = \frac{7{,}36\times10^{22}}{\left(3{,}84\times10^8-x\right)^2}$$

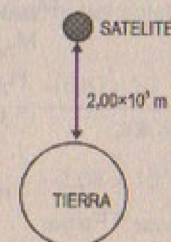
$$\therefore\quad x = 3{,}84\times10^4\ \text{km}$$

Luego el objeto estará a: $3{,}84\times10^4$ km desde el centro de la Luna.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

24. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altura de $2{,}00\times10^6$ m. a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite-Tierra? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el satélite?

Resolución:



$M_s = 100$ kg

$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$R_{Tierra} = 6{,}37\times10^6$ m

Parte (a) $$U_p = \frac{-GM_TM_S}{d}$$

$$\Rightarrow\quad U_p = -\frac{\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(5{,}98\times10^{24}\right)\left(10^2\right)}{2{,}00\times10^6}$$

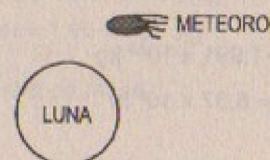
$$\therefore\quad U_p = 19{,}9\times10^9\ \text{joules}$$

Parte (b) $$F_g = \frac{GM_TM_S}{(d+R_T)^2}$$

$$\Rightarrow\quad F_g = \frac{\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(5{,}98\times10^{24}\right)\left(10^2\right)}{\left(2{,}00\times10^6+6{,}37\times10^6\right)^2}\qquad \therefore\quad F_g = 569{,}3\ \text{N}$$

25. ¿Cuánto trabajo efectúa el campo gravitacional de la Luna cuando un meteoro de 1 000 kg proveniente del espacio exterior choca contra la superficie lunar?

Resolución:



$M_{meteoro} = 10^3$ kg

$M_{Luna} = 7{,}36\times10^{22}$ kg

$R_{Luna} = 1{,}74\times10^6$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$$W = -\Delta U = U_i - U_f$$

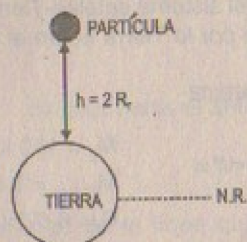
$$\Rightarrow \quad W = 0 + \frac{G.M_M.M_{Luna}}{R_{Luna}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(6,67\times10^{-11})(10^3)(7,36\times10^{22})}{1,74\times10^6}$$

$$\therefore \quad W = 28,2 \times 10^8 \text{ joules}$$

26. ¿Cuánta energía es necesaria para mover una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura $h = 2R_T$?

26A. ¿Cuánta energía es necesaria para mover una masa desde la superficie terrestre hasta una altura h?

Resolución :



$M_{partícula} = 10^3$ kg
$M_{Tierra} = 5,98 \times 10^{24}$ kg
$R_{Tierra} = 6,37 \times 10^6$ m
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por conservación de energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} M_p \cdot v_{esc}^2 - G.\frac{M_p \cdot M_T}{R_T} = -G.\frac{M_p \cdot M_T}{3R_T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} M_p \cdot v_{esc}^2 = \frac{2G.M_p.M_T}{3R_T}$$

Luego: $$E_{Total\ necesaria} = \frac{2G.M_p.M_T}{3R_T} - \frac{G.M_p.M_T}{R_T} = -\frac{G.M_p.M_T}{3R_T}$$

Reemplazando: $$E_{Total\ necesaria} = \frac{(-6,67\times10^{-11})(10^3)(5,98\times10^{24})}{3(6,37\times10^6)} = -2,1\times10^{10} \text{ joules}$$

27. Después de que se agote su combustible nuclear, el destino final de nuestro Sol es colapsarse en una enana blanca, es decir, una estrella que tiene aproximadamente la masa del Sol, pero el radio de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración en caída libre en su superficie, y c) la energía potencial gravitacional de un objeto de 1,00 kg en su superficie.

Resolución :

Sea: $M_{Estrella\ (enana\ blanca)} = M_{Sol} = 1,991 \times 10^{30}$ kg
$R_{Estrella\ (enana\ blanca)} = R_{Tierra} = 6,37 \times 10^6$ m
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a) $$\rho_{prom.} = \frac{M_{Sol}}{V_{Tierra}} = \frac{1,991\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi(6,37\times10^6)^3}$$

$$\therefore \quad \rho_{prom.enana\ blanca} = 1,84 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$$

Parte (b) $$g_{enana\ blanca} = \frac{G.M_{Sol}}{R_{Tierra}^2} = \frac{(6,67\times10^{-11})(1,991\times10^{30})}{(6,37\times10^6)^2}$$

$$\therefore \quad g_{enana\ blanca} = 3,27 \times 10^6 \text{ m/s}^2$$

Parte (c) Masa objeto = 1 kg

Entonces la energía potencial del objeto $= -G.\dfrac{M_o.M_{Sol}}{R_{Tierra}}$

$$\Rightarrow \quad Ep_{objeto} = \frac{-(6,67\times10^{-11}).(1,991\times10^{30})}{6,37\times10^6}$$

$$\therefore \quad Ep_{objeto} = |-2,08 \times 10^{13} \text{ joules}|$$

CONSIDERACIONES DE ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO PLANETARIO Y DE SATÉLITES

28. Determine la velocidad de escape de un cohete sobre el lado lejano de Ganímedes, la luna más grande de Júpiter. El radio de Ganímedes es de $2,64 \times 10^6$ m y su masa es igual a $1,495 \times 10^{23}$ kg. La masa de Júpiter es de $1,90 \times 10^{27}$ kg y la distancia entre Júpiter y Ganímedes es igual a $1,071 \times 10^9$ m. Asegúrese de incluir el efecto gravitacional debido a Júpiter, aunque puede ignorar el movimiento de este gran planeta y de la mayor de sus lunas cuando giran alrededor de su centro de masa (Fig. P14.28).

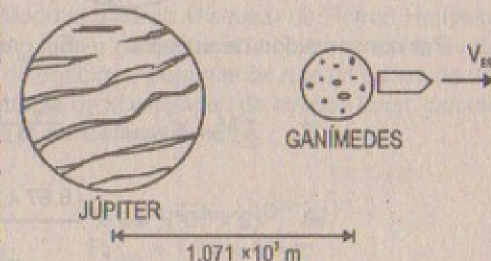
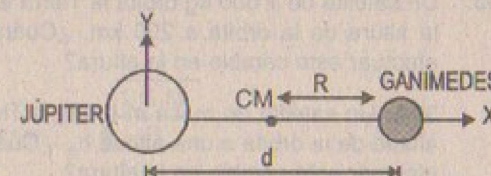


Figura P14.28

Resolución :

Radio de Ganím. = $2,64 \times 10^6$ m
Masa de Ganím. = $1,495 \times 10^{23}$ kg
Masa de Júpiter = $1,90 \times 10^{27}$ kg

Hallando el centro de masa



Entonces $$X_{CM} = \frac{M_{Ganim.}(d)}{M_G + M_J} = \frac{(1{,}495\times10^{23})(1{,}071\times10^{9})}{(1{,}495\times10^{23} + 1{,}9\times10^{27})}$$

$$\therefore \quad X_{CM} = 8{,}43 \times 10^4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad R \approx 0$$

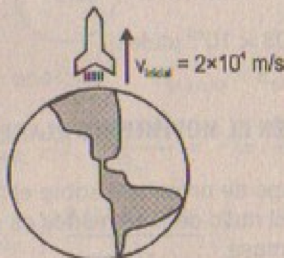
Luego:

$$v_{esc.cohete} = \sqrt{\frac{2.G\,M_{CM}}{R_{(CM-Cohete+R_{Ganimedes})}}} = \sqrt{\frac{2\times(6{,}67\times10^{-11})(1{,}495\times10^{23} + 1{,}9\times10^{27})}{2{,}64\times10^{6}}}$$

$$\therefore \quad v_{escape\ del\ cohete} = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

29. Una nave espacial se lanza desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de $2{,}00 \times 10^4$ m/s. ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy alejada de la Tierra? (Ignore la fricción.)

Resolución:



$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²
$v_f = ?$
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Por conservación de energía: $E_{inicial} = E_{final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M_c \cdot v^2_{inicial} - G.\frac{M_c \cdot M_T}{R_T} = \frac{1}{2}M_c . v^2_{final}$$

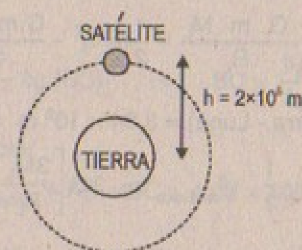
$$\Rightarrow \quad (2\times10^4)^2 - 2\times\frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{6{,}37\times10^{6}} = v^2_{final}$$

$$\therefore \quad v_{final} = 16{,}58 \times 10^3 \text{ m/s} \quad ó \quad v_{final} = 1{,}66 \times 10^4 \text{ m/s}$$

30. Un satélite de 1 000 kg orbita la Tierra a una altura de 100 km. Se desea aumentar la altura de la órbita a 200 km. ¿Cuánta energía debe añadirse al sistema para efectuar este cambio en la altura?

30A. Un satélite de masa m orbita la Tierra a una altura h_1. Se desea aumentar la altitud de la órbita a una altitud h_2. ¿Cuánta energía debe añadirse al sistema para efectuar este cambio en la altura?

Resolución:



$M_{satélite} = 10^3$ kg
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²
$h = 2d$
$d = 10^5$ m

$$E_{inicial} = E_{K\,inicial} + E_{p\,inicial}$$

$$\Rightarrow \quad E_{inicial} = \frac{G.M_T.M_S}{2d} - \frac{G\,M_T.M_S}{d} = -\frac{G.M_T.M_S}{2d}$$

$$E_{final} = E_{K\,final} + E_{p\,final}$$

$$\Rightarrow \quad E_{final} = \frac{G.M_T.M_S}{2h} - \frac{G\,M_T.M_S}{h} = -\frac{G.M_T.M_S}{2h} = -\frac{G.M_T.M_S}{4d}$$

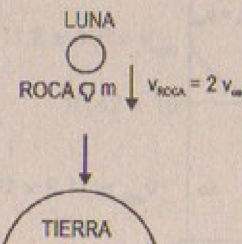
Luego: $$E_{necesaria} = E_{final} - E_{inicial} = -\frac{G.M_T.M_S}{4d} + \frac{G.M_T.M_S}{2d}$$

Reemplazando:

$$\therefore \quad E_{necesaria} = \frac{G.M_T.M_S}{4d} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})(10^{3})}{4\times10^{5}} = 9{,}97 \times 10^{11} \text{ joules}$$

31. En *La Luna es una dama cruel* (*The Moon is a harsh Mistress*) de Robert Heinlein, los colonos que habitan la Luna intentan lanzar rocas hacia la Tierra si no se les da la independencia (o por lo menos una delegación). Suponiendo que un cañón de riel pudiera lanzar una roca de masa m al doble de la velocidad de escape lunar, calcule la velocidad de la roca cuando entra a la atmósfera terrestre.

Resolución:



$M_{Luna} = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
$R_{Luna} = 1{,}74 \times 10^6$ m
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G.M_L}{R_L}} \quad \Rightarrow \quad v_{inicial\ roca} = 2\sqrt{\frac{2G.M_L}{R_L}}$$

Por conservación de energía:

$$E_{mecánica\ inicial\ sistema} = E_{mecánica\ final\ del\ sistema}$$

Entonces: $\frac{1}{2}m\left[\sqrt{\frac{8GM_L}{R_L}}\right]^2 - \frac{G.m.M_L}{R_L} = \frac{1}{2}m\,v_f^2 - \frac{G.m.M_T}{d}$

Donde: d = Distancia (Tierra - Luna) = $3,84 \times 10^8$ m

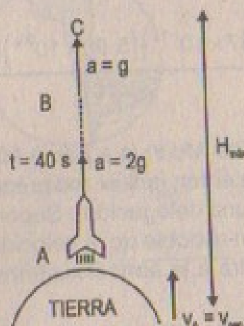
Entonces: $\frac{3G.M_L}{R_L} + \frac{G.M_T}{d} = \frac{1}{2}\cdot v^2_{final\ roca} \Rightarrow 2G\left[\frac{3M_L}{R_L} + \frac{M_T}{d}\right] = v^2_{final\ roca}$

Reemplazando: $2(6,67 \times 10^{-11})\cdot\left[\frac{3\times 7,36\times 10^{22}}{1,74\times 10^6} + \frac{5,98\times 10^{24}}{3,84\times 10^8}\right] = v^2_{final\ roca}$

$\therefore\ v_{final\ roca\ a\ tierra} = 4,36$ km/s

32. Un cohete se dispara verticalmente, expulsando la masa suficiente para moverse hacia arriba con una aceleración constante de 2 g. Después de 40,0 s, se apagan los motores del cohete y éste se mueve sólo bajo la acción de la gravedad, con una resistencia del aire despreciable. Ignore la variación de g con la altura y encuentre a) la altura máxima que alcanza el cohete, y b) el tiempo total de vuelo desde el lanzamiento hasta que el cohete regresa a la Tierra. c) Dibuje una gráfica a mano (cualitativa) de la velocidad contra el tiempo de vuelo.

Resolución:



$g = 9,80$ m/s²
$M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
$R_T = 6,37 \times 10^6$ m
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

$H_{máx} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\Rightarrow\ \overline{AB} = v_{esc}t - \frac{1}{2}(2g)t^2$

Pero: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_T}{R_T}} \Rightarrow v_{esc} = 11,2 \times 10^3$ m/s

Luego: $\overline{AB} = 11,2 \times 10^3.(4 \times 10) - (9,80)(4 \times 10)^2$

$\therefore\ AB = 4,32 \times 10^5$ m

Por otro lado:
$v_B = v_A - 2gt \Rightarrow v_B = 11,2 \times 10^3 - 2(9,80)(40) = 10,42 \times 10^3$ m/s

Entonces:

$v_o^2 = v_B^2 - 2g\,(BC) \Rightarrow BC = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{(10,42\times 10^3)^2}{2\,(9,80)}\quad \therefore\ BC = 5,5\times 10^6$ m

En consecuencia:

$H_{máxima} = AB + BC = 4,32 \times 10^5 + 5,5 \times 10^6 = 5,932 \times 10^6$ m

Parte (b)

El tiempo de vuelo hasta que el cohete llega a tierra será:

$T_{total} = 2\,[t_{AB} + t_{BC}]$

Primeramente: tiempo de ida = $t_{AB} + t_{BC} = 40\text{ s} + t_{BC}$

Sabemos que: $v_C = v_B - g.t_{BC}$

$\Rightarrow\ t_{BC} = \frac{v_B}{g} = \frac{10,42\times 10^3}{9,80} = 1\,063$ s

Luego: $T_{ida} = 1063 + 40 = 1103$ s

Por otro lado: tiempo de vuelta (suponemos que cae con una aceleración g = cte)

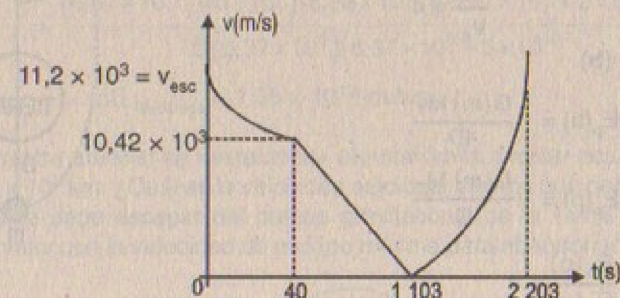
Entonces: tiempo de vuelta:

Sabemos que: $H_{máx} = \frac{1}{2}gt^2_{vuelta}$

$\therefore\ t_{vuelta} = \sqrt{\frac{2H_{máx}}{g}} = 1\,100$ s

En consecuencia: Total = $T_{ida} + T_{vuelta} = 1\,103 + 1\,100 = 2\,203$ s

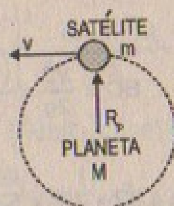
Parte (c)



33. Un satélite se mueve en una órbita circular justo encima de la superficie de un planeta. Demuestre que la velocidad orbital v y la velocidad de escape del satélite se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}v$

Resolución :

Sea:



Por demostrar:

$$v_{esc} = \sqrt{2}\,V$$

Sabemos que: $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_p}{R_p}} \quad ...(1)$$

Por otro lado: $$\frac{m.v^2}{R_p} = \frac{G.m.M_p}{R_p^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G.M_p}{R_p}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{G.M_p}{R_p}} \quad ...(2)$$

(2) en (1) $$v_{esc} = \sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{G.M_p}{R_p}} = \sqrt{2}\,.\,v \qquad \text{l.q.q.d.}$$

34. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra de manera tal que, en las posiciones del perigeo y el apogeo, las distancias desde el centro de la Tierra son, respectivamente, D y 4D. Calcule las proporciones a) v_p/v_a y b) E_p/E_a.

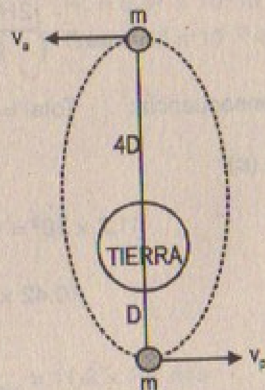
Resolución :

Parte (a)

Por conservación del momento angular

$$m.v_p.D = m.v_a.4D$$

$$\therefore \quad \frac{v_p}{v_a} = 4$$



Parte (b)

$$E_p(a) = -\frac{G(m)\,M_T}{4D}$$

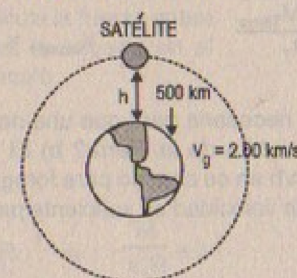
$$E_p(p) = -\frac{G(m)\,M_T}{D}$$

$$\therefore \quad \frac{E_p(p)}{E_p(a)} = 4$$

35. Un satélite de 500 kg se encuentra en una órbita circular a una altura de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, con el tiempo el satélite cae a la superficie de la Tierra y la golpea con una velocidad de 2,00 km/s. ¿Cuánta energía fue absorbida por la atmósfera por la fricción?

35A. Un satélite de masa m se encuentra en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, con el tiempo el satélite cae a la superficie de la Tierra y la golpea con una velocidad v. ¿Cuánta energía fue absorbida por la atmósfera por la fricción?

Resolución :



$M_{satélite} = 5 \times 10^2$ kg

$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

$$E_{M\,inicial} \Rightarrow \frac{M_S\,.\,v_i^2}{R_T + h} = \frac{G.M_S.M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v_i^2 = \frac{G.M_T}{(R_T+h)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{mecánica\,inicial} = \frac{G.M_S.M_T}{2\,(R_T+h)} - \frac{G.M_S.M_T}{(R_T+h)}$$

$$E_{mecánica\,final} = \frac{1}{2}M_S\,.\,v_g^2 - \frac{G.M_S.M_T}{R_T}$$

Luego: $E_{M.\,inicial} - E_{M.\,final}$ = Energía absorbida por la fricción

Reemplazando:

$$\Delta E_{mecánica} = \frac{G.M_S.M_T\,(R_T+2h)}{2R_T\,(R_T+h)} - \frac{1}{2}M_S.v_g^2$$

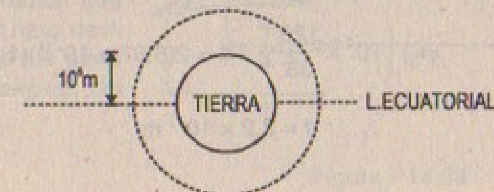
$$= \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5\times10^2)(5{,}98\times10^{24})(6{,}37\times10^6+2\times5\times10^5)}{2\,(6{,}37\times10^6)(6{,}37\times10^6+5\times10^5)}$$

$$\therefore \quad \Delta E_{Mecánica} = 1{,}58 \times 10^{10}\text{ joules}$$

36. Un satélite terrestre artificial se «estaciona» en una órbita circular ecuatorial a una altitud de $1{,}00 \times 10^3$ km. ¿Cuál es la velocidad adicional mínima que debe impartirse al satélite si éste debe escapar del campo gravitaconal de la Tierra? ¿Cómo se compara este valor con la velocidad de escape mínima para abandonar la superficie terrestre?

Resolución :

$$v_{mín} = \frac{\sqrt{2.G.M_{Tierra}}}{10^6}$$

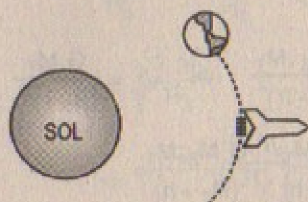


$$\Rightarrow \quad v_{mín} = \sqrt{\frac{2\times 6{,}67\times 10^{-11}.(5{,}38\times 10^{24})}{10^6}} \qquad \therefore \quad v_{mín} = 28{,}2\times 10^3 \text{ m/s}$$

$$\therefore \quad v_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M_{Tierra}}{R_T}} \qquad \therefore \quad v_{escape} = 11{,}2\times 10^3 \text{ m/s}$$

37. a) ¿Cuál es la velocidad mínima necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, empezando en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* alcanzó una velocidad máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol esta velocidad es suficiente para escapar del Sistema Solar?

Resolución :



$M_{Sol} = 1{,}991\times 10^{30}$ kg

$M_{Tierra} = 5{,}98\times 10^{24}$ kg

$G = 6{,}67\times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

Distancia de la Tierra al Sol = $1{,}496\times 10^{11}$ m

Entonces v_{esc} (relativa al Sol será)

Por fórmula: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_{Sol}}{d}}$

$$\Rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\,(6{,}67\times 10^{-11})(1{,}991\times 10^{30})}{1{,}496\times 10^{11}}}$$

$$\therefore \quad v_{esc} = 4{,}2\times 10^4 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M}{d}}$

Entonces $\sqrt{\frac{2\,(6{,}67\times 10^{-11})(1{,}991\times 10^{30})}{d}} = \frac{125\times 10^6}{3\,600}$

$$\Rightarrow \quad \left(10^4\times\frac{125}{36}\right)^2\times d = 2(6{,}67\times 10^{-11})(1{,}991\times 10^{30})$$

$$\therefore \quad d = 2{,}2\times 10^{11} \text{ m}$$

LA FUERZA GRAVITACIONAL ENTRE UN OBJETO EXTENDIDO Y UNA PARTÍCULA

38. Una barra uniforme de masa M tiene la forma de un semicírculo de radio R (Fig. P14.38). Calcule la fuerza sobre una masa puntual m situada en el centro del semicírculo.

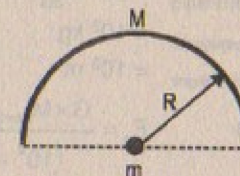


Figura P14.38

Resolución :

$$L = \pi.R \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{\pi.R} = \lambda$$

m —x→ dm ⟶ x ; dx ; ⟶ F_x

$$dm = \frac{M}{\pi R}.dx$$

Entonces: $F_g = G.m\int\frac{dm}{x^2} = G.m\int_{-R}^{R}\frac{M}{\pi.R}dx.\frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = -\frac{G.m.M}{\pi.R}.\frac{1}{x}\Big|_{-R}^{R} \qquad \therefore \quad F_g = \frac{2G.mM}{\pi.R^2}.\hat{r}$$

39. Una nave espacial en forma de un largo cilindro tiene una longitud de 100 m y su masa con pasajeros es de 1 000 kg. Se extravió y se acercó demasiado a un hoyo negro de 1,0 km de radio y una masa igual a 100 veces la del Sol (Fig. P14.39). Si la nariz de la nave apunta hacia el centro del hoyo negro y si la distancia entre la nariz y el centro del hoyo es de 10 km, a) determine la aceleración promedio total de la nave espacial. b) ¿Cuál es la diferencia en la aceleración que sienten los pasajeros en la nariz de la nave y la que se siente en la parte posterior, que está más alejada del hoyo negro?

39A. Una nave espacial en forma de un largo cilindro tiene una longitud ℓ y su masa con pasajeros es m. Se extravió y se acercó demasiado a un hoyo negro de radio R y masa M. Si la nariz de la nave apunta hacia el centro del hoyo negro, y si la distancia entre la nariz y el centro del hoyo es d, a) determine la aceleración promedio total de la nave espacial. b) ¿Cuál es la diferencia en la aceleración que sienten los pasajeros en la nariz de la nave y la que se siente en la parte posterior, que está más alejada del hoyo negro?

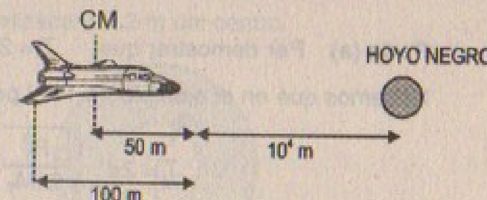


Figura P14.39

Resolución :

$M_{hoyo\ negro} = 10^2\ M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{32}$ kg

$M_{nave\ con\ pasajeros} = 10^3$ kg

$R_{hoyo\ negro} = 10^3$ m

Parte (a) $F_g = \dfrac{G \times M_{nave} \cdot M_{hoyo}}{(10^4 + 50)^2} = M_{nave} \cdot g_{prom}$

$$\Rightarrow \quad g_{prom} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}991 \times 10^{32})}{(1{,}005 \times 10^4)^2} \quad \therefore \quad g_{prom} = 1{,}31 \times 10^{14}\ \text{N/kg}$$

Parte (b) $g_{nariz} = \dfrac{M_{hoyo} \cdot G}{(10^4)^2} = \dfrac{(1{,}991 \times 10^{32})(6{,}67 \times 10^{-11})}{10^8}$

$\therefore \quad g_{nariz} = 1{,}328 \times 10^{14}$ N/kg

$$g_{posterior} = \frac{M_{hoyo} \cdot G}{(1{,}01 \times 10^4)^2} = \frac{(1{,}991 \times 10^{32})(6{,}67 \times 10^{-11})}{(1{,}01)^2 \times 10^8}$$

$\therefore \quad g_{posterior} = 1{,}30 \times 10^{14}$ N/kg

$\therefore \quad g_{nariz} - g_{posterior} = 2{,}62 \times 10^{12}$ N/kg

FUERZA GRAVITACIONAL ENTRE UNA PARTÍCULA Y UNA MASA ESFÉRICA

40. a) Demuestre que el periodo calculado en el ejemplo 14.11 puede escribirse como $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$ donde g es la aceleración en caída libre. b) ¿Cuál sería este periodo si se construyera un túnel a través de la Luna? c) ¿Qué problemas prácticos relacionados con estos túneles en la Tierra se eliminarían si se construyeran en la Luna?

Resolución :

Parte (a) Por demostrar que: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$

Sabemos que en el ejemplo 14.11 el periodo es:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_T^3}{G.M_T}} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $F_g = M_p . g = \dfrac{G.M_p.M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = \dfrac{G.M_T}{R_T^2}$

Luego: $\dfrac{1}{g} = \dfrac{R_T^2}{G.M_T}$

Reemplazando (2) en (1):

Resulta que: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$ l.q.q.d.

Parte (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_{Luna}}{g_{Luna}}}$

Parte (c)

Como la gravedad en la Luna es menor que en la Tierra, las construcciones, el material humano, materia prima, serían más ligeras, y se acabarían las construcciones mucho más rápido.

41. Una esfera sólida uniforme de 500 kg tiene un radio de 0,400 m. Encuentre la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la esfera sobre una partícula de 50,0 g localizada a) a 1,50 m del centro de la esfera, b) en la superficie de la esfera, y c) a 0,200 m del centro de la esfera.

Resolución :

Parte (a) $F_g = \dfrac{G \times m \times M}{(1{,}5)^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times (5 \times 10^{-2})(5 \times 10^2)}{(1{,}5)^2} \quad \therefore \quad F_g = 7{,}41 \times 10^{-10}\ \text{N}$$

Parte (b)

En la superficie de la esfera: $F_g = \dfrac{G.m.M}{R^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}(5 \times 10^{-2})(5 \times 10^2)}{(4 \times 10^{-1})^2} \quad \therefore \quad F_g = 1{,}04 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

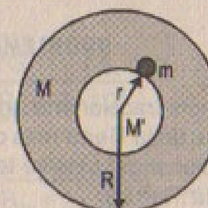
Parte (c)

Para una partícula de: 5×10^{-2} kg localizada a 0,2 m del centro.

Datos: $M_{est.} = 5 \times 10^2$ kg

$R_{est.} = 0{,}400$ m

$F_g = \dfrac{G.m.M'}{r^2}$



Por otro lado: $\frac{M'}{V'}=\frac{M}{V} \Rightarrow M' = M\,.\frac{4/3\pi r^3}{4/3\pi R^3}$

Luego: $F_g = \frac{G.m}{r^2}\left(M\times\frac{r^3}{R^3}\right) = G\times\frac{m.M}{R^3}\times r$

Reemplazando: $F_g = \frac{6{,}67\times10^{-11}(5\times10^{-2})(5\times10^{2})(2\times10^{-1})}{(4\times10^{-1})^3}$

$\therefore \quad F_g = 5{,}2\times10^{-9}\ \text{N}$

42. Una esfera sólida uniforme de masa m_1 y radio R_1 se encuentra en el interior y concéntrica con un cascarón esférico de masa m_2 y radio R_2 (Fig. P14.42). Calcule la fuerza gravitacional ejercida por la esfera sobre una partícula de masa m ubicada en a) r = a, b) r = b, c) r = c, donde r se mide desde el centro de las esferas.

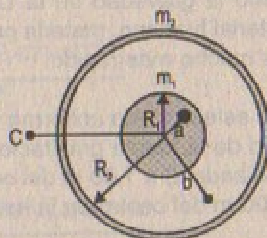


Figura P14.42

Resolución : 42

Parte (a)

Para r = a Para una partícula de masa = m

$$F_g = \frac{G.m.m_1}{R_1^3}.\,a \quad ; \quad \text{ya que: } a \le R_1$$

Parte (b)

Para r = b para una partícula de masa: m

$$F_g = \frac{G.m_1.m}{b^2} \quad ; \quad \text{ya que: } b \ge R_1$$

Parte (c)

Para r = c Para una partícula de masa: m

$$F_g = \frac{G.m.m_2}{c^2} \quad ; \quad \text{ya que } c \ge R_2$$

PROBLEMAS ADICIONALES

43. Calcule la diferencia fraccionaria $\Delta g/g$ en la aceleración en caída libre en los puntos sobre la superficie de la Tierra más cercano y más lejano de la Luna; tome en cuenta el efecto gravitacional del satélite terrestre. (Esta diferencia es la causa de las *mareas lunares* en la Tierra.)

Resolución :

$$g_{lejano} = \frac{G.M_T}{(d-R_T)^2} \qquad \text{donde } d = 3{,}84\times10^8\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \quad g_{lejano} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(3{,}84\times10^8 - 6{,}37\times10^6)^2} \quad \therefore \quad g_{lejano} = 2{,}797\times10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

$$g_{cercano} = \frac{G.M_T}{[d-(R_T+R_L)]^2}$$

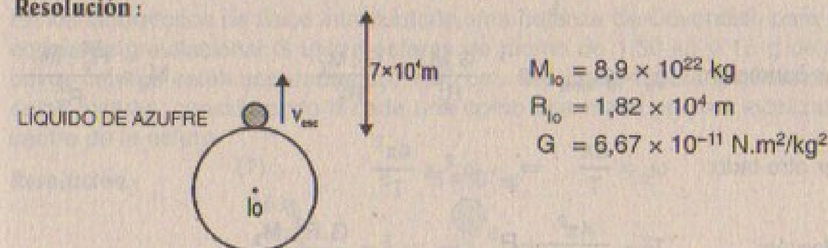
$$\Rightarrow \quad g_{cercano} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{\left(3{,}84\times10^8 - [6{,}37\times10^6 + 1{,}74\times10^6]\right)^2} \quad \therefore \quad g_{cercano} = 2{,}823\times10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Entonces: $\Delta g = g_{cercano} - g_{lejano} = 0{,}02596\times10^{-3}\ \text{m/s}^2$

Por lo tanto: $$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0{,}02596\times10^{-3}}{\frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(6{,}37\times10^6)^2}} \quad \therefore \quad \frac{\Delta g}{g} = 2{,}26\times10^{-7}$$

44. Los *voyagers* 1 y 2 estudiaron la superficie de I_o, la luna de Júpiter, y fotografiaron volcanes activos que arrojaban azufre líquido a alturas de 70 km sobre la superficie de esta luna joviana. Estime la velocidad con la cual el azufre líquido sale del volcán. La masa de I_o es de $8{,}9\times10^{22}$ kg y su radio es igual a 1820 km.

Resolución :



$M_{Io} = 8{,}9\times10^{22}$ kg

$R_{Io} = 1{,}82\times10^4$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N.m}^2/\text{kg}^2$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{m.M_{Io}.G}{R_{Io}} = 0 - \frac{G.m.M_{Io}}{R_{Io}+7\times10^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{esc}^2}{2} = M_{Io}.G\left[\frac{1}{R_{Io}} - \frac{1}{R_{Io}+7\times10^4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_{esc}^2 = \frac{2\times G\times M_{lo}\left(7\times10^4\right)}{R_{lo}\left(R_{lo}+7\times10^4\right)}$$

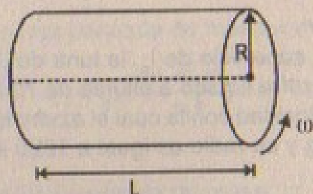
Reemplazando: $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2\times\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(8{,}9\times10^{22}\right)\left(7\times10^4\right)}{182\times10^4\left(189\times10^4\right)}}$

$$\therefore \quad v_{escape} = 491{,}5 \text{ m/s}$$

45. Se ha propuesto (por G.K. O'Neill, 1974) un hábitat cilíndrico en el espacio de 6 km de diámetro y 30 km de largo. Dicho hábitat tendría ciudades, tierras y lagos sobre la superficie interna y aire y nubes en el centro. Todo esto podría mantenerse en su sitio mediante la rotación del cilindro en torno de su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

45A. Se ha propuesto (por G. K. O'Neill, 1974) un hábitat cilíndrico en el espacio de diámetro d y longitud L. Dicho hábitat tendría ciudades, tierras y lagos sobre la superifice interna, y aire y nubes en el centro. Todo esto podría mantenerse en su sitio mediante la rotación del cilindro en torno de su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

Resolución:



$2R = 6{,}0$ km

$L = 30{,}0$ km

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

Por condición: $g_c = g_{Tierra} \Rightarrow \dfrac{G.M_c}{R_c^2} = \dfrac{G.M_T}{R_T^2} \quad \therefore \quad M_c = \dfrac{R_c^2 . M_T}{R_T^2}$

Por otro lado: $\omega_c = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_c^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} \quad \ldots (1)$

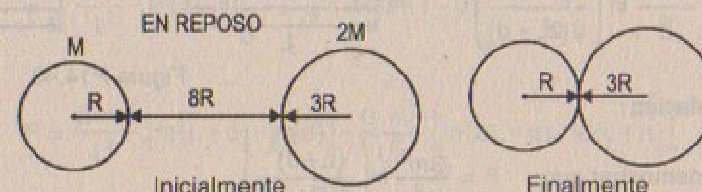
Además: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G . M_c} . R_c^3 \Rightarrow \omega_c^2 = \dfrac{G.R_c^2.M_T}{R_T^2 . R_c^3}$

En consecuencia: $\omega = \dfrac{1}{R_T} . \sqrt{\dfrac{G . M_T}{R_c}}$

Reemplazando: $\omega = \dfrac{1}{6{,}37\times10^6} . \sqrt{\dfrac{\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(5{,}98\times10^{24}\right)}{3\times10^3}} = 0{,}0572$ rad/s

46. Dos esferas que tienen masas M y 2M y radios R y 3R, respectivamente, se liberan a partir del reposo cuando la distancia entre sus centros es 12R. ¿Qué tan rápido se estará moviendo cada esfera en el momento de chocar? Suponga que las dos esferas sólo interactúan entre ellas.

Resolución:



Por conservación del momento:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$\Rightarrow \quad 0 = M.v_1 - 2M\, v_2 \qquad \Rightarrow \quad M.v_1 = 2Mv_2 \qquad \therefore \quad v_1 = 2v_2$

Por conservación de energía: $\quad E_{M.\ inicial} = E_{M.\ final}$

$$-\frac{G(M)(2M)}{12R} = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}(2M)v_2^2 - \frac{G(M)(2M)}{4R} \qquad \therefore \quad v_2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{MG}{R}}$$

Tomando la esfera (2) como una partícula que es atraída por la esfera (1).

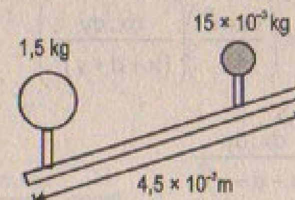
Entonces: $\quad E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{G(M)(2M)}{12R} = \frac{1}{2}(2M)v^2 - \frac{G(M)(2M)}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \quad v_{esfera\ 2} = \sqrt{GM/3R}$$

47. En los laboratorios de física introductoria, una balanza de Cavendish para medir la constante gravitacional G utiliza esferas de plomo de 1,50 kg y 15 g de masa, y cuyos centros están separados por 4,50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre estas esferas, considerando a cada una como una masa puntual localizada en el centro de la esfera.

Resolución:



$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$$F_g = \frac{G.M.m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67\times10^{-11}(1{,}5)\left(1{,}5\times10^{-3}\right)}{\left(4{,}5\times10^{-2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad F_g = 7{,}41\times10^{-10}\text{ N}$$

48. Considere dos barras uniformes idénticas de longitud L y masa m que se encuentran a lo largo de la misma línea y tiene sus puntos de mayor proximidad separados por una distancia d(Fig. P14.48). Demuestre que la fuerza gravitacional mutua entre estas barras tiene una magnitud.

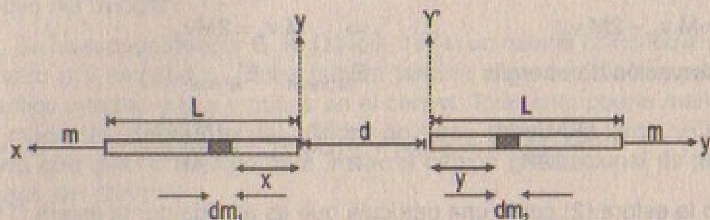
$$F = \frac{Gm^2}{L^2}\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)$$

Figura P14.48

Resolución :

Por demostrar que: $F = \frac{Gm^2}{L^2}\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)$

Dada la figura:



Se sabe que: $\frac{m}{L} = \lambda$

$$\Rightarrow \quad dm_1 = \lambda.d_L = \lambda dx = \left(\frac{m}{L}\right).dx$$

Además $dm_2 = \lambda.d_L = \lambda dy = \left(\frac{m}{L}\right).dy$

Entonces:

$$d_F = \frac{G.dm_1.dm_2}{(x+d+y)^2} = \left(\frac{G.m^2}{L^2}\right)\left(\frac{dx.dy}{(x+d+y)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\int_0^L \frac{dx.dy}{(x+d+y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\left[-\frac{1}{(x+y+d)}\Big|_0^L\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\left(\frac{1}{x+d}\right)dx - \frac{G.m^2}{L^2}\int_0^L\left(\frac{1}{x+l+d}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(x+d)\Big|_0^{\ell} - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(x+\ell+d)\Big|_0^{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\left[\ln(L+d)-\ln(d)\right] - \frac{G.m^2}{L^2}.\left[\ln(2L+d)-\ln(L+d)\right]$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(L+d) - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(d) - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(2L+d) + \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(L+d)$$

Aplicando propiedad de logaritmos resulta que:

$$F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln\left[\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right] \quad \text{l.q.q.d.}$$

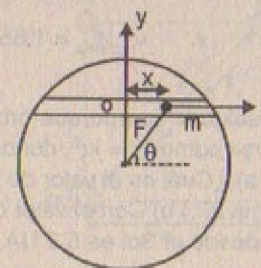
49. Un objeto de masa m se mueve en un túnel recto y liso de longitud L excavado a través de la cuerda de un arco de la Tierra, como en el ejemplo 14.11 (Fig. 14.20). a) Determine la fuerza constante efectiva del movimiento armónico y la amplitud del movimiento. b) Utilizando consideraciones de energía encuentre la velocidad máxima del objeto. ¿Dónde ocurre la velocidad máxima? c) Obtenga un valor numérico para la velocidad máxima si L = 2 500 km.

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que:

$$F_g = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.y$$

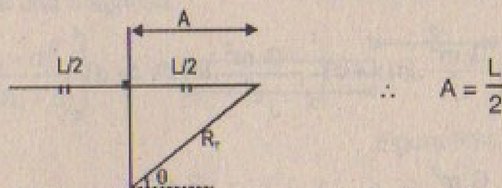


$$\Rightarrow \quad F_g = F_x = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.r\cos\theta$$

$$\therefore \quad F_x = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.x = -kx$$

Entonces: $k = \dfrac{G.m.M_{Tierra}}{R^3_{Tierra}}$

Por Geometría:



$\therefore \quad A = \dfrac{L}{2}$

Parte (b)

Por M.A.S. $\quad -\dfrac{G.m.M_T}{R_T^3} . x = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{G.M_T}{R_T^3} x = 0$ (ecuación diferencial)

Luego la ecuación general es: $x(t) = \dfrac{L}{2}\cos\left[\sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_T^3}} . t + \phi\right]$

Por energía: $\quad \dfrac{1}{2}k(A)^2 = \dfrac{1}{2}m.v^2_{máx}$

$\therefore \quad v_{máx} = \dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_T^3}}$

La velocidad máxima ocurre en la mitad del túnel.

Parte (c) Si $L = 2{,}5 \times 10^6$ m ; $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

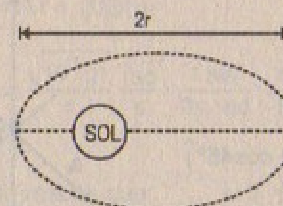
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg; $R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Entonces: $\quad v_{máxima} = \dfrac{2{,}5\times10^6}{2}\left(\sqrt{\dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(6{,}37\times10^6)^3}}\right)$

$\therefore \quad v_{máxima} = 1{,}55 \times 10^3$ m/s

50. Para cualquier cuerpo que orbita alrededor del Sol, la tercera ley de Kepler puede escribirse como $T^2 = kr^3$, donde T es el periodo orbital y r es el eje semimayor de la órbita. a) ¿Cuál es el valor de k si T se mide en años y r se mide en UA? (Véase el problema 20.) b) Con el valor de k encuentre el periodo orbital de Júpiter si su radio medio desde el Sol es 5,2 UA.

Resolución:



$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

T = x años $\quad \Rightarrow \quad T = x \times 3{,}15 \times 10^7$ s

r = y UA $\quad \Rightarrow \quad r = y \times 1{,}5 \times 10^9$ m

$\Rightarrow$ Como $T^2 = kr^3 \quad \therefore \quad k = T^2/r^3$

Luego: $\quad k = \dfrac{4\pi^2}{G.M_{Sol}} \times \dfrac{(1{,}5\times10^9)^3}{(3{,}15\times10^7)^2} \quad \therefore \quad k = 1{,}01 \times 10^{-6}$ s²/m³

Parte (b)

Sabemos que 1 UA = $1{,}5 \times 10^9$ m $\quad \wedge \quad$ r = 5,2 UA

Entonces por la tercera ley de Kepler: $T^2 = kr^3$

Como: $\quad k = 1{,}01 \times 10^{-6}$

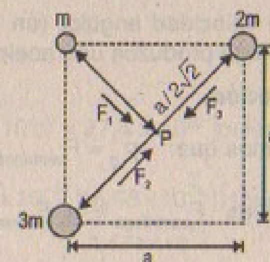
$\Rightarrow \quad T = r\sqrt{kr}$

Reemplazando: $T = 5{,}2 \times (1{,}5 \times 10^9)\sqrt{(1{,}01\times10^{-6})(5{,}2)(1{,}5\times10^9)}$

$\therefore \quad T = 6{,}9 \times 10^{11}$ s

51. Tres objetos puntuales que tienen masas m, 2m y 3m están fijos en las esquinas de un cuadrado de longitud de lado a de modo tal que el objeto más ligero se ubica en la esquina superior izquierda, el objeto más pesado está en la esquina inferior izquierda y el tercero, en la esquina superior derecha. Determine la magnitud y dirección del campo gravitacional resultante en el centro del cuadrado.

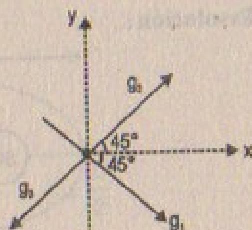
Resolución:



$g_1 = \dfrac{m.G}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad g_1 = -\dfrac{2m.G}{a^2}\hat{r}$

$g_2 = \dfrac{G.3m}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad g_2 = -\dfrac{6m.G}{a^2}\hat{r}$

$$g_3 = \frac{G\,.\,2m}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad g_3 = -\frac{4m.G}{a^2}\,\hat{r}$$



Entonces: $\vec{g}_{Rx} = (g_2 + g_1 - g_3)\cos 45°\,\hat{i}$

$$\Rightarrow \quad \vec{g}_{Rx} = \frac{2m\,.\,G\sqrt{2}}{a^2}\,(-\hat{i})$$

$$\vec{g}_{Ry} = (g_2 - g_1 - g_3)\cos 45°\,\hat{j} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{g}_{resultante} = \frac{2m\,.\,G\sqrt{2}}{a^2}\,(-\hat{i})$$

52. Un avión en un amplio rizo «exterior» puede crear un peso igual a cero en el interior de su cabina. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de la trayectoria de vuelo de un avión que se mueve a 480 km/h para crear una condición de ausencia de peso en su interior?

Resolución:

Datos: $v_{avión} = 133{,}3$ m/s

Por condición: $N - F_g = 0$

$$\Rightarrow \quad M_{avión}\cdot\frac{v^2}{R+R_T} = \frac{G.M_{avión}.M_T}{(R+R_T)^2} \quad \Rightarrow \quad R + R_T = \frac{G\,.\,M_T}{v^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{G\,.\,M_T}{v^2} - R_T$$

Reemplazando: $R = \dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(400/3)^2} - 6{,}37\times10^6$

$$\therefore \quad R = 2{,}24\times10^{10}\text{ m}$$

53. ¿Qué velocidad angular (en revoluciones por minuto) se necesita para que una centrífuga produzca una aceleración de 1 000 g en un radio de 10,0 cm?

Resolución:

Sabemos que: $\vec{F}_g = F_{centripeta}$

Entonces $F_{centrifuga} = -(-F_{centripeta}) = m.a_{centrif.} = m\dfrac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{r} = 10^3 g \text{ (por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \omega.r = \sqrt{10^3 gr}$$

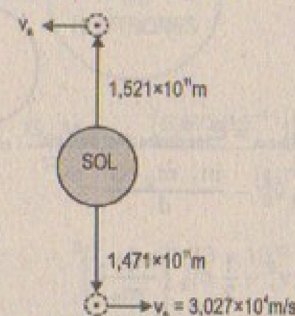
$$\therefore \quad \omega = \frac{\sqrt{10^3 gr}}{r}\,\frac{rad}{s}\times\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\times\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}$$

Reemplazando resulta que: $\omega = \dfrac{\sqrt{10^3\,(9{,}8)(0{,}1)}}{(0{,}1)}\times\dfrac{60}{2\,(3{,}1416)}$

$$\therefore \quad \omega = 2{,}99\times10^3\,\frac{rev}{min}$$

54. La distancia Tierra-Sol es de $1{,}521\times10^{11}$ m en el afelio y de $1{,}471\times10^{11}$ m en el perihelio. Si la velocidad orbital de la Tierra en el perihelio es $3{,}027\times10^4$ m/s, determine a) su velocidad orbital en el afelio, b) la energía cinética y potencial en el perihelio, y c) la energía cinética y potencial en el afelio. ¿La energía total es constante? (Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.)

Resolución:



$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$M_{Sol} = 1{,}991\times10^{30}$ kg

Parte (a)

Por conservación del momento angular

$$L_{afelio} = L_{perihelio}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}521\times10^{11}\,(M_{Tierra})\,.\,v_{afelio} = 1{,}471\times10^{11}\,(M_{Tierra}).v_p$$

$$\therefore \quad v_{afelio\ Tierra} = \frac{1{,}471\times10^{11}}{1{,}521\times10^{11}}\,.\,(3{,}027\times10^4) = 2{,}93\times10^4\text{ m/s}$$

Parte (b) $E_{K\,perihelio} = \dfrac{1}{2}\,M_{Tierra}\cdot v_p^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,perihelio} = \frac{1}{2}(5{,}98\times10^{24})(3{,}027\times10^4)^2 = 27{,}4\times10^{32}\text{ joules}$$

$$E_{potencial} = \frac{-G\,.\,M_T\,.\,M_{Sol}}{r_p} = -\frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})(1{,}991\times10^{30})}{1{,}471\times10^{11}}$$

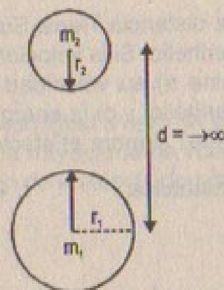
$$\therefore \quad E_{p\,perihelio} = |-54\times10^{32}\text{ joules}|$$

Parte (c)

Como la energía mecánica en el perihelio es igual a la energía mecánica en el afelio e igual a $-26{,}5 \times 10^{32}$ joules entonces es constante.

55. Dos planetas hipotéticos de masa m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están en reposo cuando están apartados por una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se mueven uno hacia otro en el curso de una colisión. a) Cuando su separación centro a centro es d, encuentre la velocidad de cada planeta y su velocidad relativa. b) Encuentre la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen si $m_1 = 2{,}0 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8{,}0 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3{,}0 \times 10^6$ m y $r_2 = 5{,}0 \times 10^6$ m. (Sugerencia: Tanto la energía como el momento se conservan.)

Resolución:



Parte (a)

Por conservación del momento lineal:

$$\vec{P}_{\text{inicial sistema}} = \vec{P}_{\text{final sistema}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

$$\therefore \quad m_1 v_1 = m_2 v_2 \qquad \dots (1)$$

Por otro lado: $E_{\text{mecánica inicial sistema}} = E_{\text{mecánica final sistema}}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{m_1 . m_2 . G}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 . m_2 . G}{d} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1 v_1}{m_2}\right]^2$$

$$\therefore \quad v_1 = m_2 \left[\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}\right]^{1/2}$$

Luego de (1)

$$v_2 = m_1 \left[\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}\right]^{1/2}$$

Por lo tanto la velocidad relativa será:

$$v_{2/1} = v_1 + v_2 = \left[\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}\right]^{1/2}$$

Parte (b)

$$E_{K(m_1)} = \frac{1}{2}(m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{(2\times10^{24})(8\times10^{24})^2(2)(6{,}67\times10^{-11})}{(5{,}0\times10^{6})(10^{25})}$$

$$\therefore \quad E_{K(m_1)} = 1{,}07 \times 10^{32} \text{ joules}$$

$$E_{K(m_1)} = \frac{1}{2}(m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{(8\times10^{24})(2\times10^{24})^2(2)(6{,}67\times10^{-11})}{(5{,}0\times10^{6})(10^{25})}$$

$$\therefore \quad E_{K(m_2)} = 2{,}67 \times 10^{31} \text{ joules}$$

56. Después de una explosión supernova, una estrella puede experimentar un colapso gravitacional hasta alcanzar un estado extremadamente denso conocido como una estrella de neutrones, en el cual todos los electrones y protones se comprimen para formar neutrones. Una estrella de neutrones que tiene una masa aproximada o igual a la del Sol tendría un radio de casi 10 km. Encuentre a) la aceleración de caída libre en su superficie, b) el peso de una persona de 70 kg en su superficie, y c) la energía requerida para llevar un neutrón de $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg de masa desde su superficie hasta el infinito.

Resolución:



$M_{\text{est neut.}} = M_{\text{Sol}} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg

$R_{\text{estrella}} = 10^4$ m

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

$$g = \frac{G . M_{\text{est}}}{R_{\text{est}}^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})}{(10^4)^2}$$

$$\therefore \quad g = 1{,}33 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

Parte (b)

$$w_{\text{persona}} = m.g = (7 \times 10)(1{,}33 \times 10^{12})$$

$$\therefore \quad w_{\text{persona}} = 9{,}3 \times 10^{13} \text{ N}$$

Parte (c)

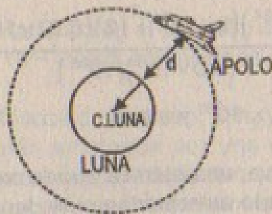
Masa del neutrón $= 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$$E_{\text{total}} = \frac{-G\, M_N . M_{\text{est.}}}{2\, R_{\text{est}}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}(1{,}67\times10^{-27})(1{,}991\times10^{30})}{2\,(10^4)}$$

$$\therefore \quad E_{\text{total}} = -11{,}09 \times 10^{-12} \text{ joules}$$

57. En el momento de orbitar la Luna, la nave espacial *Apolo 11* tenía una masa de $9{,}979 \times 10^3$ kg, su periodo era de 119 min y su distancia media desde el centro de la Luna era de $1{,}849 \times 10^6$ m. Suponga que su órbita era circular y considere a la Luna como una esfera uniforme, calcule a) la masa de la Luna, b) la velocidad orbital de la nave, y c) la energía mínima necesaria para que la nave abandone la órbita y escape del campo gravitacional lunar.

Resolución :



$d = 1{,}849 \times 10^6$ m
$t = 119$ min
$M_{nave\ apolo} = 9{,}979 \times 10^3$ kg

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_{Luna}} \cdot d^3 \Rightarrow M_{Luna} = \dfrac{4\pi^2 . d^3}{G . T^2}$

Reemplazando: $M_{Luna} = \dfrac{4\pi^2 \times (1{,}849\times10^6)^3}{(6{,}67\times10^{-11})(119\times60)^2}$

$\therefore\ M_{Luna} = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg

Parte (b) $v_{nave} = \dfrac{2\pi . d}{T}$

$\Rightarrow\ v_{nave} = \dfrac{2\ (3{,}1416)(1{,}849\times10^6)}{7\ 140}$ $\therefore\ v_{nave} = 1{,}63 \times 10^3$ m/s

Parte (c) $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2.G\ M_{Luna}}{R_{Luna\ (orbital)}}}$

$\Rightarrow\ v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2\times(6{,}67\times10^{-11})(7{,}34\times10^{22})}{1{,}849\times10^6}}$

$\therefore\ v_{esc} = 23 \times 10^2$ m/s

Luego:
La energía mínima necesaria será:

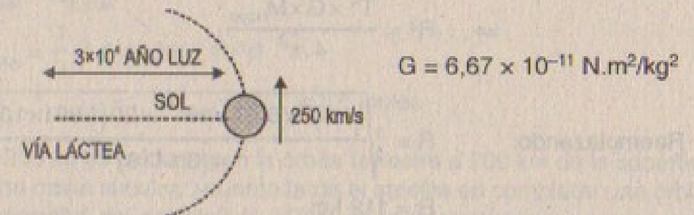
$E_{mínima} = -\dfrac{G . M_{nave} . M_{Luna}}{2d}$

$\Rightarrow\ E_{mínima} = -\dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(9{,}979\times10^3)(7{,}34\times10^{22})}{2\times(1{,}849\times10^6)}$

$\therefore\ |E_{mínima}| = 1{,}32 \times 10^{10}$ joules

58. Los estudios de la relación del Sol con su galaxia –la Vía Láctea– han revelado que nuestra estrella se localiza cerca del borde exterior del disco galáctico, aproximadamente a 30 000 años luz del centro. También, se han encontrado que el Sol tiene una velocidad orbital de casi 250 km/s alrededor del centro galáctico. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? b) ¿Cuál es la masa aproximada de la Vía Láctea? A partir del hecho de que el Sol es una estrella ordinaria, calcule el número de estrellas en la Vía Láctea.

Resolución :



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)
Sabemos que: 1 año luz = $9{,}46 \times 10^{15}$ m

$\Rightarrow\ v = \dfrac{2\pi . R}{T}\ \Rightarrow\ T = \dfrac{2\pi . R}{v}$

Luego: $T = \dfrac{2(3{,}1416)(28{,}38\times10^{19})}{25\times10^4}$ $\therefore\ T = 7{,}1 \times 10^{15}$ s

Parte (b)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G . M_{vía\ láctea}} \times d^3$

$\Rightarrow\ M_{vía\ láctea} = \dfrac{4\pi^2}{G.T^2}\times d^3$

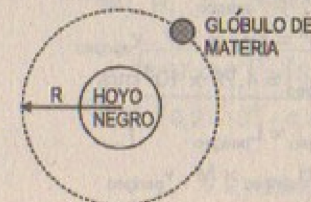
$\Rightarrow\ M_{vía\ láctea} = \dfrac{4(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})} \times \dfrac{1}{(7{,}1\times10^{15})^2} \times (28{,}38 \times 10^{19})^3$

$\therefore\ M_{vía\ láctea} = 2{,}68 \times 10^{41}$ kg

Parte (c)
Aparte del Sol, existen 9 estrellas de tipo planeta.

59. Durante vuelos de cohetes a gran altura se han registrado pulsos de rayos X desde Cisne X–1, una fuente celeste de rayos X, Puede interpretarse que las señales se originan cuando un glóbulo de materia ionizada orbita un hoyo negro con un periodo de 5,0 ms. Si el glóbulo estuviera en una órbita circular alrededor de un glóbulo estuviera en una órbita circular alrededor de un hoyo negro cuya masa es 20 M_{Sol}, ¿cuál es el radio de la órbita?

Resolución :



$M_{hoyo\ negro} = 20\ M_{Sol}$
$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg
$T = 5{,}0$ ms
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\,.\,M_{hoyo}} \times R^3$

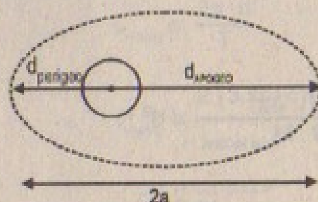
$$\Rightarrow \quad R^3 = \frac{T^2 \times G \times M_{hoyo}}{4.\pi^2}$$

Reemplazando: $R = \sqrt[3]{\dfrac{(5.0)^2 \times 6{,}67\times10^{-11}\times 20(1{,}991\times10^{30})}{4(3{,}1416)^2}}$

$\therefore \quad R = 119$ km

60. El *Vanguard I*, lanzado el 3 de marzo de 1958, es el satélite artificial más viejo aún en órbita. Su órbita inicial tenía un apogeo de 3 970 km y un perigeo de 650 km. Su velocidad máxima era de 8,23 km/s y tenía una masa de 1,60 kg. a) Determine el periodo de la órbita. (Utilice el eje semimayor.) b) Determine las velocidades en el apogeo y en el perigeo. c) Encuentre la energía total del satélite.

Resolución :



$d_{apogeo} = 3\,970$ km
$d_{perigeo} = 650$ km
$v_{máx} = 8{,}23$ km/s
Masa = 1,60 kg

Parte (a) $\quad 2a = d_p + d_a = 3\,970 + 650 = 462 \times 10^4$ m

$\therefore \quad a = 231 \times 10^4$ m

Luego: $\quad v = \dfrac{2\pi(a)}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi.(a)}{v}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2(3{,}1416)(231\times10^4)}{8{,}23\times10^3} \quad \therefore \quad T = 1{,}76 \times 10^3 \text{ s}$$

Parte (b)

Por conservación del momento angular:

$$L_{máx} = L_{apogeo}$$

$\Rightarrow \quad (a) \times M.v_{máx} = d_{apogeo} \times M.v_{apogeo}$

$\Rightarrow \quad 231 \times 10^4 \times 8{,}23 \times 10^3 = 397 \times 10^4 \,.\, v_{apogeo}$

$\therefore \quad v_{apogeo} = 4{,}79 \times 10^3$ m/s

Luego: $\quad L_{apogeo} = L_{perigeo}$

$\Rightarrow \quad d_{apogeo} \times M \,.\, v_{apogeo} = d_{perigeo} \times M \,.\, v_{perigeo}$

$\Rightarrow \quad 397 \times 10^4 \times (4{,}79 \times 10^3) = 65 \times 10^4 \times v_{perigeo}$

$\therefore \quad v_{perigeo} = 29{,}25 \times 10^3$ m/s

Parte (c) $\quad E_{total} = E_{K\,máx}$

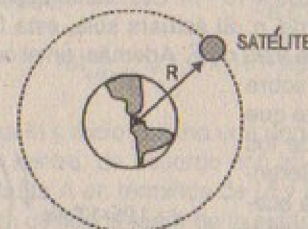
$\Rightarrow \quad E_{total} = \dfrac{1}{2}(1{,}6)(8{,}23 \times 10^3)^2$

$\therefore \quad E_{total} = 54{,}2 \times 10^6$ joules

61. Un satélite de 200 kg es colocado en la órbita terrestre a 200 km de la superficie. a) Suponiendo una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para poner en órbita este satélite (suponiendo que no hay fricción del aire)?

61A. Un satélite de masa m es colocado en la órbita terrestre a una altura h de la superficie. a) Suponiendo una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para poner en órbita este satélite (suponiendo que no hay fricción del aire)?

Resolución :



$M_{satélite} = 2 \times 10^2$ kg
$R = 2 \times 10^5 \text{ m} + R_{Tierra}$
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N/m²
$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_{Tierra}} \times R^3$

$$\Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4(3{,}1416)^2 \times (2\times10^5 + 6{,}37\times10^6)^3}{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}} \quad \therefore \quad T = 5\,298 \text{ s} \approx 5\,300 \text{ s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad M_{sat} \,.\, \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G.M_{sat}\,.\,M_{Tierra}}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{G.M_{Tierra}}{R}}$

Reemplazando: $\quad v = \sqrt{\dfrac{6{,}67\times10^{-11}\times(5{,}98\times10^{24})}{(0{,}2\times10^6 + 6{,}37\times10^6)}}$

$\therefore \quad v = 7{,}79$ km/s

Parte (c)
Energía requerida para poner en órbita será la energía mecánica final – energía mecánica inicial.

Entonces: $E_{\text{mecánica inicial}} = -\dfrac{G.M_s.M_T}{R_T}$ (mínima)

$E_{\text{mecánica final}} = -\dfrac{G.M_s.M_T}{2(R_T+h)}$

Entonces:
Energía requerida es:

$$\frac{G.M_s.M_T(R_T+2h)}{2R_T(R_T+h)} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(2\times10^2)(5{,}98\times10^{24})\left[6{,}37\times10^6+4\times10^5\right]}{2(6{,}37\times10^6)(6{,}37\times10^6+2\times10^5)}$$

$\therefore\ E_{\text{requerida}} = 6{,}45\times10^9$ joules

62. En la novela de ciencia ficción *Mundo anillo* (*Ringworld*) de Larry Niven, un anillo de materia gira alrededor de una estrella (Fig. P14.62). La velocidad rotacional del anillo es $1{,}25\times10^6$ m/s y su radio es $1{,}53\times10^{11}$ m. Los habitantes de este anillo experimentan una fuerza de contacto normal n. Si actuara sola, esta fuerza normal produciría una aceleración hacia adentro de 9,90 m/s². Además, en el centro del anillo la estrella ejerce una fuerza gravitacional sobre éste y sus habitantes. a) Muestre que la aceleración centrípeta total de los habitantes es 10,2 m/s². b) La diferencia entre la aceleración total y la aceleración brindada por la fuerza normal se debe a la atracción gravitacional de la estrella central. Compruebe que la masa de la estrella es aproximadamente igual a 10^{32} kg.

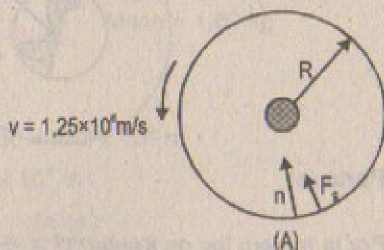


Figura P14.62

Resolución :
$R = 1{,}53\times10^{11}$ m
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)
Por demostrar: $a_{\text{centrípeta hab}} = 10{,}2$ m/s²
Sabemos que: $F_g + n = m_{hab}\cdot a_{hab}$ en (A)
$\Rightarrow\ m_{hab}\cdot a_{\text{centríp.hab}} = m_{hab}$
$\Rightarrow\ a_{\text{cent. hab}} = (1{,}25\times10^6)^2/1{,}53\times10^{11}$
$\therefore\ a_{\text{cent.hab}} = 10{,}2$ m/s² l.q.q.d.

Parte (b)
Por demostrar que: $\dfrac{v^2}{R} - a_{\text{normal}} = a_{fg}$

Sabemos que: $n + F_g = m_{\text{total hab}}\cdot\dfrac{v^2}{R}$

$\Rightarrow\ m_{hab}\,g + F_g = m_{\text{total hab}}\times\dfrac{v^2}{R}$

$\therefore\ a_f = \dfrac{v^2}{R} - g$ l.q.q.d.

Parte (c)
Por demostrar que: $M_{\text{estrella}} = 10^{32}$ kg

De (b) sabemos que: $a_f = \dfrac{G.M_{\text{estrella}}}{R^2} = \dfrac{v^2}{R} - g$

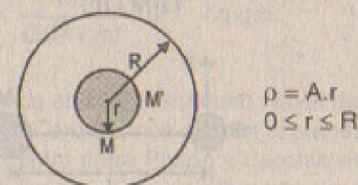
$\Rightarrow\ M_{\text{estrella}} = \dfrac{v^2R - gR^2}{G}$

Reemplazando: $M_{\text{estrella}} = \dfrac{(1{,}25\times10^6)^2(1{,}53\times10^{11}) - (9{,}90)(1{,}53\times10^{11})^2}{6{,}67\times10^{-11}}$

$\therefore\ M_{\text{estrella}} = 1{,}0\times10^{32}$ kg l.q.q.d.

63. Una esfera de masa M y radio R tiene una densidad no uniforme que varía con r, la distancia desde su centro, de acuerdo con la expresión $\rho = Ar$, para $0 \le r \le R$. a) ¿Cómo es la constante A en términos de M y R? b) Encuentre la fuerza sobre una partícula de masa m colocada fuera de la esfera. c) Calcule la fuerza sobre la partícula si se encuentra en el interior de la esfera. (Sugerencia: Vea la sección 14.10 y advierta que la distribución es esféricamente simétrica.)

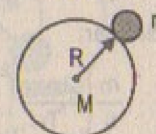
Resolución :



Parte (a)
Sabemos que: $M' = \rho.v \Rightarrow dM' = Ar(4\pi r^2).dr$

$\Rightarrow \int dM' = \int \rho.dv = \int_0^R A.4\pi(r^3)dr \quad \therefore\ A = \dfrac{M}{\pi R^4}$ l.q.q.d.

Parte (b)



$\Rightarrow\ F_g = -\dfrac{G.M.m}{R^2}$

Parte (c)

$$F_g = -\frac{G.M'.m}{r^2}$$

Por otro lado: $\frac{M'}{M} = \frac{v.A.r}{v.A.R} = \frac{4/3\pi Ar^4}{4/3\pi AR^4}$

$$\therefore \; M' = \frac{M.r^4}{R^4}$$

Luego: $F_g = G.M.mr^2/R^4$

64. Dos estrellas de masas M y m, separadas por una distancia d, rotan en órbitas circulares alrededor de su centro de masa (Fig. P14.64). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\, d^3$$

(Sugerencia: Aplique la segunda ley de Newton a cada estrella y observe que la condición del centro de masa requiere que $Mr_2 = mr_1$, donde $r_1 + r_2 = d$.)

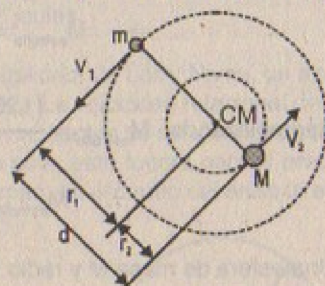
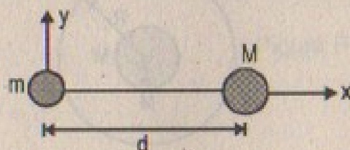


Figura P14.64

Resolución :

Por demostrar que: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} . d^3$



Por definición:

$$r_{CM} = \frac{M(d)}{m+M}$$

Por gráfico: $r_1 = \frac{M(d)}{m+M} = \frac{M(r_1+r_2)}{m+M}$

$$\Rightarrow \; r_1(m+M) = M(r_1+r_2) \quad \therefore \quad Mr_2 = mr_1 \; ... (1)$$

Por otro lado: por movimiento circular:

$$F_{c(m)} = m.\frac{v_1^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{r_1}\left(\frac{2\pi.r_1}{T_1}\right)^2 = \frac{G.m(M+m)}{r_1^2}$$

$$F_{c(M)} = \frac{M.v_2^2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{r_2}\left(\frac{2\pi r_2}{T_2}\right)^2 = \frac{G.M(M+m)}{r_2^2}$$

Luego: $m.r_1(4\pi^2) = T_1^2 \times G . \frac{m(M+m)}{r_1^2}$ ... (2)

$$M.r_2(4\pi^2) = T_2^2 \times G . \frac{M(M+m)}{r_2^2} \; ... (3)$$

Por condición de (1) entonces se cumple que (2) = (3)

Luego: $T_1^2 \times \frac{m}{r_1^2} = T_2^2 \times \frac{M}{r_2^2} \quad \therefore \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = k$

Por la tercera ley de Kepler:

$$T_1^2 = r_1^3\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right) = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}(d-r_2)^3$$

$$T_2^2 = r_2^3\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right) = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}(d-r_1)^3$$

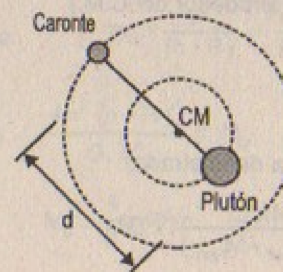
Si sumamos:

Resulta que: $T_1^2 + T_2^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\left[(d-r_2)^3 + (d-r_1)^3\right]$

$$\Rightarrow \; T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} . d^3 \quad \text{l.q.q.d.}$$

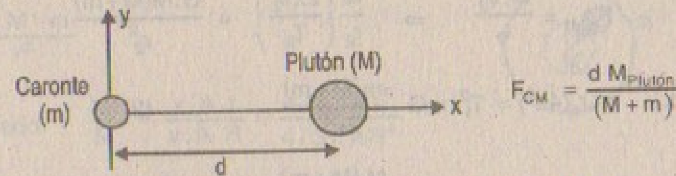
65. En 1978, los astrónomos en el Observatorio Naval de EU descubrieron que Plutón tiene una luna, llamada Caronte, que eclipsa al planeta cada 6,4 días. Dado que la separación centro a centro entre Plutón y Caronte es de 19 700 km, encuentre la masa total (M + m) de los dos cuerpos. (*Sugerencia: Véase el problema 64.*)

Resolución :



T = 6,4 días
$d = 197 \times 10^5$ m
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

(hallando el centro de masa)



$$F_{CM} = \frac{d\,M_{Plutón}}{(M+m)}$$

Luego por condición y demostración del problema 64 se cumple que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G.(M+m)} \times d^3$$

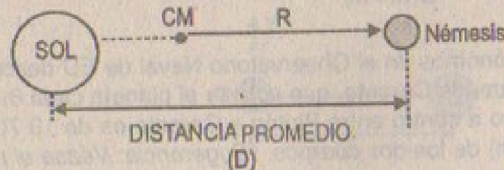
$$\Rightarrow \left(6{,}4 \text{ días} \times \frac{24}{1 \text{ día}} \times \frac{3\,600}{1 \text{ h}}\right)^2 = \frac{4(3{,}1416)^2(197\times10^5)^3}{(6{,}67\times10^{-11})(M+m)}$$

Despejando: $M_{Caronte} + M_{Plutón} = \dfrac{4(3{,}1416)^2(197\times10^5)^3}{(6{,}4\times24\times3\,600)^2(6{,}67\times10^{-11})}$

En consecuencia: Masa del Caronte + Masa del Plutón = $1{,}48 \times 10^{22}$ kg

66. En un intento por explicar los choques de grandes meteoros con la Tierra, los científicos han postulado la existencia de una estrella acompañante que es extremadamente tenue y que está muy alejada del Sol. Si esta estrella (que algunos científicos llaman Némesis) tiene un periodo orbital de $3{,}0 \times 10^7$ años alrededor del centro de masa Sol–Némesis, y una masa de $0{,}20\ M_{Sol}$, determine la distancia promedio de esta estrella desde el Sol. $M_{Sol} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.

Resolución :



Datos: $T_{Némesis} = 3{,}0 \times 10^7$ años (alrededor del C.M.)
$M_{Némesis} = 0{,}2\ M_{sol}$
$M_{Sol} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Sabemos que: (por el problema 64 ya demostrado)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G.(M_{Sol}+M_{Nem})} \times D^3$$

Por otro lado: $T = 3{,}0 \times 10^7 \text{ años} \times \dfrac{365 \text{ dias}}{1 \text{ año}} \times \dfrac{24 \text{ horas}}{1 \text{ dia}} \times \dfrac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ hora}} = 9{,}5 \times 10^{14}$ s.

Además: $M_{némesis} = 0{,}2\ M_{sol} = 0{,}2 \times 2 \times 10^{30} = 4 \times 10^{29}$ kg

$\Rightarrow M_{sol} + M_{némesis} = 2{,}0 \times 10^{30} + 4 \times 10^{29} = 2{,}4 \times 10^{30}$ kg

Luego: $(9{,}5 \times 10^{14})^2 = \dfrac{4(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})(2{,}4\times10^{30})} \cdot D^3$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{(9{,}5\times10^{14})^2\times(6{,}67\times10^{-11})(2{,}4\times10^{30})}{4\,(3{,}1416)^2}}$$

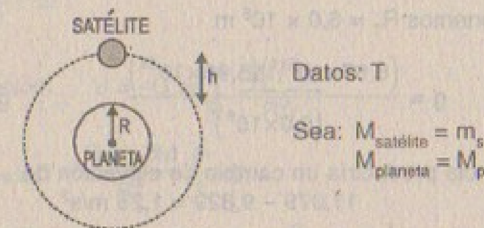
$\therefore\ D_{promedio}$ = calculadora

67. Un satélite está en una órbita circular alrededor de un planeta de radio R. Si la altitud del satélite es h y su periodo es T, a) muestre que la densidad del planeta es

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3$$

b) Calcule la densidad promedio del planeta si el periodo es de 200 min y la órbita del satélite es cercana a la superficie del planeta.

Resolución :



Datos: T

Sea: $M_{satélite} = m_s$
$M_{planeta} = M_p$

Parte (a)

Por demostrar que: $\rho = \dfrac{3\pi}{G.T^2}\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^3$

Sabemos que: $m_S \times \dfrac{v^2}{(h+R)} = \dfrac{m_S}{(h+R)}\left[\dfrac{2\pi\,(h+R)}{T}\right]^2 = \dfrac{G.m_S.M_p}{(h+R)^2}$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2\,(h+R)^3}{G.T^2} = M_p \quad \ldots (1)$$

Pero: $M_p = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \dfrac{3\,M_p}{4\pi R^3} \quad \ldots (2)$

Luego: (2) en (1): $\dfrac{4\pi^2 (h+R)^3}{G.T^2} = \dfrac{4}{3}\pi R^3.\rho \quad \therefore \quad \rho = \dfrac{3\pi}{G.T^2}\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^3$ l.q.q.d.

Parte (b)

$h \to 0$ y $T = 2\times 10^2$ min $= 12\times 10^3$ s, $R_{Tierra} = 6{,}37\times 10^6$ m

Entonces: $\rho_{promedio} = \dfrac{3(3{,}1416)}{(6{,}67\times 10^{-11})(12\times 10^3)^2} \quad \therefore \rho_{prom} = 981$ kg/m³

68. Se afirma que un medidor de gravedad portátil, disponible en el comercio, es suficientemente sensible para detectar cambios en g hasta 1 parte en 10^{11}. En la superficie terrestre ¿qué cambio en la elevación produciría esta variación? Suponga que el radio de la Tierra es $6{,}0\times 10^6$ m.

Resolución:

Sabemos que: $g = \dfrac{G.M_T}{R_T^2}$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{(6{,}67\times 10^{-11})(5{,}98\times 10^{24})}{(6{,}37\times 10^6)^2}$$ considerando: $R_T = 6{,}37\times 10^6$ m

$\therefore \quad g = 9{,}829$ m/s²

Si ahora suponemos $R_T = 6{,}0\times 10^6$ m

Entonces: $g = \dfrac{(6{,}67\times 10^{-11})(5{,}98\times 10^{24})}{(6{,}0\times 10^6)^2} \quad \therefore \quad g = 11{,}079$ m/s²

En consecuencia produciría un cambio de elevación de:

$11{,}079 - 9{,}829 = 1{,}25$ m/s²

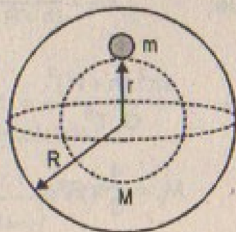
69. Una partícula de masa m se localiza en el interior de una esfera sólida uniforme de radio R y masa M. Si la partícula está a una distancia r del centro de la esfera, a) demuestre que la energía potencial gravitacional del sistema es $U = (GmM/2R^3)r^2 - 3GmM/2R$. b) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional al llevar la partícula desde la superficie de la esfera hasta su centro?

Resolución:

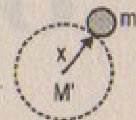
Parte (a)

Por demostrar que:

$$U = \frac{(G.m.M)}{2R^3}.r^2 - \frac{3G.m.M}{2R}$$



Hallando inicialmente la energía potencial del sistema



$0 \le x \le r$

Sabemos que: $dM' = \rho\,.\,4\pi\,.x^2.dx$

Además: como $M = \rho.\dfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

Luego: $U_{inicial} = -G.m\displaystyle\int_0^r \frac{dM'}{x} = -\frac{G.M.m}{R^3}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^r$

$\therefore \quad U_{inicial} = -\dfrac{G.m.M.r^2}{2R^3}$

Por otro lado:

Hallando U_p del sistema

$dm = \rho.\left(\dfrac{4}{3}\pi.r^3\right)' = 4.\pi.r^2.\rho.dr$

Además: $M = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \therefore \quad \rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

Luego: $dm = \dfrac{3M}{R^3}r^2dr$

Entonces: por definición: $U = -G.m\displaystyle\int \frac{3Mr^2dr}{R^3 r}$

$\Rightarrow \quad U(r) - U_{inicial} = -\dfrac{G.m.3M}{R^3}\displaystyle\int_0^R r.dr$

$\Rightarrow \quad U(r) = \dfrac{G.m.M.r^2}{2R^3} - \dfrac{3.G.m.M}{R^3}\left(\dfrac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^R$

$\therefore \quad U(r) = \dfrac{G.m.Mr^2}{2R^3} - \dfrac{3G.m.M}{2R}$ l.q.q.d.

Capítulo 15

MECÁNICA DE FLUIDOS

PRESIÓN

1. Calcule la masa de una esfera de hierro sólida que tiene un diámetro de 3,0 cm.

Resolución:

Sabemos que: masa = $\rho \cdot V$ $\rho_{hierro} = 7{,}86 \times 10^3$ kg/m³

Por otro lado volumen $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{4}{3}(3{,}1416)\left[\frac{3{,}0}{2}\right]^3 = 14{,}14 \text{ cm}^3 \equiv 14{,}14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Luego: $\text{Masa} = (7{,}86 \times 10^3)(14{,}14 \times 10^{-6}) = 111{,}1 \times 10^{-3} \text{ kg} = 0{,}111 \text{ kg}$

2. Un pequeño lingote de metal grisáceo brillante tiene un volumen de 25 cm³ y una masa de 535 g. ¿De qué tipo de metal se trata? (Véase la tabla 15.1.)

Resolución:

Por dato:
Volumen = 25 cm³ Masa = 535 g

Entonces: $\rho = \frac{535}{25} = 21{,}4$ g/cm³

o equivalente a $\rho = 21{,}4 \times 10^3$ kg/m³

En consecuencia se trata del «platino».

3. Calcule la densidad del núcleo de un átomo. ¿Qué sugiere este resultado en relación con la estructura de la materia? (Aproveche el hecho de que la masa de un protón es de $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y su radio es aproximadamente 10^{-15} m.)

Resolución:

Sabemos que $\rho = \frac{M}{V}$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1{,}67\times10^{-27}}{\frac{4}{3}(3{,}1416)\left(10^{-15}\right)^3} \qquad \therefore \quad \rho = 3{,}99 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

Se podría concluir que:

Toda la masa del núcleo del átomo está contenida en el protón, esto quiere decir que el resto no contiene masa, es espacio libre.

4. Un rey manda a hacer una corona de oro con una masa de 0,5 kg. Cuando ésta llega del taller de orfebrería, se mide su volumen y se encuentra que es igual a 185 cm³. ¿La corona es de oro sólido?

Resolución :

Sabemos que: $\rho = \frac{0{,}5}{185} \times 10^6$

$\therefore \quad \rho = 2{,}7 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$

Como la densidad del oro es: $19{,}3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, entonces:
La corona no es de oro sólido.

5. Una mujer de 50 kg se balancea sobre uno de los altos tacones de sus zapatos. Si el tacón es circular con radio de 0,5 cm, ¿qué presión ejerce la mujer sobre el piso?

Resolución :

Radio = 5×10^{-3} m
F = 50 × (9,80)

Por definición: $P = \frac{F}{A}$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{50\times(9{,}80)}{\pi\left(5\times10^{-3}\right)^2} = \frac{50.(9{,}80)}{(3{,}1416)\left(5\times10^{-3}\right)^2}$$

$\therefore \quad P = 6{,}24 \times 10^6\ \text{N/m}^2$

6. ¿Cuál es la masa total de la atmósfera de la Tierra? (El radio terrestre es de $6{,}37 \times 10^6$ cm y la presión atmosférica en la superficie es $1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2$.)

Resolución :

Datos: Radio terrestre $= 6{,}37 \times 10^6$ m
$P_{atmosférica} = 1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2$

Sabemos que: $P = \frac{F_g}{\text{área}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Presión atm.} = \frac{F_g}{\pi\left(6{,}37\times10^6\right)^2} \quad \Rightarrow F_g = (1{,}01 \times 10^5)(3{,}1416)(6{,}37 \times 10^6)^2$$

$\therefore \quad F_g = 128{,}75 \times 10^{17}$ N

Como: $128{,}75 \times 10^{17} = M\ .\ (g) = M(9{,}80)$

$\therefore \quad M_{\text{total de la atmósfera}} = 13{,}14 \times 10^{17}$ kg

7. Encuentre la densidad de una estrella de neutrones. Se cree que uno de dichos objetos tiene un radio de sólo 10 km y una masa igual a la del Sol. ($M_{Sol} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.)

Resolución :

$$\text{Sabemos que:} \quad \rho_{estrella} = \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad \rho_{estrella} = \frac{M_{Sol}}{V} = \frac{1{,}99\times10^{30}}{\frac{4}{3}(\pi)\left(10^4\right)^3}$$

$\therefore \quad \rho_{estrella} = 4{,}75 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD

8. Determine la presión absoluta en el fondo de un lago que tiene 30 m de profundidad.

Resolución :

$$P_{absoluta} = P_{atm.} + \rho_{H_2O}\ .\ gh \quad \Rightarrow \quad P_{abs.} = 1{,}05 \times 10^5 + (1{,}00 \times 10^3)(9{,}80)(30)$$

$\therefore \quad P_{absoluta} = 3{,}95 \times 10^5$

9. Un recipiente cúbico sellado con un borde L se coloca sobre un carrito, el cual se mueve horizontalmente con una aceleración a como en la figura P15.9. El cubo está lleno con un fluido que tiene densidad ρ. Determine la presión P en el centro del cubo.

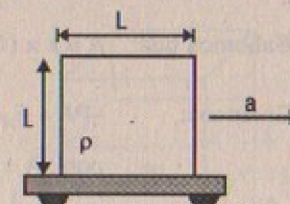
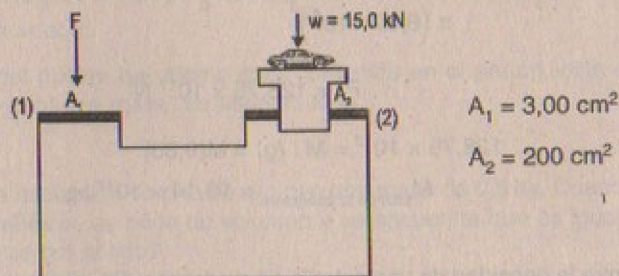


Figura P15.9

Datos incorrectos.

10. El pequeño émbolo de un elevador hidráulico tiene un área de sección transversal igual a 3,00 cm^2, en tanto que el área del émbolo grande es de 200 cm^2 (Fig. 15,4). ¿Qué fuerza debe aplicarse al émbolo pequeño para levantar una carga de 15,0 kN? (En los talleres esto usualmente se lleva a cabo con aire comprimido.)

Resolución :



$A_1 = 3,00\ cm^2$

$A_2 = 200\ cm^2$

Por el principio de Pascal: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{F_1}{A_2} \Rightarrow F = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_1 \quad ...(1)$$

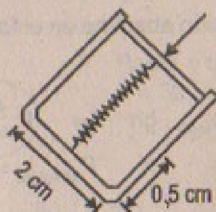
Pero: $F_1 = w = 15,0\ kN$

Entonces en (1): $F = \left(\frac{3}{200}\right)15,0\ kN \quad \therefore \quad F = 225\ N$

11. El resorte del medidor de presión mostrado en la figura 15.2 tiene una constante de fuerza de 1 000 N/m, y el émbolo tiene un diámetro de 2,0 cm. Calcule la profundidad en el agua para la cual el resorte se comprime 0,50 cm.

Resolución :

$k = 10^3\ N/m$
$P_0 = 1,013 \times 10^5\ Pa$
$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3\ kg/m^3$

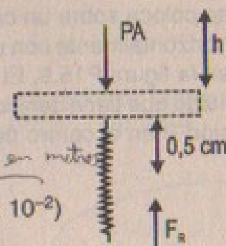


Sabemos que: $A = \pi \times (10^{-2})^2 = 3,1416 \times 10^{-4}\ m^2$

Entonces: $-PA + F_R = 0$

$\Rightarrow \rho gh \cdot A = kx$

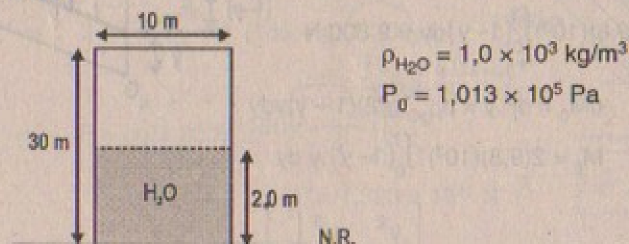
$\Rightarrow (10^3)(9,80)(10^{-4})(3,1416)h = 10^3(0,5 \times 10^{-2})$



$\therefore \quad h = 1,62\ m$

12. Una alberca tiene dimensiones de 30 m × 10 m y un fondo plano. Cuando la alberca está llena a una profundidad de 2,0 m con agua potable, ¿cuál es la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo? ¿Sobre cada extremo? ¿Sobre cada lado?

Resolución :



$\rho_{H_2O} = 1,0 \times 10^3\ kg/m^3$

$P_0 = 1,013 \times 10^5\ Pa$

$F_{total/fondo} = (P_o + \rho gh)A$

$\Rightarrow F_{total/fondo} = [1,013 \times 10^5 + (1,0 \times 10^3)(9,8)(2)](30)(10)$

$\therefore F_{total/fondo} = 3,63 \times 10^7\ N$

Por otro lado: $F_{cada\ extremo} = P_0\,A$

$\Rightarrow F_{cada\ extremo} = (1,013 \times 10^5)(30)(2)$

$\therefore F_{cada\ extremo} = 6,078 \times 10^6\ N$

13. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una ventosa de succión (completamente al vacío) y un techo para soportar el peso de un estudiante de 80 kg?

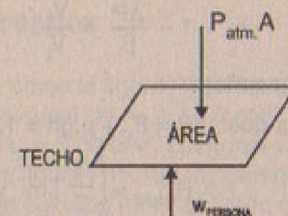
Resolución :

Entonces:

$A \times P_{atm.} = (80)(9,80)$

$\Rightarrow A \times 1,013 \times 10^5 = 80(9,80)$

$\therefore A = 77,4 \times 10^{-4}\ m^2 = 77,4\ cm^2$



14. El tanque en la figura P15.14 se llena a una profundidad de 2,0 m con agua. En el fondo del tanque hay una escotilla rectangular de 1,0 m de altura y 2,0 m de ancho que está articulada en su parte superior. a) Determine la fuerza neta sobre la escotilla. b) Encuentre el momento de torsión ejercido alrededor de las bisagras.

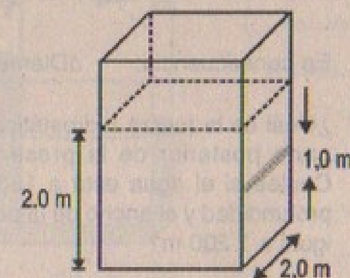
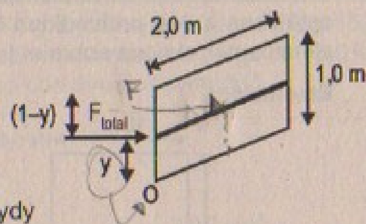


Figura P15.14

Resolución :

Parte (a)



$$dF = \rho_{H_2O}.g(1-y).2dy$$

$$\Rightarrow \quad F_{neta} = 2(9,8)(10^3)\int_0^1(1-y)dy = 9\,800 \text{ N}$$

Parte (b) $\quad dM_0 = dF.y = \rho_{H_2O}.g(2)(1-y)ydy$

$$\Rightarrow \quad M_0 = 2(9,8)(10^3)\int_0^1(1-y).y\,dy$$

$$\therefore \quad M_0 = 2(9,8)(10^3)\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right] = 3\,266,7 \text{ N.m}$$

15. Una bola de cobre sólida con un diámetro de 3,00 m a nivel del mar se coloca en el fondo del océano, a una profundidad de 10,000 km. Si la densidad del agua de mar es 1,030 kg/m³, ¿en qué cantidad (aproximadamente) el diámetro de la bola disminuye cuando alcanza el fondo? El módulo volumétrico del cobre es 14×10^{10} N/m².

Resolución :

Sabemos que: $\boxed{\Delta P = -\beta . \dfrac{\Delta V}{V}}$ $\quad \Rightarrow \quad \Delta P = \beta\left(1-\dfrac{V_f}{V_i}\right)$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{\Delta P}{\beta} = \frac{V_f}{V_i} \qquad \therefore \quad R^3_{final} = R^3_{inicial}\left(1-\frac{\Delta P}{\beta}\right)$$

Reemplazando:

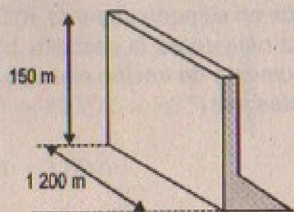
Sabemos que: $\quad P = P_0 + \rho.gh = 1,013\times10^5 + (1,030)(9,80)(10^7)$

Además: $\quad R_{inicial} = \left(\dfrac{3}{2}\right)$ m $\quad$ y como $\beta_{cobre} = 14\times10^{10}$ N/m²

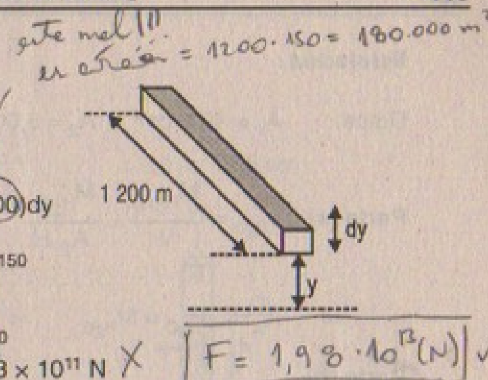
Entonces: $\quad R_{final} = 1,5\sqrt[3]{1-\dfrac{(1,030)(9,80)(10^7)}{14\times10^{10}}} = 1,499\times10^3$ mm

En consecuencia: $\quad \Delta\text{Diámetro} = D_{final} - D_{inicial} = 0,722$ mm

16. ¿Cuál es la fuerza hidrostática en la parte posterior de la presa Grand Coulee si el agua está a 150 m de profundidad y el ancho de la presa es igual a 1 200 m?



Resolución :



Entonces: $\quad dF = P.dA$

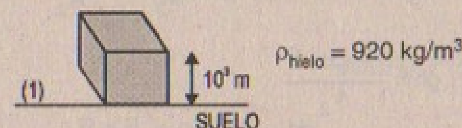
$$\Rightarrow \quad \int dF = \int_0^{150}\rho g\,(150-y)(1\,200)dy$$

$$\Rightarrow \quad F = \rho g(1\,200)\left[150y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{150}$$

$$\therefore \quad F = 1,323\times10^{11} \text{ N}$$

17. En algunos lugares de la placa de hielo de Groenlandia el espesor es de 1,0 km. Calcule la presión sobre el suelo que está debajo del hielo. (ρ_{hielo} = 920 kg/m³.)

Resolución :



ρ_{hielo} = 920 kg/m³

$$P_1 = P_0 + \rho.gh$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = 1,013\times10^5 + (920)(9,80)(10^3)$$

$$\therefore \quad P_1 = 91,2\times10^5 \text{ Pa}$$

MEDIDA DE LA PRESIÓN

18. Se vierte mercurio dentro de un tubo en U, como la figura P15.18a. El brazo izquierdo del tubo tiene un área de sección transversal de A_1 = 10,0 cm², y el área de la sección transversal del brazo derecho es A_2 = 5,00 cm². Luego se vierten 100 g de agua en el brazo derecho, como se ve en la figura P15.18b. a) Determine la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo en U. b) Dado que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm³, ¿qué distancia, h, sube el mercurio en el brazo izquierdo?

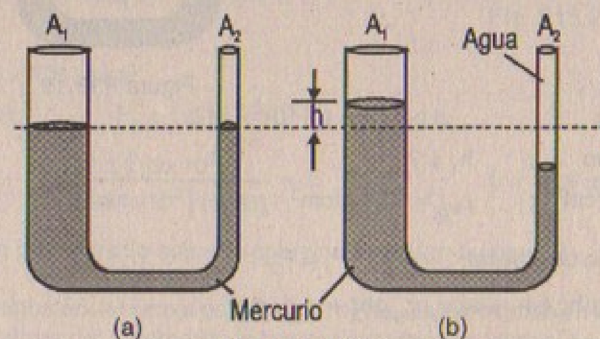


Figura P15.18

Resolución :

Datos: $A_1 = 10{,}0\ cm^2$; $A_2 = 5{,}00\ cm^2$; $m_{H_2O} = 100\ g$; $\rho_{mercurio} = 13{,}6\ g/cm^3$

Parte (a) $\rho_{H_2O} = \dfrac{M_{H_2O}}{V} = \dfrac{M_{H_2O}}{A_2.H}$

$$\Rightarrow \quad A_2H \cdot \rho_{H_2O} = M_{H_2O} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{M_{H_2O}}{A_2 \times \rho} = \frac{100}{(1\ g/cc)(5)} = 20{,}0\ cm$$

Parte (b)

Por el principio de Arquímedes: $P_C = P_D$

$$\Rightarrow \quad P_C = \rho_{Hg} \cdot g.h \quad ; \quad P_D = \frac{F_2}{A_2} = \frac{M_{H_2O} \cdot g}{A_2}$$

Luego: $\rho_{Hg} \cdot gh = \dfrac{M_{H_2O} \cdot g}{A_2}$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{M_{H_2O}}{A_2 \cdot \rho_{Hg}} = \frac{100\ g}{(5\ cm^2)(13{,}6\ g/cm^3)}$$

$$\therefore \quad h = 1{,}47\ cm$$

19. Un tubo en U de área de sección transversal constante, abierto a la atmósfera, se llena parcialmente con mercurio. Se vierte agua después en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como la mostrada en la figura P15.19, con $h_2 = 1{,}00$ cm, determine el valor de h_1.

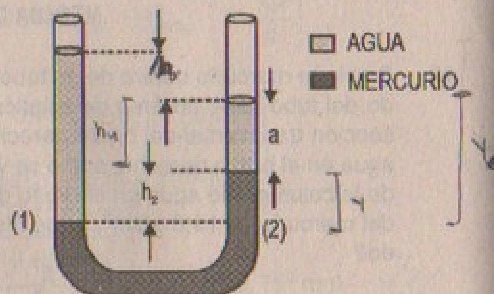


Figura P15.19

Resolución :

$h_2 = 1{,}00$ cm ; $h_1 = ?$

$\rho_{H_2O} = 1\ g/cm^3$; $\rho_{Hg} = 13{,}6\ g/cm^3$

Por principio de Pascal: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\, g(h_2 + h_1 + a) = \rho_{Hg}\, gh_2 + \rho_{H_2O} \cdot ga$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot gh_2 + \rho_{H_2O} \cdot gh_1 + \rho_{H_2O} \cdot ga = \rho_{Hg} \cdot gh_2 + \rho_{H_2O}/ga$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot h_1 = h_2\,(\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})$$

Reemplazando: $h_1 = \dfrac{(1{,}00)\,(13{,}6 - 1)}{1{,}00}$ $\quad \therefore \quad h_1 = 12{,}6\ cm$

20. El tubo vertical abierto en la figura P15.20 contiene dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2, que no se mezclan. Demuestre que la presión a la profundidad $h_1 + h_2$ está dada por la expresión $P = P_o + \rho_1\, gh_1 + \rho_2\, gh_2$.

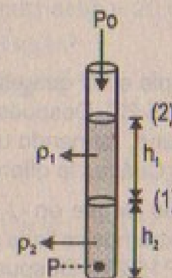


FIGURA P15.20

Resolución :

Por demostrar que: $P = P_o + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2$

Sabemos que: $P = \rho_2 \cdot gh_2 + P_1 + P_2$

Además: $P_1 = \rho_1\, g\, h_1$; $P_2 = P_o$

Entonces: $P = P_o + \rho_1\, g\, h_1 + \rho_2\, g\, h_2$ l.q.q.d.

21. Blaise Pascal reprodujo el barómetro de Torricelli utilizando (como un francés lo haría) un vino tinto de Bordeaux como el líquido de trabajo (Fig. P15.21). La densidad del vino empleado fue de $0{,}984 \times 10^3\ kg/m^3$. ¿Cuál fue la altura h de la columna de vino para la presión atmosférica normal? ¿Esperaría usted que el vacío sobre la columna fuera tan bueno como para el mercurio?

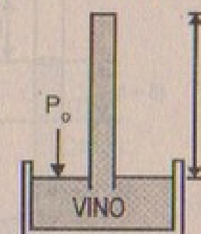


Fig. P15.21

Resolución :

$\rho_{vino} = 0{,}984 \times 10^3\ kg/m^3$

Por Torrichelli: $P_o = 1{,}013 \times 10^5\ Pa = \rho_{vino} \cdot g.h$

$$\Rightarrow \quad \frac{1{,}013 \times 10^5}{(0{,}984 \times 10^3)\,(9{,}80)} = h \qquad \therefore \quad h = 10{,}5\ m$$

No esperaría que el vacío sobre la columna fuera tan bueno.

22. La presión atmosférica normal es $1{,}013 \times 10^5$ Pa. La aproximación de una tormenta hace que la altura del barómetro de mercurio disminuya 20 mm a partir de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica? (La densidad del mercurio es $13{,}59\ g/cm^3$.)

Resolución :

Sabemos que: $P_0 = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa} = \rho_{Hg}\, g \times (0{,}76 \text{ m})$

Si «h» disminuye 20 mm = 2,0 cm, entonces:

$$P_0 = (13{,}59)(9{,}80)(0{,}74) \times 10^3$$

$$\therefore \quad P_0 = 0{,}986 \times 10^5 \text{ Pa}$$

23. Un tubo simple en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua (Fig. P15.23). Después se vierte queroseno ($\rho_k = 0{,}82 \times 10^3$ kg/m³) en una de los brazos del tubo, formando una columna de 6,0 cm de altura, como se muestra en el diagrama . ¿Cuál es la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido?

23A. Un tubo simple en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua (Fig. P15.23). Después se vierte queroseno de densidad ρ_k en una de los brazos del tubo, formando una columna de altura h_k, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido?

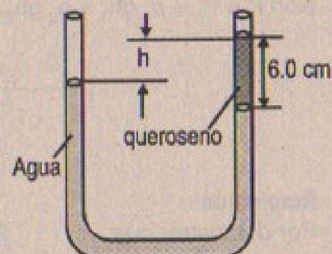
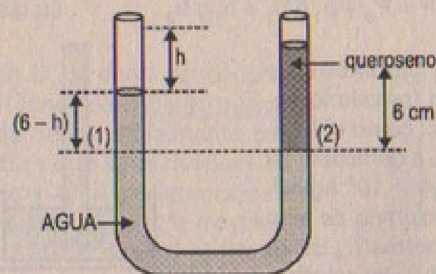


Figura P15.23

Resolución :



$\rho_{H_2O} = 1{,}0 \times 10^3$ kg/m³
$\rho_k = 0{,}82 \times 10^3$ kg/m³

Por principio de hidrostática y pascal $\qquad P_1 = P_2$

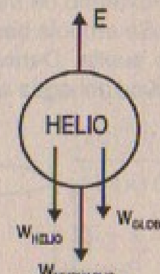
$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g(6 - h) = P_{atm} + \rho_k \cdot g\,(6)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{6}{10^3}\,(1 \times 10^3 - 0{,}82 \times 10^3) \qquad \therefore \; h = 1{,}08 \text{ cm}$$

FUERZAS DE FLOTACIÓN Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

24. Globos de helio que tienen masas de 5,0 g cuando están desinflados y con radio de 20,0 cm cada uno son utilizados por un muchacho de 20,0 kg para levantarse a sí mismo del suelo. ¿Cuántos globos se necesitan si la densidad del helio es 0,18 kg/m³ y la densidad del aire es 1,29 kg/m³?

Resolución :



Masa del globo = 5 × 10⁻³ kg
Radio del globo = 0,2 m
Masa del muchacho = 20,0 kg
$\rho_{helio} = 0{,}18$ kg/m³
$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³

$$n.\rho_{aire} \cdot g\left(\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right) = n.0{,}005g + 20g + n.\rho_{He} \cdot g\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right]$$

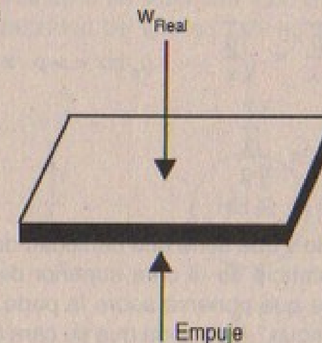
Entonces: $\quad n\left[\rho_{aire}\left(\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right) - \rho_{He}\left[(4/3)\pi(0{,}2)^3\right] - 0{,}005\right] = 20$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{20}{(1{,}29)\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right] - (0{,}18)\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right] - 0{,}005}$$

$$\therefore \quad n = 621 \text{ globos}$$

25. ¿Cuál es el peso real de un metro cúbico de madera de balsa que tiene una densidad relativa de 0,15? Recuerde que el verdadero peso de un objeto es su peso en el vacío.

Resolución :



Datos:

$$\frac{\rho_{madera}}{\rho_{H_2O}} = 0{,}15$$

Sabemos que:

$$W_{real\ madera} = \rho_{madera} \cdot g \cdot V_{madera}$$

$$\Rightarrow \quad W_{real\ madera} = (0{,}15)\,\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{madera}$$

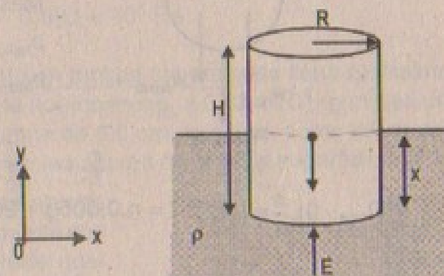
$$\Rightarrow \quad W_{real\ madera} = (0{,}15)\,(1000)(9{,}81)(1)$$

$$\therefore \quad W_{real\ madera} = 1\,470 \text{ N}$$

26. Un largo tuvo cilíndrico de radio r se pesa en un extremo de manera que flota verticalmente en un fluido que tiene una densidad ρ. Se empuja hacia abajo una distancia x a partir de su posición de equilibrio y se suelta. Demuestre que ejecutará movimiento armónico simple si los efectos resistivos del agua se ignoran, y determine el periodo de las oscilaciones.

Resolución:

Inicialmente se encuentra en equilibrio, entonces



$\Sigma F_y = 0$

$\rightarrow \quad \rho_c \cdot gA.H = \rho gA.x$

$\therefore \quad \rho_c \cdot H = \rho.x \quad ...(1)$

Sabemos que el empuje del agua es una fuerza en contra del movimiento, entonces:

$$-E = m.\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\rho g\pi R^2 x = \rho_c \cdot \pi R^2 H.\ddot{x} \;\Rightarrow\; \rho_c H\ddot{x} + \rho g x = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{\rho g}{\rho_c H}.x = 0$$

(Ecuación diferencial del M.A.S.)

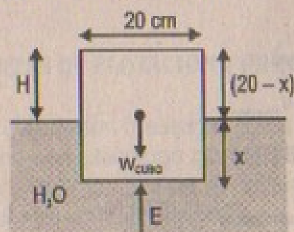
En consecuencia: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Pero: $\omega = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_c H}} = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho . x}} = \sqrt{\dfrac{g}{x}} \qquad \rho_c Hx <> \rho . x$

Entonces: $T = 2\pi . \sqrt{\dfrac{\rho_c H}{\rho g}} = 2\pi . \sqrt{\dfrac{x}{g}}$

27. Un cubo de madera de 20 cm de lado y que tiene una densidad de $0{,}65 \times 10^3$ kg/m³ flota en el agua. a) ¿Cuál es la distancia de la cara superior del cubo al nivel de agua? b) ¿Qué peso de plomo tiene que ponerse sobre la parte superior del cubo para que ésta esté justo al nivel del agua? (Suponga que su cara superior permanece paralela a la superficie del agua.)

Resolución:



$\rho_{cubo} = 0{,}65 \times 10^3$ kg/m³

$\rho_{H_2O} = 1{,}00 \times 10^3$ kg/m³

Parte (a)

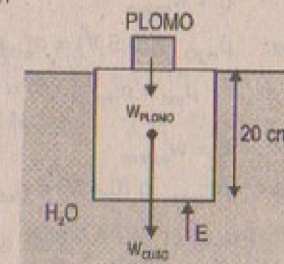
Por la tercera ley: $\quad w_{cubo} = \text{empuje}$

$$\Rightarrow \quad \rho_{cubo} V_{cubo} \cdot g = \rho_{H_2O} \cdot g\,(20)^2(x)$$

$$\therefore \quad x = \frac{(20)^3(0{,}65\times10^3)}{(1{,}0\times10^3)(20)^2} = 13 \text{ cm}$$

Nos piden: $\quad H = 20 - x = 20 - 13 = 7$ cm

Parte (b)



Entonces:

$$w_{plomo} + w_{cubo} = \text{empuje}$$

$$w_{plomo} = \text{empuje} - w_{cubo}$$

Reemplazando: $w_{plomo} = \pi_{H_2O} \cdot g\, V_{cubo} - \rho_{cubo} \cdot g\, V_{cubo}$

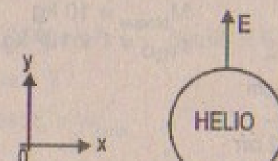
$\Rightarrow \quad w_{plomo} = g . V_{cubo}\,(\rho_{H_2O} - \rho_{cubo})$

$\Rightarrow \quad w_{plomo} = (9{,}80)(0{,}2)^3\,[1 \times 10^3 - 0{,}65 \times 10^3]$

$\therefore \quad w_{plomo} = 2{,}8$ kg

28. Un globo aerostático se llena con 4,00 m³ de helio. ¿Qué carga puede levantar el globo? (La densidad del aire es 1,29 kg/m³; la densidad del helio es 0,180 kg/m³.)

Resolución:



$V_{helio} = 4 \times 10^2$ m³

$\rho_{aire} = 1{,}29 \times$ kg/m³

$\rho_{helio} = 0{,}180$ kg/m³

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad E - w_{globo} - x = 0$

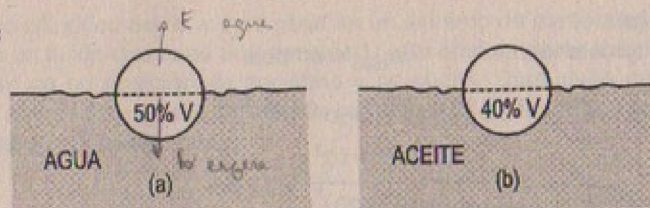
$\Rightarrow \quad x = \rho_{aire} \cdot g\, V_{globo} - \rho_{helio} \cdot g\, V_{helio}$

$\Rightarrow \quad x = g\, V_{helio}\,(\rho_{aire} - \rho_{helio})$

$\therefore \quad x = (9{,}80)(4 \times 10^2)\,(1{,}29 - 0{,}180) = 444$ kg

29. Una esfera de plástico flota en el agua con 50% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en aceite con 40% de su volumen sumergido. Determine las densidades del aceite y de la esfera.

Resolución :



En (a): $E = w_{esfera}$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot g(0,5\,V) = \rho_{est} \cdot gV$

$\therefore \quad \rho_{est} = \rho_{H_2O} \cdot (0,5) = (1,00 \times 10^3)(0,5) = 0,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

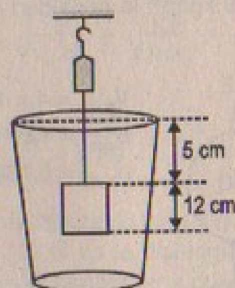
En (b): $E = w_{esfera}$

$\Rightarrow \quad \rho_{aceite} \cdot g\,(0,4\,V) = \rho_{est} \cdot gV$

$$\therefore \quad \rho_{aceite} = \frac{\rho_{est}}{0,4} = \frac{0,5}{0,4} \times 10^3 = 1,25 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

30. Un bloque de metal de 10 kg que mide 12 cm × 10 cm × 10 cm se suspende de una balanza y se sumerge en agua, como muestra la figura 15.9b. El lado de 12 cm está vertical, y la parte superior del bloque se encuentra a 5,0 cm de la superficie del agua. a) ¿Cuáles son las fuerzas sobre la parte superior e inferior del bloque? (Considere $P_0 = 1,0130 \times 10^5$ N/m².) b) ¿Cuál es la lectura de la balanza de resorte? c) Muestre que la fuerza de flotación es igual a la diferencia entre las fuerzas en la parte superior y en la inferior del bloque.

Resolución :



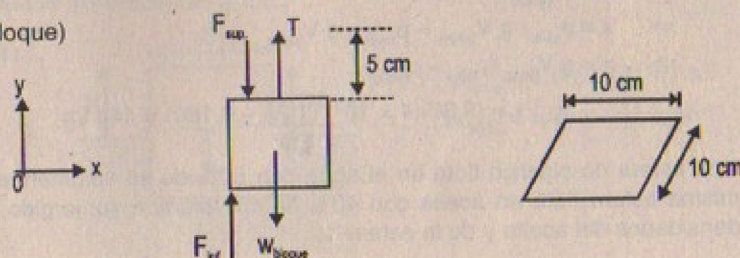
$P_o = 1,013 \times 10^5$ Pa

$M_{bloque} = 10$ kg

$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3$ kg/m³

Parte (a)

D.C.L. (bloque)



$F_{superior} = \rho_{H_2O} \cdot g(5 \times 10^{-2}).A = (1 \times 10^3)(9,80)(5 \times 10^{-2}).\,(0,1)^2 + P_o \cdot (0,1)^2$

$\therefore \quad F_{superior} = (1,013 \times 10^5)\,(0,1)^2 + 4,9 = 1\,018$ N

Hallando la fuerza inferior:

$\Rightarrow \quad F_{inferior} = (P_o + \rho_{H_2O} \cdot g.17 \times 10^{-2})(0,1)^2$

$\therefore \quad F_{inferior} = (1,013 \times 10^5)(0,1)^2 + (10^3)(9,80)(17 \times 10^{-2})(0,1)^2 = 1\,029,7$ N

Parte (b)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + F_{inf} - F_{sup} - W_{bloque} = 0$

$\Rightarrow \quad T = \text{Lectura de la balanza} = -1\,029,7 + (10)(9,80) + 1\,018$ } error!!!

$\therefore$ ~~T = 109,66 N~~ X T = 86,3 (N)

Parte (c)

Sabemos que $F_{inf} - F_{sup} = 11,76$ ... (1)

Por otro lado Empuje $= \rho_{H_2O} \cdot gV_{cubo} = (1 \times 10^3)(9,80)(0,1)^2(0,12) = 11,76$

Por lo tanto: (1) = (2)

En consecuencia Empuje $= F_{inf} - F_{superior}$ l.q.q.d.

31. Una rana en una vaina hemisférica (Fig. P15.31) descubre que flota verdaderamente sin hundirse en un mar azul-gris (densidad de 1,35 g/cm³). Si la vaina tiene un radio de 6,0 cm y una masa despreciable, ¿cuál es la masa de la rana?

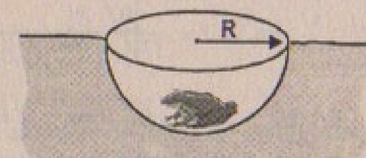


Figura P15.31

Resolución :

$\rho_{mar\ azul-gris} = 1,35$ g/cm³ ; Radio = 6,0 cm

Masa de la rana = ?

Por Arquímedes: $E = w_{rana}$

$$\Rightarrow \quad \rho_{agua\ mar} \cdot g\,\frac{1}{2}\,V_{esf} = M_{rana}\,g$$

$$\Rightarrow \quad (1,35)(0,5)\left(\frac{4}{3}\right)(3,1416)(6)^3 = M_{rana}$$

$\therefore \quad M_{rana} = 0,611$ kg

32. Un globo ligero lleno de helio de 0,180 kg/m³ de densidad se amarra a una cuerda ligera de longitud L = 3,00 m. La cuerda se amarra al suelo, formando un péndulo simple «invertido» como en la figura P15.32a. Si el globo se desplaza ligeramente del equilibrio, como en la figura P15.32b, a) demuestre que el movimiento es armónico simple, y b) determine su periodo. Considere la densidad del aire igual a 1,29 kg/m³ e ignore cualquier pérdida de energía debida a la fricción del aire.

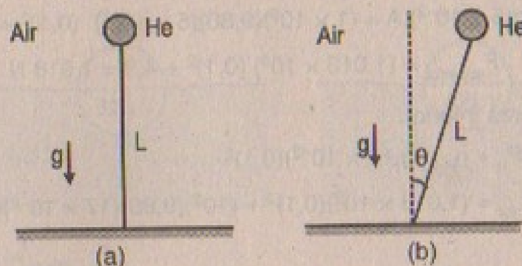


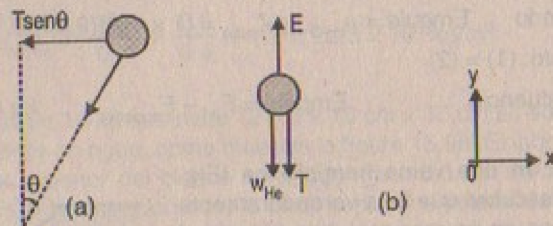
Figura P15.32

Resolución:

$\rho_{helio} = 0{,}180\ kg/m^3$; $L = 3{,}00\ m$

$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

Parte (a)



En (b): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = E - W_{He} = \rho_{aire} \cdot gV - \rho_{helio} \cdot gV$

Por otro lado: En (b)

(«E» es una fuerza que se opone al movimiento, es decir es una fuerza recuperadora)

$\Rightarrow -EL\operatorname{sen}\theta = I_o.\ddot{\theta}$ (Para desplazamientos pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$)

$\Rightarrow \rho_{aire} \cdot gV\, L\operatorname{sen}\theta + \rho_{helio} \cdot VL^2\,\ddot{\theta} = 0$

$$\therefore\ \ddot{\theta} + \frac{g\,(\rho_{aire})}{L\,(\rho_{helio})} \cdot \theta = 0 \quad \text{(Ecuación diferencial de un M.A.S.)}$$

Parte (b)

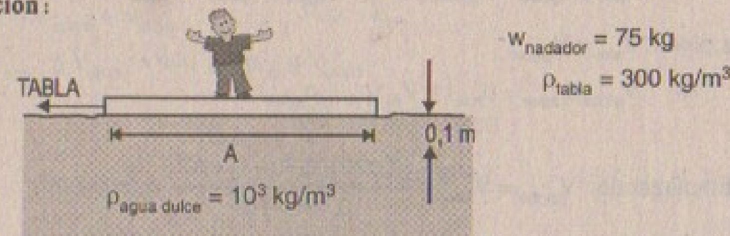
Como: $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,(\rho_{aire})}{L\,(\rho_{helio})}}$

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L(\rho_{helio})}{g(\rho_{aire})}} = 2(3{,}1416) \times \sqrt{\dfrac{3}{9{,}80}\left(\dfrac{0{,}180}{1{,}29}\right)} = 1{,}3\ s$

33. Una tabla de estireno tiene un espesor de 10 cm y una densidad de 300 kg/m³. ¿Cuál es el área de la tabla si flota sobre agua dulce cuando un nadador de 75 kg está sobre ella.

33A. Una tabla de estireno tiene un espesor h y densidad ρ_s ¿Cuál es el área de la tabla si flota en agua dulce cuando un nadador de masa m está sobre ella?

Resolución:

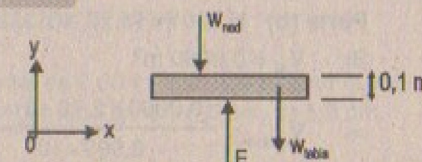


$W_{nadador} = 75\ kg$

$\rho_{tabla} = 300\ kg/m^3$

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow E = W_{tabla} + W_{nadador}$

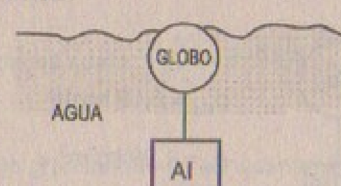


$\rho_{H_2O} \cdot g\,A(0{,}1) = A(0{,}1)g \cdot \rho_{tabla} + 75g$

$\Rightarrow A(0{,}1)\,[\rho_{H_2O} - \rho_{tabla}] = 75 \quad \therefore \quad A = \dfrac{75}{(0{,}1)(0{,}7\times 10^3)} = 1{,}07\ m^2$

34. Un globo se usa para suspender un bloque de aluminio de 0,020 m³ en agua llenándolo con aire. a) ¿Qué volumen de aire es necesario para sólo suspender el bloque con la parte superior del globo en la superficie del agua? b) Si en lugar de ser sólido, el aluminio tenía una cavidad hueca en su interior de 0,0060 m³, ¿qué fracción del globo estaría sobre el agua? Ignore la masa del aire en el globo.

Resolución:



$V_{aluminio} = 0{,}020\ m^3$

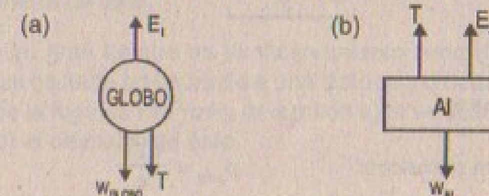
$\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3$

$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

$\rho_{aluminio} = 2{,}7 \times 10^3\ kg/m^3$

Parte (a)

Diagrama de cuerpo libre de cada objeto



En (a) $E_1 = w_{globo} + T$ ... (1)

En (b) $T = w_{aluminio} - E_2$ ... (2)

(2) en (1) $E_1 + E_2 = w_{globo} + w_{aluminio}$

$\Rightarrow \rho_{aire}\, gV_{globo} + \rho_{aluminio}\, gV_{Al} = \rho_{agua}\, gV_{globo} + \rho_{agua} \cdot gV_{Al}$

Nos piden $V_{aire} = V_{globo}$

$\Rightarrow V_{globo}(\rho_{agua} - \rho_{aire}) = V_{Al}(\rho_{Al} - \rho_{agua})$

Reemplazando: $V_{globo} = V_{aire} = \dfrac{(0{,}020)(2{,}70-1)\times 10^3}{0{,}999\times 10^3} = 0{,}034 \text{ m}^3$

Parte (b)

Si: $V_{Al} = 0{,}0060 \text{ m}^3$

$$\Rightarrow V_{globo} = \frac{(0{,}0060)(2{,}70-1)\times 10^3}{0{,}999\times 10^3} = 0{,}010 \text{ m}^3$$

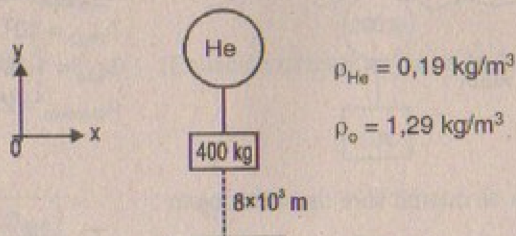
En consecuencia:

La fracción de volumen que estaría sobre el agua sería:

$$\frac{0{,}024}{0{,}034} = \frac{12}{17} \text{ ó } 70{,}59\%$$

35. ¿Cuántos metros cúbicos de helio ($\rho_{He} = 0{,}18$ kg/m³) son necesarios para elevar un globo con una carga de 400 kg hasta una altura de 8 000 m? Suponga que el globo mantiene un volumen constante y que la densidad del aire disminuye con la altura z de acuerdo con la expresión $\rho_{aire} = \rho_0 e^{-z/8\,000}$, donde z está en metros y $\rho_0 = 1{,}29$ kg/m³) es la densidad del aire al nivel del mar.

Resolución :



$\rho_{He} = 0{,}19 \text{ kg/m}^3$

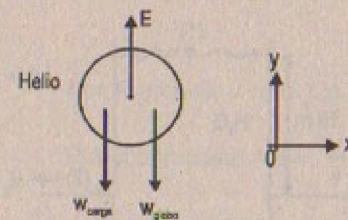
$\rho_o = 1{,}29 \text{ kg/m}^3$

Sabemos que:

$$\rho_{aire} = \rho_o\, e^{-z/8\,000}$$

A una altura de 8 000 m entonces: $\rho_{aire} = \dfrac{1{,}29}{e}$

Haciendo un diagrama de cuerpo libre:



$\Rightarrow E = w_{carga} + w_{globo}$

$\Rightarrow \rho_{aire} \cdot g\, V_{globo} = 400\, g + \rho_{He}\, g\, V_{globo}$

$$V_{globo}\left(\frac{1{,}29}{e} - 0{,}18\right) = 400$$

$\therefore V_{globo\ de\ helio} = 1\,430 \text{ m}^3$ ∼ 1357,93 m³

DINÁMICA DE FLUIDOS Y LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

36. La tasa de flujo de agua por un tubo horizontal es 2,00 m³/min. Determine la velocidad del flujo en un punto donde el diámetro del tubo es a) 10,0 cm, b) 5,0 cm.

Resolución : Q = flujo de agua.

Parte (a)



Diámetro: 10,0 cm

$$\frac{\text{Volumen}}{t} = \frac{2{,}00}{60} = \pi(0{,}05)^2 \cdot v \qquad \therefore v = 4{,}24 \text{ m/s}$$

Parte (b)



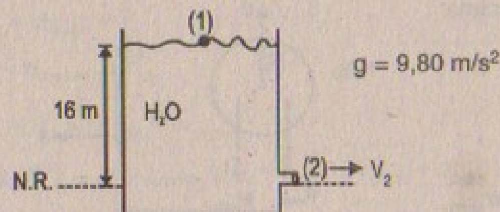
Diámetro = 5,0 cm

Entonces como: $\dfrac{2{,}00}{60} = \pi\left(\dfrac{0{,}05}{2}\right)^2 \cdot v \qquad \therefore v = 16{,}98 \text{ m/s}$

37. En un gran tanque de almacenamiento lleno de agua se forma un pequeño hoyo en su costado en un punto 16 m debajo del nivel de agua. Si la tasa de flujo de la fuga es $2{,}5 \times 10^{-3}$ m³/min, determine a) la velocidad a la cual el agua sale por el hoyo, y b) el diámetro de éste.

37A. En un gran tanque de almacenamiento lleno de agua se forma un pequeño hoyo en su costado en un punto a una distancia h debajo del nivel de agua. Si la tasa de flujo de la fuga es Rm³/min, determine a) la velocidad a la cual el agua sale por el hoyo, y b) el diámetro de éste.

Resolución :



$g = 9{,}80\ m/s^2$

Por Bernoulli: $P_o + \rho g(16) + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = P_o + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2(9{,}8)(16)} = 17{,}7\ m/s$$

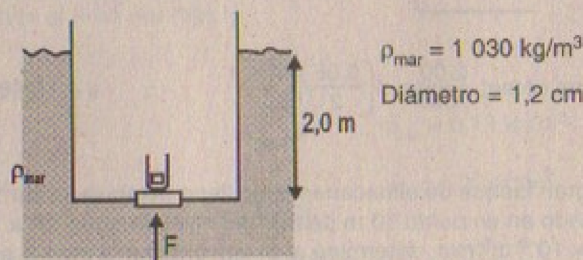
Parte (b)

Por continuidad: $\frac{2{,}5\times10^{-3}}{60} = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \times (17{,}7)$

$$\Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{(2{,}5)(4)\times10^{-3}}{(60)(3{,}1416)(17{,}7)}} = 0{,}173\times10^{-2}\ m \ \equiv 1{,}73\ mm$$

38. El legendario niño holandés que salvó a su país al poner su dedo en el hoyo de un dique tenía un dedo de 1,2 cm de diámetro. Suponiendo que el hoyo estaba 2,0 m debajo de la superficie del mar (densidad de 1 030 kg/m³), a) ¿cuál es la fuerza sobre su dedo? b) Si quita su dedo del hoyo, ¿cuánto tardaría al agua liberada en inundar un acre de tierra a una profundidad de un pie suponiendo que el hoyo permanece del mismo tamaño. (Una familia estadounidense común de cuatro miembros utiliza esta gran cantidad de agua en un año.)

Resolución :



$\rho_{mar} = 1\ 030\ kg/m^3$

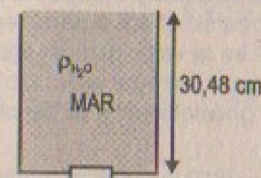
Diámetro = 1,2 cm

Parte (a)

$$F_{sobre\ su\ dedo} = \text{Empuje} = \rho_{H2O\ mar} \cdot g\ V = \rho_{H2O\ mar}\ g(2)\pi\left[\frac{0{,}012}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad F_{sobre\ su\ dedo} = (1\ 030)(9{,}8)(3{,}1416)(2)\left[\frac{0{,}012}{2}\right]^2 = 2{,}28\ N$$

Parte (b)



Por Torrichelli: $v = \sqrt{2g\,(0{,}3)} = 2{,}44\ m/s$

Por continuidad: $A.v = \frac{V}{t}$

$$\Rightarrow \quad \pi\,\frac{(0{,}012)^2}{2}\ .\ 2{,}44 = \frac{\pi\left(\frac{0{,}012}{2}\right)^2 .(0{,}3043)}{t}$$

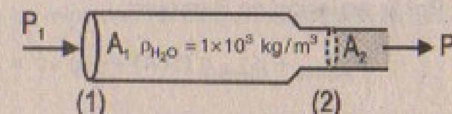
$$\therefore \quad t = 0{,}125\ s$$

39. Un tubo horizontal de 10,0 cm de diámetro tiene una reducción uniforme que lo conecta con un tubo de 5,0 cm de diámetro. Si la presión del agua en el tubo más grande es $8{,}0\times10^4$ Pa y la presión en el tubo más pequeño es $6{,}0\times10^4$ Pa, ¿a qué tasa circula el agua a través de los tubos?

Resolución :

Datos:

$P_1 = 8\times10^4$ Pa ; $P_2 = 6\times10^4$ Pa



$$A_1 = \pi\left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 25\pi\times10^{-4}\ m^2$$

$$A_2 = \pi\left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 = 625\pi\times10^{-6}\ m^2$$

Por Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Por otro lado: Por continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1\ v_1}{A_2}$

$$\Rightarrow \quad 2(P_1 - P_2) = \rho\, v_1^2\left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right]$$

Reemplazando:

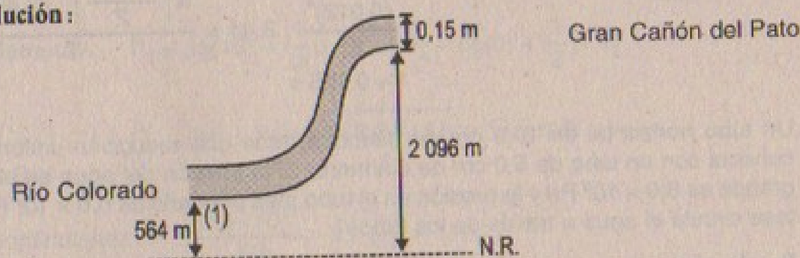
$$2(8\times10^4 - 6\times10^4) = (1\times10^3)\ .\ v_1^2\left[\frac{\left(25\pi\times10^{-4}\right)^2 - \left(625\pi\times10^{-6}\right)^2}{\left(625\pi\times10^{-6}\right)^2}\right]$$

$$\therefore \quad v_1 = 1{,}638\ m/s$$

En consecuencia: $\frac{\text{Volumen}}{t} = (25\pi\times10^{-4})\times(1{,}638) = 0{,}0128\ m^3/s$

40. Se bombea agua desde el río Colorado hasta la Villa del Gran Cañón a través de una tubería de 15,0 cm de diámetro. El río está a 564 m de altura y el pueblo a 2 096 m. a) ¿Cuál es la presión mínima con que debe bombearse el agua para llegar a la población? b) Si se bombea 4 500 m³ diarios, ¿cuál es la velocidad del agua en la tubería? c) ¿Cuál es la presión adicional necesaria para entregar este flujo? (Nota: Usted puede suponer que la intensidad del campo gravitacional y la densidad del aire son constantes en este intervalo de alturas.)

Resolución:



Parte (a)

Por la ecuación de Bernoulli:

$$P_{mínima} + \rho_{H_2O}\, g\,(564) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_{atm} + \rho_{H_2O}\cdot g(2\,096) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Por continuidad: $A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1\ v_1}{A_2}$

Entonces despejando:

$$P_{mínima} = P_{atm} + \rho\, g(1\,532) - \frac{1}{2}\cdot v_1^2\left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right] \quad \text{(Presión atmosférica)}$$

$$\Rightarrow P_{mínima} = 1{,}013\times10^5 + (1\times10^3)(9{,}80)(1\,532)$$

$$\therefore P_{mínima} = 151{,}15\times10^5\ \text{Pa}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\frac{V}{t} = \frac{4\,500\,m^3}{24\,horas} \Rightarrow \frac{4\,500}{24}\times\frac{1}{3\,600\ s} = \pi\left(\frac{0{,}15}{2}\right)^2.v$

$$\therefore v = 2{,}95\ m/s$$

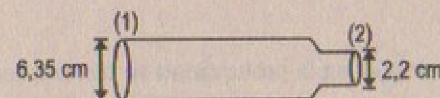
Parte (c)

La presión adicional será la presión dinámica, entonces:

$$P_{adicional} = \frac{1}{2}(1\times10^3)(2{,}95)^2 = 4{,}34\times10^3\ \text{Pa}$$

41. Por una manguera contra incendios de 6,35 cm de diámetro fluye agua a una tasa de 0,0120 m³/s. La manguera termina en una boquilla de diámetro interior igual a 2,20 cm. ¿Cuál es la velocidad con la cual el agua sale de la boquilla?

Resolución:



La tasa de flujo es: 0,0120 m³/s

Sabemos que: $0{,}0120 = \pi\left[\frac{6{,}35}{2}\times10^{-2}\right]^2 v_1 \qquad \therefore \quad v_1 = 3{,}789\ m/s$

Por continuidad: $A_1v_1 = A_2v_2$

$$\Rightarrow \pi\left[\frac{6{,}35}{2}\times10^{-2}\right]^2(3{,}789) = \pi\left[\frac{2{,}2}{2}\times10^{-2}\right]v_2$$

$$\therefore v_2 = 31{,}6\ m/s$$

42. El túnel de agua Garfield Thomas en la Universidad Estatal de Pensilvania tiene una sección transversal circular que se acorta desde un diámetro de 3,6 m hasta la sección de prueba, cuyo diámetro es de 1,2 m. Si la velocidad de flujo es 3,0 m/s en la tubería de mayor diámetro, determine la velocidad de flujo en la sección de prueba.

Resolución:

Por continuidad:

3,6 m — 1,2 m — $v_1 = 3{,}0$ m/s — v_2

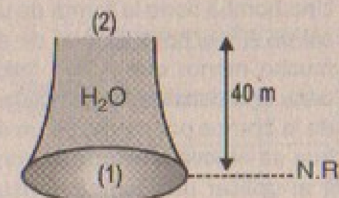
$$\pi\left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 v_1 = \pi\left(\frac{1{,}2}{2}\right)^2 v_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2(3{,}0) = \left(\frac{1{,}2}{2}\right)^2 v_2$$

$$\therefore v_2 = 27\ m/s$$

43. El géiser Old Faithful en el parque Yellowstone genera erupciones en intervalos de aproximadamente 1 hora, y la altura de la fuente alcanza 40 m. a) ¿Con qué velocidad sale agua del suelo? b) ¿Cuál es la presión (arriba de la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m?

Resolución:



Parte (a)

Por el principio de Bernoulli se cumple que:

$$\Rightarrow P_{atm} + \rho gh = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_{salida}^2$$

$$\Rightarrow v_{salida} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81)(40)} = 28\ m/s$$

Parte (b)

Por el principio de Bernoulli en la profundidad se cumple que:

$$P_{total} = P_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$$

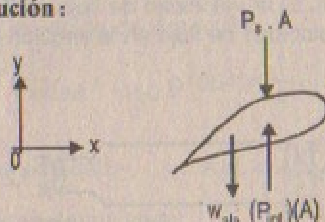
$$\Rightarrow \quad P_{total} = 1{,}013 \times 10^5 + (1000)(9{,}81)(175) + \frac{1}{2} \times (1\,000)(28)^2$$

$$\therefore \quad P_{total} = 22{,}1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

OTRAS APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

44. Un avión tiene una masa de $1{,}6 \times 10^4$ kg y cada ala tiene un área de $40{,}0$ m². Durante un vuelo horizontal, la presión sobre la superficie inferior del ala es $7{,}0 \times 10^4$ Pa. Determine la presión sobre la superficie superior del ala.

Resolución:



Área del ala = $40{,}0$ m²

Masa del ala = $1{,}6 \times 10^4$ kg

$P_{inf.} = 7{,}0 \times 10^4$ Pa

Por el principio de Arquímedes $\Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow \quad w_{ala} = \text{Empuje} = (P_{inf.} - P_{sup})\,A$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}6 \times 10^4)(9{,}8) = (7{,}0 \times 10^4)(40{,}0) - P_{sup.}\,(40)$$

$$\Rightarrow \quad P_{superior} = \frac{280\times10^4 - 15{,}68\times10^4}{40} \qquad \therefore \quad P_{superior} = 6{,}6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

45. Una bomba tiene la forma de un cilindro horizontal con un área de sección transversal de A y el hoyo abierto de área de sección transversal **a** de modo que ésta es mucho menor que A. Un fluido que tiene una densidad ρ se obliga a salir de la bomba por medio de un émbolo que se mueve a velocidad constante v al aplicar una fuerza constante F (Fig. P15.45). Determine la velocidad w del chorro del fluido.

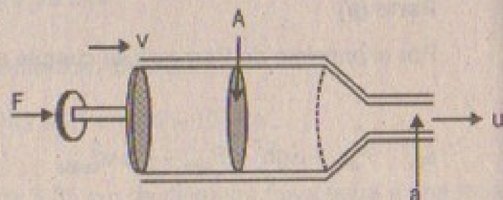


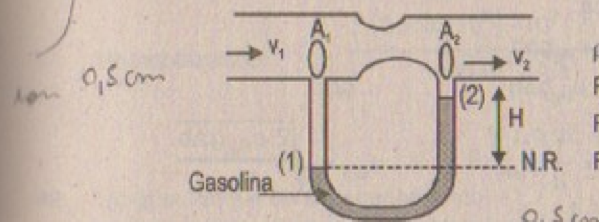
Figura P15.45

Resolución:

Por continuidad: $\quad A.v = au \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{A.v}{a}$

46. Un tubo de Venturi puede utilizarse como un medidor de flujo de fluido (Fig. 15.16). Si la diferencia en la presión $P_1 - P_2 = 21$ kPa, encuentre la tasa de flujo del fluido en m³/s dado que el radio del tubo de salida es 1,0 cm. El radio del tubo de entrada es 2,0 cm y el fluido es gasolina (ρ = 700 kg/m³).

Resolución:



$\rho_{gasolina} = 700$ kg/m³

$P_1 - P_2 = 21$ kPa

Radio de salida = 1,0 cm

Radio de entrada = 2,0 cm

Por continuidad: $\quad v_1\,\pi(1{,}0)^2 = v_2\pi(0{,}5)^2 \quad \ldots (1)$

Por otro lado por el principio de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \rho.g(0) + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 \quad \ldots (2)$$

Además por el principio de la hidrostática:

$$P_1 = P_2 + \rho g H \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho g H = 21 \text{ kPa}$$

Luego: $\quad 21 \text{ kPa} = \dfrac{1}{2}(700)(15).\,v_1^2 \qquad \therefore \quad v_1 = 0{,}063$ m/s

Entonces: De (1)

$$(0{,}063)(10^3)(3{,}1416)(0{,}0001) = \frac{\text{Volumen}}{t} = 0{,}02 \text{ m}^3\text{/s}$$

47. Con un tubo de Pitot se puede determinar la velocidad del flujo de aire al medir la diferencia entre la presión total y la presión estática (Fig. P15.47). Si el fluido en el tubo es mercurio, densidad ρ_{Hg} = 13 600 kg/m³ y Δh = 5,00 cm, encuentre la velocidad del flujo de aire. (Suponga que el aire está estancado en el punto A y considere ρ_{aire} = 1,25 kg/m³.)

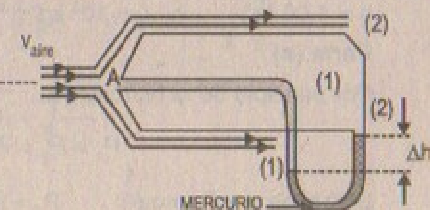


Figura P15.47

Resolución :

$\rho_{Hg} = 13,6 \times 10^3$ kg/m³ ; $\Delta h = 5 \times 10^{-2}$ m
$\rho_{aire} = 1,25$ kg/m³

Por Bernoulli: $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = cte$

Entonces: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_{aire} v^2 \quad \ldots (1)$

Por otro lado:
Por el principio de la Hidrostática:

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g \Delta h$

$P_1 - P_2 = \rho_{Hg} g \Delta h \quad \ldots (2)$

Luego (2) en (1) $\rho_{Hg}\, g\, \Delta h = \frac{1}{2}\rho_{aire} \cdot v^2 \Rightarrow v_{aire} = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{Hg}\, g\, \Delta h}{\rho_{aire}}}$

Reemplazando: $v_{aire} = \sqrt{\frac{2(13\,600)(9,8)(0,05)}{1,25}}$

$\therefore \quad v_{aire} = 103$ m/s

48. En la figura P15.48 se muestra un sifón con el que se extrae agua de un tanque. El sifón tiene un diámetro uniforme. Considere flujo estable. a) Si la distancia h = 1,00 m, encuentre la velocidad del flujo de salida en el extremo del sifón. b) ¿Cuál es el límite de la altura de la parte superior del sifón sobre la superficie del agua? (Con el fin de tener un flujo continuo de líquido, la presión no debe descender por debajo de la presión de vapor del líquido.)

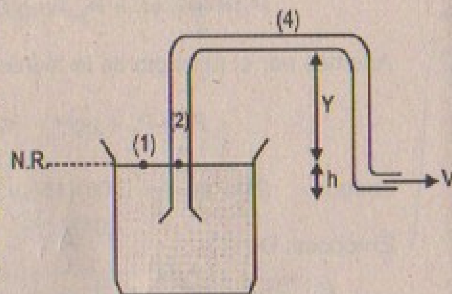


Figura P15.48

Resolución :

h = 1,00 m ; $\rho_{H_2O} = 10^3$ kg/m³

Parte (a)

Por principio de la hidrostática:

$P_1 = P_2 = P_{atm} = 1,013 \times 10^5$ Pa

Entonces por Bernoulli: $P_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_3^2 - \rho gh$

$\Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(1)} = 4,43$ m/s

Parte (b)

Por continuidad: $A_4 v_4 = A_3 v_3 \quad \therefore \quad v_4 = v_3$

Entonces por Bernoulli: $P_2 = P_4$

$\Rightarrow \quad P_{atm} = \frac{1}{2}\rho \cdot v_3^2 + \rho gY \quad \Rightarrow \quad \frac{2P_{atm} - 2\rho g \cdot Y}{\rho} = v_3^2$

Despejando: «Y» $\frac{-\rho v_3^2 + 2P_{atm}}{2\rho g} = Y$

Reemplazando: $\frac{2\left(1{,}013\times10^5\right) - 10^3(2)(9{,}8)(1)}{2\left(10^3\right)(9{,}8)} = Y$

$\therefore \quad Y = 9,34$ m

49. Un gran tanque de almacenamiento se llena hasta una altura h_o. Si el tanque se perfora a una altura h medida desde el fondo del tanque (Fig. P15.49), ¿a qué distancia del tanque cae la corriente?

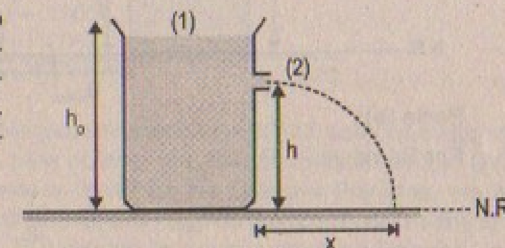


Figura P15.49

Resolución :

$A_1 >> A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 0$

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho \cdot gh_0 = P_{atm} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\therefore \quad v_2 = \sqrt{2g(h_o - h)}$

Luego: Por movimiento de proyectiles: $h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Entonces: $x = v_2 t = \sqrt{2g\left(h_o - h\right)} \times \sqrt{\frac{2h}{g}}$

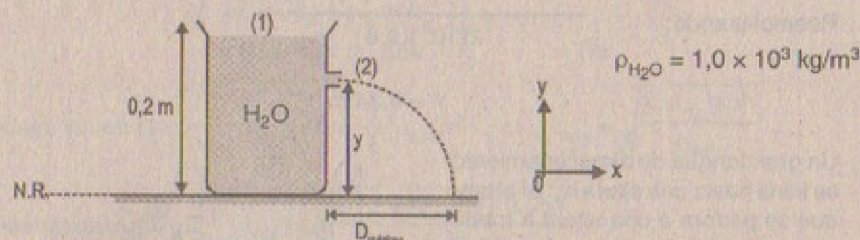
$\therefore \quad x = 2(h[h_o - h])^{1/2}$

50. Se perfora un hoyo en el costado de un recipiente lleno de agua de 20 cm de altura, como se ilustra en la figura P15.49. Si lo que se quiere es que el agua llegue lo más

lejos posible horizontalmente, a) ¿a qué distancia del fondo del recipiente debe perforarse el hoyo? b) Si se ignoran las pérdidas por fricción, ¿a qué distancia (inicialmente) desde el costado del recipiente llegará el agua al suelo?

50A. Se perfora un hoyo en el costado de un recipiente lleno de agua de altura h, como se ilustra en la figura P15.49. Si lo que se quiere es que el agua llegue lo más lejos posible horizontalmente, a) ¿a qué distancia del fondo del recipiente debe perforarse el hoyo? b) Si se ignoran las pérdidas por fricción, ¿a qué distancia (inicialmente) desde el costado del recipiente llegará el agua al suelo?

Resolución :



Parte (a)

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho.g(0,2) = P_{atm} + \rho.g(y) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(0,2-y)} \quad ...(1)$

Por otro lado por movimiento de proyectiles:

En el eje y: $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

En el eje x: $D_{máx} = v_2 \times t = \sqrt{4y(0,2-y)}$

Como: $4y(0,2-y) \geq 0 \Rightarrow y(y-0,2) \leq 0$

$\therefore \quad y \in [0; 0,2]$ m

Luego el hoyo debe de perforarse aproximadamente a la altura del recipiente o entre dicho intervalo.

Parte (b)

Si tomamos un valor en dicho intervalo

Sea: y = 0,198 m

$\Rightarrow \quad D_{máximo} = \sqrt{4(0,198)(0,2-0,198)} \quad \therefore \quad D_{máximo} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$

ENERGÍA DEL VIENTO

51. Calcule la salida de potencia de un molino de viento que tiene aspas de 10,0 m de diámetro si la velocidad del viento es de 8,0 m/s. Suponga que la eficiencia del sistema es igual a 20%.

Resolución :

Sabemos que $A = \pi.R^2 = (3,1416)\left(\frac{10,0}{2}\right)^2 = 78,54 \text{ m}^2$ Nota: $\rho_{aire} = 1,2 \text{ kg/m}^3$

La potencia máxima con una eficiencia de 100% sería:

$$\text{Potencia máxima} = \frac{1}{2}\rho_{aire}v^3A = \frac{1}{2}(1,20)(8)^3(78,54)$$

$\therefore$ Potencia máxima = 24,127 kW

Pero como la eficiencia del sistema es 20% entonces:

24,127 — 100%
x — 20%
$\therefore$ x = 4,83 kW

52. De acuerdo con un plan bastante ambicioso, se necesitarían 50 000 aerogeneradores, cada uno con 800 pies de diámetro, para obtener una salida promedio de 200 GW. Éstos se localizarían estratégicamente a través de las Grandes Planicies, en las Islas Aleutianas y sobre plataformas flotantes a lo largo de las costas del Atlántico y el Golfo y sobre los Grandes Lagos. El consumo de energía anual en Estados Unidos en 1980 fue aproximadamente de $8,3 \times 10^{19}$ J. ¿Qué fracción de esta cantidad sería suministrada por los aerogeneradores?

Resolución :

Por conversión: 1 pie = 30,48 cm, luego diámetro = 800 pies = 243,84 m

Entonces $A = \pi(121,92)^2 = 4,67 \times 10^4 \text{ m}^2$

Además: Potencia (promedio) = 200 GW $= \frac{1}{2}\rho_{aire}v^3A = \frac{2\times10^{11} \text{ W}}{5\times10^4}$

$\therefore \quad v_{salida} = 5,23$ m/s (cada generador)

Entonces la energía cinética anual de los 50 000 generadores será:

$E_c = P \times 1 \text{ año} \Rightarrow \frac{E_c}{\text{año}} = 2\times10^{11}\frac{J}{s} \times 365 \text{ días} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \times \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}}$

$\therefore \quad E_c = 6,3 \times 10^{18}$ J/año

Si: E_c/año en (EE.UU) ----- $8,3 \times 10^{19}$ J ---- 1

$\Rightarrow$ E_c/año (generadores) ----- $6,3 \times 10^{18}$ ---- x

$\therefore$ x = 63/830

53. Considere un aerogenerador con aspas de área de sección transversal A, como el de la figura P15.53, y suponga que el aerogenerador está directamente enfrente del viento. Si la velocidad del viento es v, demuestre que la energía cinética del aire que pasa libremente a través de un área A en un tiempo Δt es $K = 1/2\rho Av^3\Delta t$. ¿Por qué no es posible que las aspas extraigan esta cantidad de energía cinética?

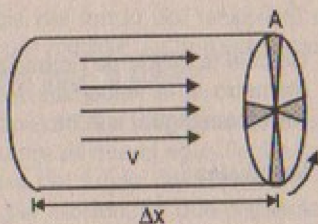


Figura P15.53

Resolución :

Por demostrar $K = \frac{1}{2}\rho Av^3\Delta t$

Sabemos que: $\frac{E_c}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\rho v^2$ ... (1)

Por otro lado:

Por continuidad $\frac{\text{Volumen}}{\Delta t} = A.v \Rightarrow \text{Volumen} = Av\Delta t$

Luego: (1) $E_c = \frac{1}{2}\rho.v^2$ (volumen)

$\therefore E_c = \frac{1}{2}\rho v^3 A\Delta t$ l.q.q.d.

PROBLEMAS ADICIONALES

54. El suministro de agua de un edificio se alimenta a través de una tubería principal de 6,0 cm de diámetro. Se observa que una llave de 2,0 cm de diámetro localizada 2,0 m arriba de la tubería principal llena un recipiente de 25 litros en 30,0 s. a) ¿Cuál es la velocidad a la cual el agua sale de la llave? b) ¿Cuál es la *presión manométrica* en la tubería principal de 6,0 cm? (Suponga que la llave es la única «fuga» en el edificio.)

Resolución :

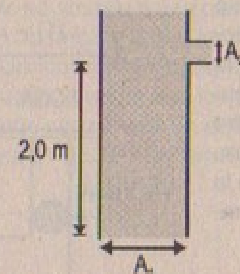
Parte (a)

Nos piden la velocidad a la cual sale el agua a través de la llave cuyo diametro es 2,0 cm. Entonces:

Por continuidad: $A.v = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}}$

$\Rightarrow \pi\left(\frac{2,0}{2}\right)^2 v = \frac{25\times10^3}{30\text{ s}}\text{ cm}^3 \qquad \therefore v = 2,65\text{ m/s}$

Parte (b)



$A_1 = \pi\left(\frac{6,0}{2}\times10^{-2}\right)^2$

$A_2 = \pi\left(\frac{2,0}{2}\times10^{-2}\right)^2$

$P_{manométrica} = P_{absoluta} - P_{atmosférica}$

Entonces por Bernoulli: $P_{absoluta} = P_{atm} + \rho_{H_2O}\times\frac{1}{2}v^2 + \rho.g(2,0)$

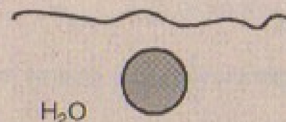
$P_{manométrica} = \rho_{H_2O}\,g(2,0) + \frac{\rho_{H_2O}}{2}(2,65)^2$

$P_{manométrica} = 1\times10^3\left[(9,8)(2,0) + \frac{(2,65)^2}{2}\right]$

$\therefore P_{manométrica} = 23,1\text{ kPa}$

55. Una bola de ping pong tiene un diámetro de 3,8 cm y una densidad promedio de 0,084 g/cm³. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

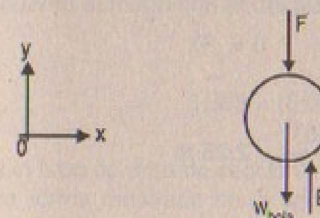
Resolución :



Diámetro bola = 3,8 cm

$\rho_{Bola} = 0,084\text{ g/cm}^3$

$\rho_{H_2O} = 1\text{ g/cm}^3$



Como $E > w \Rightarrow$

F tiene que estar en el sentido del peso para mantener a la bola completamente sumergida en agua.

Luego: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F = E - w = \rho_{H_2O}\cdot gv - \rho_B gv$

$\Rightarrow F = [10^3(9,8) - (0,084)(10^3)(9,8)]\frac{4}{3}\pi(0,019)^3$

$\therefore F = 0,258\text{ N}$

56. La figura P15.56 muestra un tanque de agua con una válvula en el fondo. Si esta válvula se abre, ¿cuál es la máxima altura que alcanza la corriente de agua al salir del lado derecho del tanque? Suponga que h = 10 m, L = 2,0 m y θ = 30°, y que el área de la sección transversal en A es muy grande comparada con la de B.

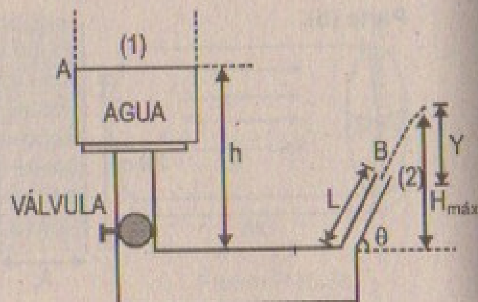


Figura P15.56

Resolución :

h = 10,0 m ; L = 2,0 m

θ = 30° ; A > B

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$$P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot gh + \frac{1}{2}\rho_{H_2O} \cdot v_1^2 = P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g(L\text{sen}30°) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como: $A > B \Rightarrow v_1 \approx 0$

Entonces: $\rho_{H_2O} \cdot gh - \rho_{H_2O} gL\text{sen}30° = \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\therefore \quad v_2 = 13{,}28$ m/s ... (1)

Luego: Por movimiento de proyectiles:

$$H_{máximo} = v_2\text{sen}30° . t - \frac{1}{2}gt^2$$

Por otro lado: $0 = v_2\text{sen}30° - gt \Rightarrow t = \dfrac{v_2 \text{ sen}30°}{g}$

Luego: $H_{máximo} = \dfrac{v_2^2 \text{ sen}^2 30°}{2g}$

Reemplazando: $H_{máximo} = \dfrac{(2)(9{,}80)(9)(0{,}5)^2}{2\ (9{,}8)} = 2{,}25$ m

Pero como nos piden «Y»

Entonces: $Y = H_{máx} - L\text{sen}30° = 2{,}25 - (2)(0{,}5) = 1{,}25$ m

Nota:
"Y" viene a ser la altura máxima que alcanza el agua al salir del lado derecho del tanque de área "B".

57. Un globo lleno de helio se amarra a una cuerda uniforme de 2,0 m de largo y 0,050 kg de peso. El globo es esférico con un radio de 0,40 m. Cuando se suelta, levanta una longitud, h, de cuerda, y luego permanece en equilibrio, como en la figura P15.57. Determine el valor de h.

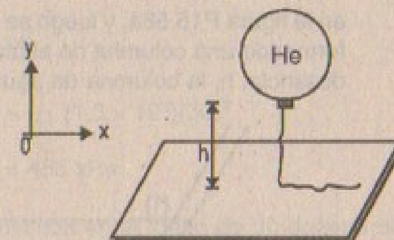


Figura P15.57

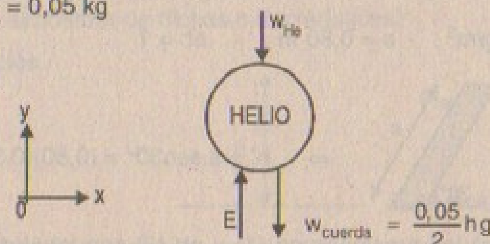
Resolución :

Radio = 0,4 m ; $L_{cuerda} = 2{,}0$ m

$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³ ; $\rho_{helio} = 0{,}18$ kg/m³

$M_{cuerda} = 0{,}05$ kg

D.C.L



Sabemos que $W_{helio} = \rho_{He}\ g\frac{4}{3}\pi(0{,}4)^3 = (0{,}18)(9{,}8)\left(\frac{4}{3}\right)(3{,}1416)(0{,}4)^3 = 0{,}473$ N

Inicialmente $W_{cuerda} = (0{,}05)(9{,}8) = 0{,}49$ N

Sabemos que empuje = $\rho_{aire}g(\text{Volumen}) = (1{,}29)(9{,}8)\left(\frac{4}{3}\right)(3{,}1416)(0{,}4)^3 = 3{,}389$ N

Inicialmente: W_{He} es inferida al empuje para poder equilibrar al globo lo que produce que el globo se eleve. Cuando el globo alcanza una altura h de cuerda, el peso de la cuerda sumado con el del globo con helio equilibrará al empuje entonces:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E = W_c + W_{He}$$

$$\Rightarrow 3{,}389 = (0{,}025)(9{,}8)h + 0{,}473 \qquad \therefore \quad h = 1{,}91 \text{ m}$$

58. Un tubo de área de sección transversal uniforme está abierto a la atmósfera y tiene la forma mostrada en la figura P15.58, con θ = 30,0°. Está inicialmente lleno de agua, como en la figura P15.58a, y luego se le vierte aceite (densidad = 750 kg/m³) en el brazo izquierdo, formando una columna de 0,80 m de largo (altura de la inclinación, s), como en la figura P15.58b. ¿Qué distancia, h, la columna de agua asciende en el brazo derecho?

58A. Un tubo de área de sección transversal uniforme está abierto a la atmósfera y tiene la forma mostrada en la figura P15.58. Está inicialmene lleno de agua, como

en la figura P15.58a, y luego se le vierte aceite de densidad ρ_0 en el brazo izquierdo, formando una columna de altura de inclinación s, como en la figura P15.58b. ¿Qué distancia, h, la columna de agua asciende en el brazo derecho?

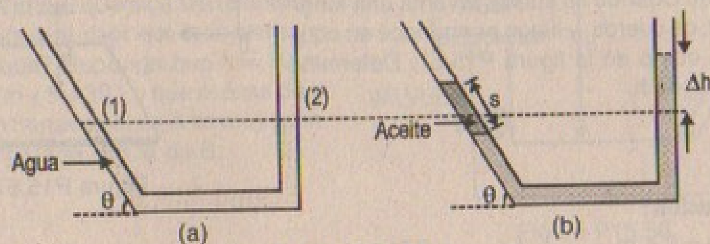


Figura P15.58

Resolución :

Datos:

$\theta = 30°$; $\rho_{aceite} = 750\ kg/m^3$; $s = 0{,}80\ m$; $\Delta h = ?$

s.sen 30° ... 30° ... s

$\Rightarrow\ h' = s.sen30° = (0{,}80)(0{,}5) = 0{,}4\ m$

Inicialmente en el tubo (a) las presiones en (1) y en (2) son iguales. Cuando se agrega aceite la presión en (1) aumenta y por consiguiente en (2) también aumentará por el principio de Pascal; luego:

$$P_1 = P_2$$

$$\Rightarrow\ P_{atm} + \rho_{aceite}\, gh' = P_{atm} + \rho_{H_2O}.g\Delta h$$

$$\Rightarrow\ (750)(0{,}4) = (10^3)(\Delta h)$$

$$\Rightarrow\ \Delta h = \frac{(750)(0{,}4)}{1\,000} \qquad \therefore\ \Delta h = 0{,}3\ m$$

59. De un extinguidor contra incendios sale agua bajo presión de aire, como se muestra en la figura P15.59. ¿Qué tanta presión de aire manométrica (arriba de la atmosférica) se requiere para que el chorro de agua tenga una velocidad de 30 m/s cuando el nivel del agua está a 0,50 m debajo de la boquilla?

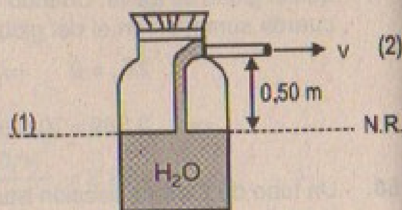


Figura P15.59

Resolución :

$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3\ kg/m^3$; $P_{atm} = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

Por dato: $v = 30\ m/s$

Por Bernoulli, como: $P_1 = P_2 = P_{absoluta}$

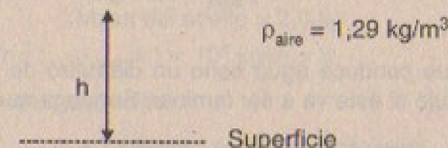
$$\Rightarrow\ P_{absoluta} = \rho_{H_2O}\cdot g(0{,}5) + P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow\ P_{absoluta} - P_{atm} = (1 \times 10^3)(9{,}8)(0{,}5) + \frac{1}{2}(1{,}0 \times 10^3)(30)^2$$

$$\Rightarrow\ P_{manométrica} = 4{,}9 \times 10^3 + 450 \times 10^3 = 455\ kPa$$

60. Torricelli fue el primero en darse cuenta que vivimos en el fondo de un océano de aire. Supuso correctamente que la presión de nuestra atmósfera se debe al peso del aire. La densidad disminuye al aumentar la altura cuando la atmósfera se hace menos densa. Si suponemos que la densidad es constante (1,29 kg/m³) hasta cierta altura h, y 0 arriba, entonces h representaría el espesor de nuestra atmósfera. Utilice este modelo para determinar el valor de h que produce una presión de 1,0 atm en la superficie de la Tierra. ¿La cima del monte Everest estaría arriba de la superficie de una atmósfera de dichas características?

Resolución :



$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

En la superficie la presión es una atmósfera (por dato).

Entonces: $1\ atm = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

$$\Rightarrow\ 1{,}013 \times 10^5\ Pa = \rho_{aire}\, gh \qquad \Rightarrow\ 1{,}013 \times 10^5 = (1{,}29)(9{,}8)h$$

$$\therefore\ h = 8{,}013 \times 10^3\ m$$

61. El peso real de un cuerpo es su peso cuando se mide en un vacío donde no hay fuerzas de flotación. Un cuerpo de volumen V se pesa en el aire sobre una balanza utilizando pesas de densidad ρ. Si la densidad del aire es ρ_o y la balanza registra un valor w', muestre que el peso real w es $w = w' + \left(V - \frac{w'}{\rho g}\right)\rho_o g$

Resolución :

Sabemos que: E = Peso del fluido desalojado $= \rho_o gV''$

Además: $w' = w - E = w - \rho_o g(V - V')$

Pero: $\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad mg = \rho g.V$

$$\therefore\ w' = \rho g.V'$$

Luego: $w' = w - \rho_o g\left(V - \frac{W'}{\rho . g}\right)$

$$\therefore\ w = \text{peso real} = w' + \left(V - \frac{w'}{\rho . g}\right).\rho_o g \qquad \text{l.q.q.d.}$$

62. Una boya de madera tiene un diámetro de 1,20 cm. Flota en agua con 0,40 cm de su diámetro fuera (Fig. P15.62). Determine la densidad de la boya.

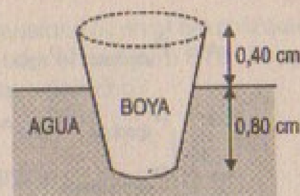


Figura P15.62

Resolución :

Diámetro = 1,2 cm

$\rho_{boya} = ?$

Por equilibrio: W_{boya} = Empuje

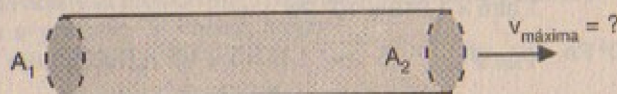
$\Rightarrow \quad \rho_{boya} \cdot gA\,(1{,}2) = \rho_{H_2O} \cdot gA(0{,}8) \quad \Rightarrow \quad \rho_{boya} = \dfrac{1\text{ g}}{\text{cm}^3} \times \dfrac{0{,}8\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}}$

$\therefore \quad \rho_{boya} = 0{,}67\text{ g/cm}^3$

63. Una tubería que conduce agua tiene un diámetro de 2,5 cm. Calcule la máxima velocidad de flujo si éste va a ser laminar. Suponga que la temperatura es 20° C.

Resolución :

Sea la figura:



Donde:
Diámetro = 2,5 cm

Sabemos que por la ecuación de Bernoulli se cumple que:

$$v_{salida} = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Como me piden: $v_{salida\ máxima;}$ Entonces:

$P_1 >> P_2$: entonces $P_2 \approx$ mínima y $A_2 \approx$ mínima

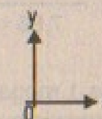
Luego: $A_1^2 - A_2^2 \approx 1 \quad \wedge \quad P_1 - P_2 =$ Máxima

Entonces: $v_{máxima} = \dfrac{\pi}{4}(2{,}5)^2 \times \sqrt{\dfrac{2(100)}{1\,000}}$

$\therefore \quad v_{máxima} = 8\text{ cm/s}$

64. Un vaso de laboratorio de 1,0 kg que contiene 2,0 kg de aceite (densidad = 916,0 kg/m³) descansa sobre una balanza. Un bloque de hierro de 2,0 kg se suspende de una balanza de resorte y se sumerge por completo en el aceite, como muestra la figura P15.64. Determine las lecturas de equilibrio de estas balanzas.

64A. Un vaso de laboratorio de masa m_b contiene aceite de masa m_0 (densidad = ρ_0) descansa sobre una balanza. Un bloque de hierro de masa m_i se suspende de una balanza de resorte y se sumerge por completo en el aceite, como muestra la figura P15.64. Determine las lecturas de equilibrio de las balanzas.



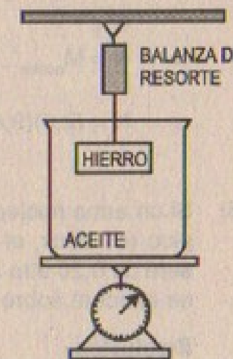


Figura P15.64

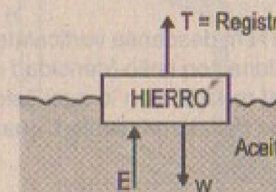
Resolución :

Masa del vaso = 1,0 kg ; Masa del hierro = 2,0 kg

$\rho_{aceite} = 916{,}0\text{ kg/m}^3$; Masa del aceite = 2,0 kg

$\rho_{hierro} = 7{,}86 \times 10^3\text{ kg/m}^3$; $\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3$ kg/m = 3

Haciendo el diagrama de cuerpo libre:



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + E = w$

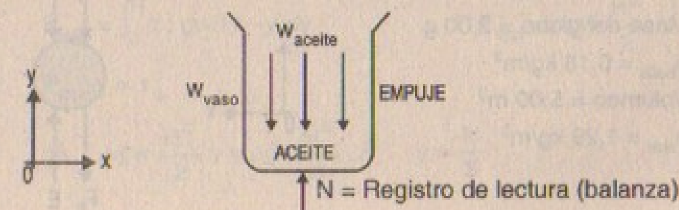
$\Rightarrow \quad$ Registro de lectura $= \dfrac{-\rho_{aceite} \cdot g \cdot M_{hierro}}{\rho_{hierro}} + M_{hierro} \cdot g$

$\Rightarrow \quad$ Registro de lectura $= M_{hierro} \cdot g \left[\dfrac{-\rho_{aceite} + \rho_{hierro}}{\rho_{hierro}}\right]$

Reemplazando: Registro de lectura $= (2{,}0)(9{,}8) \cdot \left[\dfrac{-916 + 7{,}86 \times 10^3}{7{,}86 \times 10^3}\right]$

$\therefore$ Registro de lectura = 17,32 N
(balanza de resorte)

Por otro lado:



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N = M_{aceite} \cdot g + \text{Empuje} + M_{vaso} \cdot g$

$\therefore \quad N = (2,0)(9,8) + \dfrac{(916)(9,8)(2)}{7,86 \times 10^3} + (1,0)(9,8) = 31,68 \text{ N}$

65. Si un arma nuclear de 1 megatón hace explosión a nivel del suelo, la sobrepresión pico (es decir, el incremento de presión arriba de la presión atmosférica normal) será de 0,20 atm a una distancia de 6,0 km. ¿Qué fuerza producida por la explosión se ejercerá sobre el costado de una casa con dimensiones de 4,5 m × 22 m?

Resolución :

Sabemos que el incremento de presión atmosférica es:

$$0,2 \text{ atm} = 0,2 \times (1,013 \times 10^5) \text{ Pa}$$

Entonces sobre una casa al costado se ejercerá dicha presión atmosférica. Entonces:

$$\frac{F}{(4,5)(22)} = (0,2)(1,013 \times 10^5) \qquad \therefore \quad F = 2,0 \times 10^6 \text{ N}$$

66. Un resorte ligero de constante k = 90,0 N/m descansa verticalmente sobre una mesa (Fig. P15.66a). Un globo de 2,00 g se llena con helio (densidad = 0,180 kg/m³) hasta un volumen de 5,00 m³ y se conecta al resorte, con lo cual éste se alarga como en la figura P15.66b. Determine la longitud del alargamiento L cuando el globo está en equilibrio.

66A. Un resorte ligero de constante k descansa verticalmente sobre una mesa (Fig. 15.66a). Un globo de masa m se llena con helio (densidad = ρ_{He}) hasta un volumen V y se conecta al resorte, con lo cual éste se alarga como en la figura P15.66b. Determine la longitud del alargamiento L cuando el globo está en equilibrio.

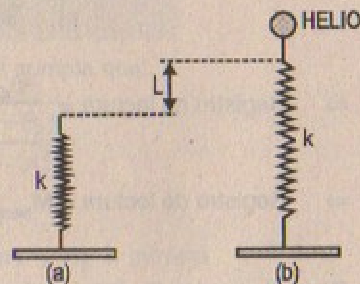


Figura P15.66

Resolución :

k = 90 N/m

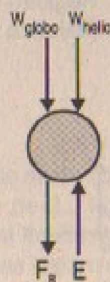
Masa del globo = 2,00 g

$\rho_{helio} = 0,18 \text{ kg/m}^3$

Volumen = 5,00 m³

$\rho_{aire} = 1,29 \text{ kg/m}^3$





$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad W_{globo} + W_{helio} + F_R = E$

$\Rightarrow \quad \text{Masa globo} \cdot g + \rho_{helio} \cdot V \cdot g + k.L = \rho_{aire}\, gV$

$\Rightarrow \quad k.L = g(\rho_{aire}\, V - \rho_{helio}\, V - M_{globo})$

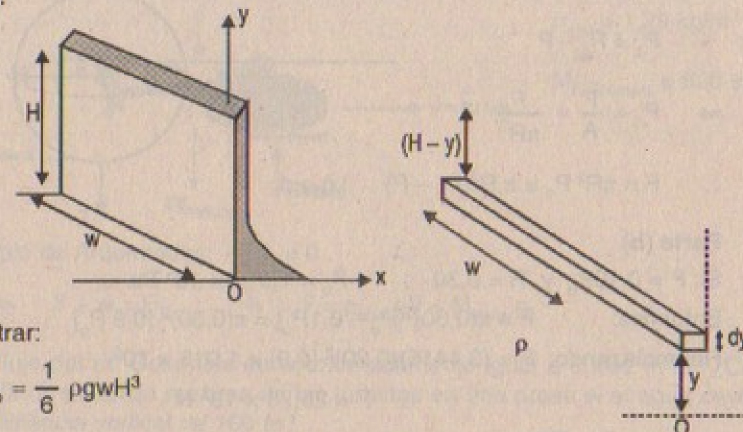
Reemplazando: $L = \dfrac{(9,8)}{90}\,[(1,29)(5) - (0,18)(5) - 0,002]$

$\therefore \quad L = 0,604 \text{ m}$

67. En relación con la figura 15.5, demuestre que el momento de torsión total ejercido por el agua detrás de la presa alrededor de un eje que pasa por O es 1/6 $\rho g w H^3$. Muestre que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia 1/3 H arriba de O.

Resolución :

Parte (a)



Por demostrar:

$$M_{total/o} = \tau_o = \frac{1}{6}\,\rho g w H^3$$

Sabemos que: $\quad dF = P.dA = \rho g(H - y).w.dy \;...\; (1)$

Entonces: $\quad dM_o = \rho g w y d y$

$$\Rightarrow \quad \int dM_o = \rho g w \int_0^H (H - y)\,y\,dy \quad \Rightarrow \quad \tau_o = \rho g w\,\frac{H^3}{6} \quad \text{... l.q.q.d.}$$

Parte (b)

De (1): $\quad F_{total} = \int_0^H \rho \,.\, g w (H - y) dy \qquad \therefore \quad F_{total} = \rho g w\,\dfrac{H^2}{2}$

Por otro lado: $\quad F_{total} \cdot y = \tau_o$

$$\Rightarrow \quad \rho g w\,\frac{H^2}{2}\,y = \rho g w\,\frac{H^3}{6} \quad \therefore \quad y = \frac{H}{3}$$

68. En 1657 Otto von Guericke, inventor de la bomba de aire, extrajo el aire a una esfera hecha de dos hemisferios de latón. Sólo después de algunos intentos, dos grupos de ocho caballos cada uno podían separar los hemisferios y «con enorme dificultad» cuando se podía (Fig. P15.68). a) Muestre que la fuerza F necesaria para separar los hemisferios es $\pi R^2 (P_o - P)$, donde R es el radio de los hemisferios y P es la presión interna en ellos, la cual es mucho menor que P_0. b) Encuentre la fuerza si $P = 0{,}10P_0$ y $R = 0{,}30$ m.

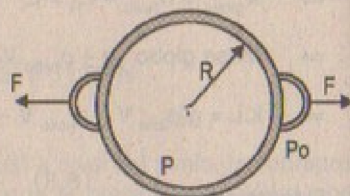
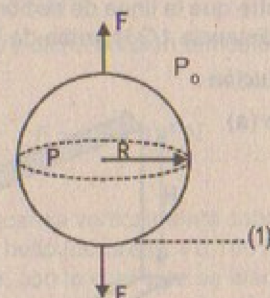


Figura P15.68 (Henry Leap y Jim Lehman)

Resolución:

Por demostrar que: $F = \pi . R^2 (P_o - P)$

Parte (a)



$$P_1 = P_o - P$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2}$$

$$\therefore \quad F = \pi R^2 P_1 = \pi R^2 (P_o - P) \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Si: $P = 0{,}10P_o$ y $R = 0{,}30$; $P_o = 1{,}013 \times 10^5$ Pa

Entonces: $F = \pi(0{,}30)^2[P_o - 0{,}1P_o] = \pi(0{,}30)^2\,[0{,}9\,P_o]$

Reemplazando: $F = (3{,}1416)(0{,}30)^2\,[0{,}9] \times 1{,}013 \times 10^5$

$$\therefore \quad F = 25{,}78 \times 10^3 \text{ N}$$

69. En 1983, en Estados Unidos se empezó a acuñar la moneda de centavo de zinc revestida de cobre en lugar de cobre puro. Si la masa del antiguo centavo de cobre es de 3,083 g en tanto que la del nuevo centavo es 2,517 g, calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo. La densidad del cobre es 8,960 g/cm³ y la del zinc es 7,133 g/cm³. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen.

Resolución:

Sabemos que el volumen es el mismo, entonces

$$V_{moneda} = \frac{M_{Cu}}{\rho_{Cu}} = \frac{3{,}083}{8{,}960}$$

Por otro lado sea: $X_{Cu} + Y_{Zn} = 2{,}517$ g ... (1)

Además por dato: $\dfrac{X_{Cu}}{\rho_{Cu}} + \dfrac{Y_{Zn}}{\rho_{Zn}} = \dfrac{3{,}083}{8{,}960}$ ... (2)

De (2): $(7{,}133)\,X_{Cu} + (8{,}960)Y_{Zn} = \left(\dfrac{3{,}083}{8{,}960}\right)(8{,}960)(7{,}133)$

$$\Rightarrow \quad X_{Cu} + Y_{Zn}\left(\frac{8{,}960}{7{,}133}\right) = 3{,}083 \quad \text{... (3)}$$

(3) – (1): $0{,}256\ Y_{Zn} = 0{,}566 \quad \therefore \quad Y_{Zn} = 0{,}566/0{,}256$ g

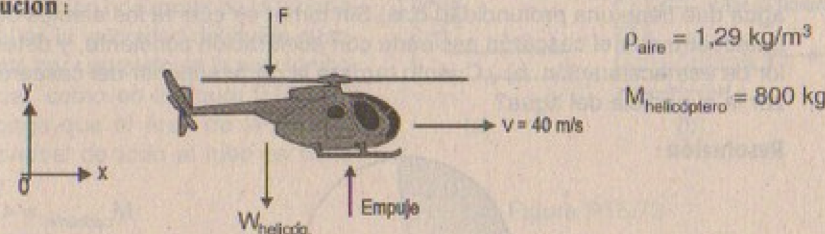
Por último:

Como: $3{,}083/8{,}960$ ——— 100%

$\dfrac{0{,}566}{(0{,}256)(7{,}133)}$ ——— x $\quad \therefore \quad x = 90{,}04\%$

70. ¿Cuánto aire debe empujarse hacia abajo a 40,0 m/s con el fin de mantener un helicóptero de 800 kg en vuelo?

Resolución:



$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³

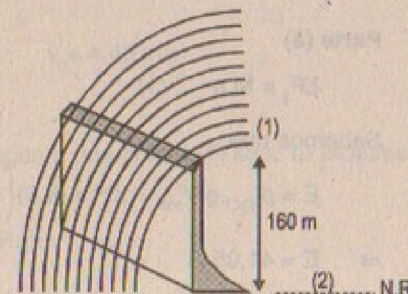
$M_{helicóptero} = 800$ kg

Por el principio de Arquímedes: $\Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow \quad F + w = E \quad \Rightarrow \quad F = \rho_{aire}\, gV - M_{Helip}.g$$

71. La tasa de flujo del río Columbia es aproximadamente igual a 3 200 m³/s. ¿Cuál sería la salida de potencia máxima de las turbinas en una presa si el agua cayera desde una distancia vertical de 160 m?

Resolución:



Por continuidad:

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} = 3\,200\ \frac{m^3}{s} = A.v \quad \text{... (1)}$$

Por el principio y teorema de Bernoulli: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho gh = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_{H_2O} v_s^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{salida} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8)(160)} = 56 \text{ m/s}$$

Entonces de (1): $3\,200 = A(56)$ $\therefore$ $A = 57,14\ m^2$

En consecuencia:

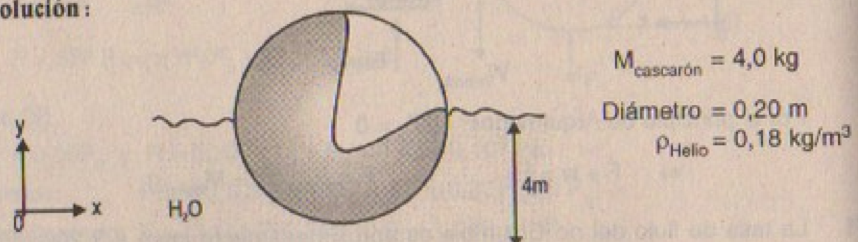
$$\text{Potencia máxima} = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}v^3A = \frac{1}{2}(10^3)(56)^3(57,14)$$

$$\therefore\ P_{máxima} = 5,02\ GW$$

72. Un delgado cascarón esférico de 4,0 kg de masa y 0,20 m de diámetro se llena con helio (densidad = 0,180 kg/m³). Después se suelta desde el reposo sobre el fondo de un estanque de agua que tiene 4,0 m de profundidad. a) Sin tomar en cuenta los efectos de la fricción, demuestre que el cascarón asciende con aceleración constante, y determine el valor de esa aceleración. b) ¿Cuánto tardará la parte superior del cascarón en alcanzar la superficie del agua?

72A. Un delgado cascarón esférico de masa m y diámetro d se llena con helio (densidad = ρ_{He}). Después se suelta desde el reposo sobre el fondo de un estanque de agua que tiene una profundidad h. a) Sin tomar en cuenta los efectos de la fricción, demuestre que el cascarón asciende con aceleración constante, y determine el valor de esa aceleración. b) ¿Cuánto tardará la parte superior del cascarón en alcanzar la superficie del agua?

Resolución:

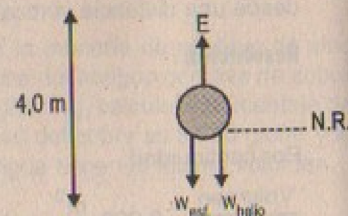


$M_{cascarón} = 4,0\ kg$

Diámetro = 0,20 m

$\rho_{Helio} = 0,18\ kg/m^3$

Parte (a)



$\Sigma F_y = M.a$ ... (1)

Sabemos que:

$$E = \rho_{H_2O}.g.V_{esf.} = 10^3 \times (9,8)\left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{0,2}{2}\right)^3$$

$\Rightarrow$ $E = 41,05\ N$

Además: $w_{esf} = (4,0)(9,8) = 39,2\ N$

$w_{helio} = \rho_{He}.gV = (0,18)(9,8)(4/3\ \pi)(0,1)^3 = 0,0074\ N$

Como $E > w_{esf.} + w_{He}$ $\Rightarrow$ El cuerpo acelera hacia arriba

Luego en (1): $41,05 - (39,2 + 0,0074) = \left(4,0 + \frac{0,0074}{9,80}\right)a$

$\therefore\ a = 0,46\ m/s^2$

Parte (b)

Por cinemática: $h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 4,0 = \frac{1}{2}(0,46)t^2$

$\therefore\ t = 4,17\ s$

73. Un fluido no viscoso e incomprensible al principio está en reposo en la parte vertical de la tubería mostrada en la figura P15,73a, donde L = 2,0 m. Cuando la válvula se abre, el fluido circula por la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la velocidad del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como en la figura P15.73b? Suponga que el área de la sección transversal de todo el tubo es constante.

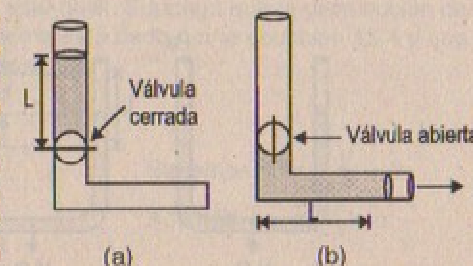


Figura P15.73

Resolución:

$L = 2,0\ m$; $\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3$

$P_a = P_b$

$\Rightarrow$ $P_a + \rho_L.g\frac{L}{2} = P_b + \frac{1}{2}\rho_L.v^2$ $\Rightarrow$ $v = \sqrt{(1)\,gL}$

Reemplazando: $v = \sqrt{(1)(9,8)(2)}$ $\therefore$ $v = 4,43\ m/s$

74. Sobre una presa de altura h metros cae agua a una tasa de R kg/s: a) Muestre que la potencia disponible del agua es

$$P = \frac{16}{27}Rgh$$

donde g es la aceleración en caída libre. b) Cada unidad hidroeléctrica en la presa Grand Coulee descarga agua a razón de $8,5 \times 10^5$ kg/s desde una altura de 87 m. La potencia generada por el agua que cae se convierte en potencia eléctrica con una eficiencia de 85%. ¿Cuánta potencia eléctrica produce cada unidad hidroeléctrica?

Datos incorrectos.

75. Un tubo en U abierto en ambos extremos se llena parcialmente de agua (Fig. P15.75a). Luego se vierte aceite (densidad = 750 kg/m³) dentro del brazo derecho y forma una columna L = 5,00 cm de altura (Fig. P15.75b). a) Determine la diferencia, h, en las alturas de las dos superficies del líquido. Suponga que la densidad del aire es 1,29 kg/m³, pero asegúrese de incluir las diferencias en la presión atmosférica debido a diferencias en la altura. b) El brazo derecho después se aísla de cualquier movimiento de aire mientras se sopla aire a través de la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos quedan a la misma altura (Fig. P15.75c). Determine la velocidad del aire que se sopla sobre el brazo izquierdo.

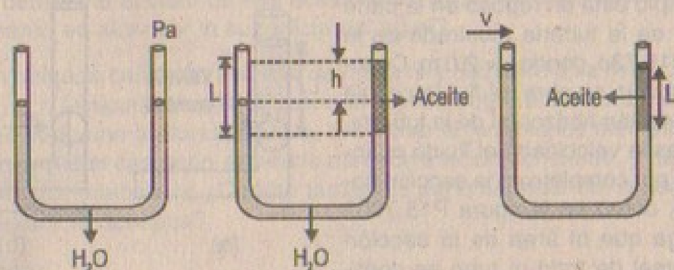


Figura P15.75

Resolución:

$\rho_{aceite} = 750\ kg/m^3$; $L = 5{,}00\ cm$

$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

Parte (a)

Por principio de estática de fluidos: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot g(L-h) + P_{atm} = \rho_{aceite}\, gL + P_{atm}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{\rho_{H_2O}}(\rho_{H_2O} - \rho_{aceite}) = h$$

$$\therefore \quad h = 1{,}25\ cm$$

Parte (b)

Cuando se aisla el brazo derecho del tubo y empieza a soplar en la parte izquierda, la presión por el blindado hacia el aceite hace que se transmita por el principio de Pascal, también hacia el agua hasta que el nivel del agua en el tubo izquierdo llegue al nivel del aceite en el tubo derecho.

Luego:

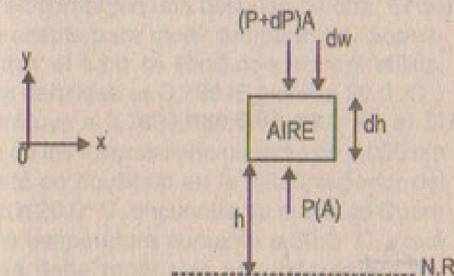
Por Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho_{aire} \cdot v^2 = \rho_{H_2O}\, gh \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{2\rho_{H_2O} \cdot gh}{\rho_{Aire}}$

Reemplazando: $v^2 = \frac{2(10^3)(9{,}8)(1{,}25\times10^{-2})}{1{,}29}$

$$\therefore \quad v = 13{,}8\ m/s$$

76. Muestre que la variación de la presión atmosférica con la altura está dada por $P = P_0 e^{-\alpha h}$, donde $\alpha = \rho_0 g/P_0$, P_0 es la presión atmosférica a cierto nivel de referencia, y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución de la presión atmosférica con la altura creciente está dada por la ecuación 15.4 y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

Resolución:



Sabemos que: $\frac{\rho}{P} = k$

Además: $\rho_o.g/P_o = \alpha$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad dw + (P + dP)A = PA$$

$$\Rightarrow \quad \rho\, Adhg = -dP.A$$

$$\Rightarrow \quad -gk.dh = \frac{1}{P}\, dP$$

Integrando: $-g.kh = \ln\left[\frac{P}{P_o}\right]$

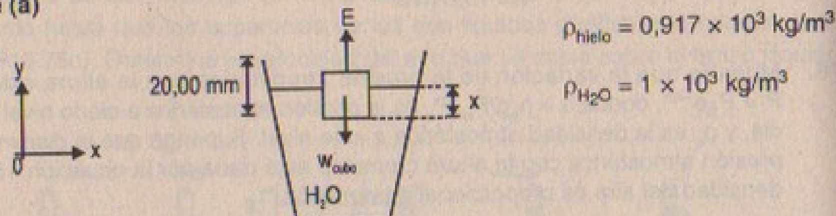
$$\Rightarrow \quad e^{-kg.h}.\,P_o = P \qquad \text{Pero } k = \frac{\rho_o}{P_o} \quad \therefore \quad e^{-\frac{\rho_o \cdot g.h}{P_o}} = e^{-\alpha h} = \frac{P}{P_o} \quad \text{l.q.q.d.}$$

77. Un cubo de hielo cuyo borde mide 20 mm flota en un vaso de agua casi tan fría como el hielo con una de sus caras paralela a la superficie del agua. a) ¿A qué distancia por debajo de la superficie del agua se encuentra la cara inferior del bloque? b) Alcohol etílico hecho hielo se vierte con cuidado sobre la superficie del agua para formar una capa de 5 mm de espesor sobre el agua. Cuando el cubo de hielo

alcanza el equilibrio hidrostático otra vez, ¿cuál será la distancia desde la parte superior del agua hasta la cara inferior del bloque? c) Se vierte alcohol etílico adicional sobre la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Cuál es el espesor que se requiere del alcohol etílico?

Resolución :

Parte (a)



$\rho_{hielo} = 0,917 \times 10^3$ kg/m³

$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3$ kg/m³

$\Sigma F_y = 0$

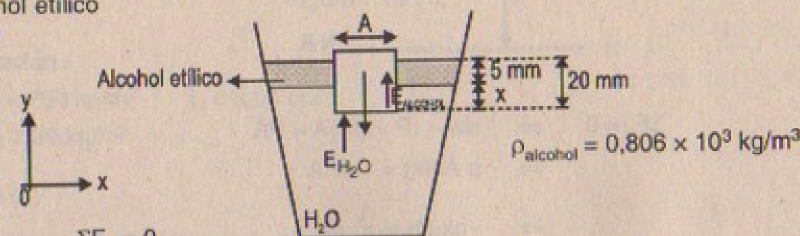
$\Rightarrow \quad E = w_{cubo}$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\, gAx = \rho_{hielo}\, gA(20)$

$\Rightarrow \quad (10^3)\, x = (0,917 \times 10^3)\,(20) \qquad \therefore \quad x = 18,3$ mm

Parte (b)

alcohol etílico



$\rho_{alcohol} = 0,806 \times 10^3$ kg/m³

$\Sigma F_y = 0$

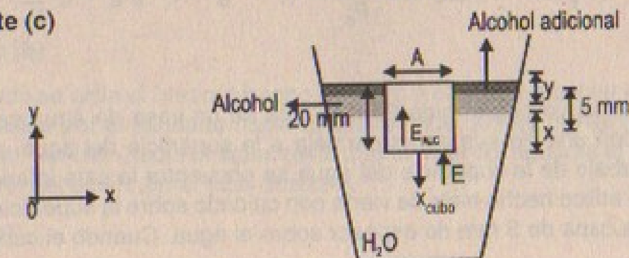
$\Rightarrow \quad w_{cubo} = E_{alcohol} + E_{agua}$

$\Rightarrow \quad \rho_{hielo} \cdot gA(20) = \rho_{alcohol}\, gA(5) + \rho_{H_2O}\, gA(x)$

$\Rightarrow \quad (0,907 \times 10^3)(20) = (0,806 \times 10^3)\, 5 + (1 \times 10^3)(x)$

$\therefore \quad x = 14,3$ mm

Parte (c)



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad w_{cubo} = E_{alcohol} + E_{H_2O} \quad \Rightarrow \quad \rho_{hielo}\, gA(20) = \rho_{alcohol}\, gA(5 + y) + \rho_{H_2O}\, gA(x)$

Pero siempre que: $x + y + 5 = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 15 - y$

$\Rightarrow \quad (0,917 \times 10^3)(20) = (0,806 \times 10^3)(5 + y) + (10^3)(15 - y)$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{15 + 5(0,806) - 20\,(0,917)}{0,194} = 3,556 \text{ mm}$$

En consecuencia:

El espesor que se requiere de alcohol etílico será: 5 + 3,56 = 8,56 mm

78. El *termómetro de alma en vidrio*, inventado en Florencia, Italia, alrededor de 1654, consta de un tubo de líquido (el alma) que contiene un número de esferas de vidrio sumergidas con masas ligeramente diferentes (Fig. P15.78). A temperaturas suficientemente bajas todas las esferas flotan, pero cuando la temperatura aumenta, las esferas se sumergen una después de otra. El dispositivo es una herramienta burda pero interesante para medir temperatura. Suponga que el tubo se llena con alcohol etílico, cuya densidad es 0,78945 g/cm³ a 20,0° C y disminuye a 0,78097 g/cm³ a 30,0° C. a) Si una de las esferas tiene un radio de 1,000 cm y está en equilibrio en la mitad superior del tubo a 20,0° C, encuentre su masa. b) Cuando la temperatura aumenta a 30,0° C, ¿qué masa debe tener una segunda esfera del mismo radio para estar en equilibrio en el punto ubicado a la mitad? c) A 30,0° C la primera esfera ha caído hasta el fondo del tubo. ¿Qué fuerza hacia arriba debe ejercer el fondo del tubo sobre esta esfera?

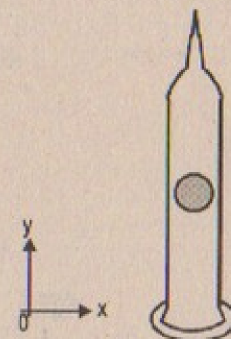


Figura P15.78 (Cortesía de Jeanne Maier)

Resolución :

$\rho_{alcohol} = 0,78945$ g/cm³

Radio = 1,000 cm ; Masa = ?

Parte (a)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{esf} = E_{alcohol} \quad \Rightarrow \quad M.g = \rho_{alcohol}\, g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\Rightarrow \quad M = (0,78945)\left(\frac{4}{3}\right)(3,1416)(1,0)^3$$

$\therefore \quad$ Masa de la esfera = 3,3 g

Parte (b)

A 30°C $\quad \rho_{alcohol} = 0,78097$ g/cm³

Entonces: $M = (0,78097)(4/3)(3,1416)(10)^3 \qquad \therefore \quad M = 3,27$ g

Capítulo 16

MOVIMIENTO ONDULATORIO

ONDAS VIAJERAS UNIDIMENSIONALES

1. En t = 0, un pulso de onda transversal en un alambre se describe por medio de la función $y = \dfrac{6}{x^2+3}$, donde x e y están en metros. Escribe la función y(x; t) que represente esta onda si ésta viaja en la dirección x positiva con una velocidad de 4,5 m/s.

Resolución :

Sabemos que: x(t) = x – vt (dirección positiva)

$\Rightarrow \quad x(t=0) = x_0 \qquad \wedge \qquad x = x - 4{,}5t$

Luego: $\quad y(x;\, t) = f(x;\, t) = \dfrac{6}{(x-4{,}5\,t)^2+3}$

2. Dos pulsos de onda A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada con una velocidad de 2 cm/s. La amplitud de A es dos veces la amplitud de B. Los pulsos se muestran en la figura P16.2 en t = 0. Dibuje la forma de la cuerda en t = 1; 1,5; 2; 2,5 y 3 s.

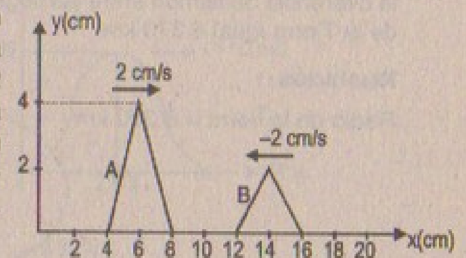
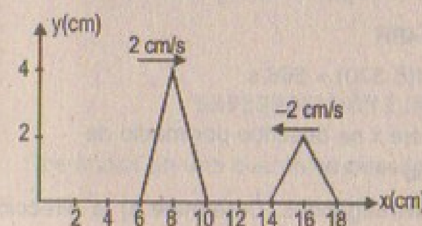


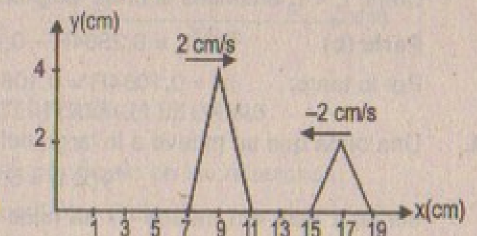
Figura P16.2

Resolución :

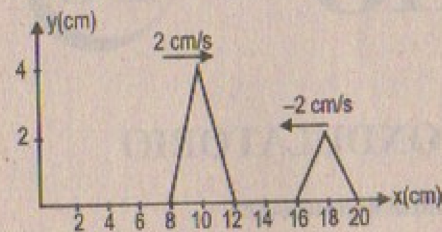
Para t = 1 s



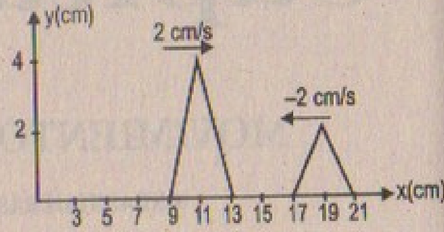
Para t = 1,5 s



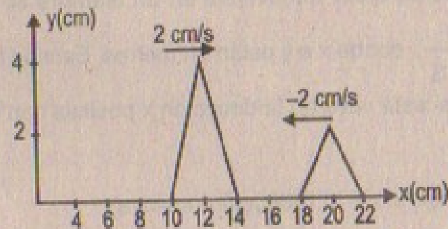
Para t = 2 s



Para t = 2,5 s



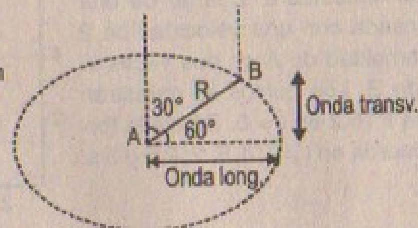
Para t = 3 s



3. Dos puntos, A y B, sobre la Tierra están a la misma longitud y 60,0° separados en latitud. Un terremoto en el punto A envía dos ondas hacia B. Una onda transversal viaja por la superficie de la Tierra a 4,50 km/s y una onda longitudinal viaja por el interior de la Tierra a 7,8 km/s. a) ¿Cuál de las ondas llega a B primero? b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de las dos ondas en B? Considere el radio de la Tierra igual 6 370 km.

Resolución:

Radio de la Tierra = 6 370 km



Parte (a)

$6\,370$ km = $(4,5)\text{sen}30°t_1$ $\Rightarrow$ $t_1 = 0,148R$ (onda longitudinal)

$6\,370$ km = $(7,8)\cos30°t_2$ $\Rightarrow$ $t_2 = 0,2564R$ (onda transversal)

Como $t_1 < t_2$ entonces la onda longitudinal llegará más rápido a B

Parte (b) $t_2 - t_1 = 0,2564R - 0,148R$

Por lo tanto: $\Delta t = 0,1084R = 0,1084(6\,370) = 666$ s

4. Una onda que se mueve a lo largo del eje x se describe por medio de

$$y(x;\,t) = 5,0e^{-(x+5,0t)^2}$$

donde x está em metros y t se mide en segundos. Determine a) la dirección del movimiento de la onda, y b) la velocidad de la onda.

Resolución:

$$y(x;\,t) = (5,0)\,e^{-(x+5,0t)^2}$$

Parte (a)

Como: $y(x;\,t) = f(x \pm vt)$

$$\Rightarrow\quad -(x+5t) = -x - 5t = \text{cte} \quad\Rightarrow\quad -dx - 5dt = 0$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = -5\ \text{m/s} = v_{onda}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces el pulso viaja en la dirección «x» negativa.

Parte (b)

La velocidad de la onda = 5 m/s

5. Las ondas en el océano con una distancia cresta a cresta de 10 m pueden describirse mediante:

$$y(x;\,t) = (0,80\ \text{m})\text{sen}\,[0,63(x - vt)]$$

donde v = 1,2 m/s. a) Dibuje y(x; t) en t = 0. b) Dibuje y(x; t) en t = 2,0 s. Advierta cómo toda la forma de la onda se ha movido 2,4 m en la dirección x positiva en este intervalo de tiempo.

Resolución:

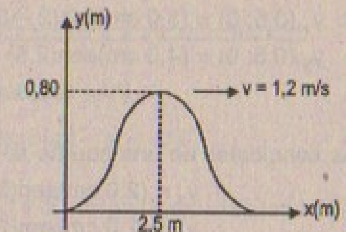
$$y(x;\,t) = (0,80\ \text{m})\ \text{sen}[0,63(x - vt)]$$

Por dato: $\lambda = 10$ m; $v = 12$ m/s

Parte (a)

En t = 0

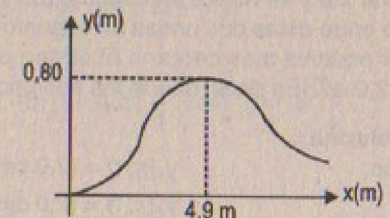
$y(x;\,0) = (0,80)\text{sen}[0,63x]$



Parte (b)

En t = 2,0 s

$y(x;\,2) = (0,80)\text{sen}[0,63(x - 1,2(2))]$



SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIA DE ONDAS

6. Dos ondas en una cuerda se describen por medio de las relaciones:

$$y_1 = 3,0\cos(4,0x - 5,0t)$$

$$y_2 = 4,0\text{sen}(5,0x - 2,0t)$$

donde x e y están en centímetros y t en segundos. Encuentre la superposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos a) x = 1,0; t = 1,0; b) x = 1,0; t = 0,50; c) x = 0,50; t = 0. (Recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.)

Resolución:

Parte (a)

$$x = 1{,}0\ \text{cm}; \quad t = 1{,}0\ \text{s} \quad \text{nos piden: } y_1 + y_2$$

Entonces: $y_1(1;\,1) = (3{,}0\ \text{cm})\cos[4{,}0 - 5{,}0] = (3{,}0\ \text{cm})\cos[1{,}00\ \text{rad}]$

$y_2(1;\,1) = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[5{,}0 - 2{,}0] = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[3{,}00\ \text{rad}]$

Por lo tanto:

$y_1 + y_2 = (3{,}0\ \text{cm})\cos[1{,}00\ \text{rad}] + (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[3{,}00\ \text{rad}] = 3{,}0(0{,}54) + 4{,}0(0{,}141)$

$\therefore \quad y_1 + y_2 = 2{,}18\ \text{cm}$

Parte (b)

Para x = 1,0 y t = 0,5

Entonces: $y_1(1;\,0{,}5) = 3{,}0\cos(4 - 2{,}5) = 3{,}0\cos(1{,}5) = 0{,}212\ \text{cm}$

$y_2(1;\,0{,}5) = 4{,}0\text{sen}(5 - 1) = 4{,}0\ \text{sen}(4) = -3{,}027\ \text{cm}$

$\therefore \quad y_1 + y_2 = -2{,}82\ \text{cm}$

Parte (c)

Para: x = 0,50 y t = 0

Entonces: $y_1\,(0{,}5;\,0) = (3{,}0\ \text{cm})\cos(2 - 0) = (3{,}0)\cos(2) = -1{,}248\ \text{cm}$

$y_2\,(0{,}5;\,0) = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}(2{,}5) = (4{,}0)\ \text{sen}(2{,}5) = 2{,}393\ \text{cm}$

$\therefore \quad y_1 + y_2 = 1{,}146\ \text{cm}$

7. Dos ondas senoidales en una cuerda se definen mediante las funciones:

$$y_1 = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}(20x - 30t)$$
$$y_2 = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}(25x - 40t)$$

donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto x = 5,0 cm en t = 2,0 s? b) ¿Cuál es el valor de x positiva más cercano al origen para el cual las dos fases difieren en $\pm\pi$ en t = 2,0 s? (Es decir, donde las dos ondas suman cero.)

Resolución:

Sean: $y_1(x;\,t) = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 30t]$

$y_2(x;\,t) = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[25x - 40t]$

Parte (a)

Cuando: x = 5 cm y t = 2,0 s

Entonces: $y_1\,(5;\,2) = (2{,}0)\text{sen}[40\ \text{rad}] = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[40\ \text{rad} + 0]$

$y_2\,(5;\,2) = (2{,}0)\text{sen}[45\ \text{rad}] = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[40\ \text{rad} + 5\ \text{rad}]$

En consecuencia: la diferencia de fase entre y_1, y_2 será:

$$5\ \text{rad} - 0 = 5{,}00\ \text{radianes}$$

Parte (b)

Por dato, diferencia de fase = + π = 3,1416

Entonces en: t = 2,0 s

$$(2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 30(2)] - (2{,}0)\ \text{sen}[25x - 80] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 60] = (2{,}0)\ \text{sen}[25x - 80]$$

$$\Rightarrow \quad 20x - 60 = 25x - 80 \quad \therefore \quad x = \pm\frac{20}{5}$$

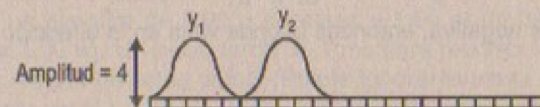
Como nos piden «x» positivo (cercano), entonces:

$$x = \frac{20 - \pi}{5} = \frac{20 - 3{,}1416}{5}$$

8. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Cada una tiene una amplitud de 4,0 cm, y están 90° fuera de fase. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

8A. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Cada una tiene una amplitud A, y están fuera de fase un ángulo ϕ. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

Resolución:



Sea: $y_1(x;\,t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[ax - bt]$

$y_2(x;\,t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[ax - bt + \pi/2]$

Entonces:

$$y_1(x;\,t) + y_2(x;\,t) = y_{result}\,(x;\,t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[(ax - bt)] + (4{,}00)\cos[(ax - bt)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\,(x;\,t)}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\big[(ax - bt)\big] + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\big[(ax - bt)\big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\,(x,t)}{4\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\big[(ax - bt)\big] + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\big[(ax - bt)\big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\,(x;\,t)}{4\sqrt{2}} = \text{sen}\left[(ax - bt) + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\therefore \quad y_{result}(x;\,t) = \left(4\sqrt{2}\ \text{cm}\right)\text{sen}\left[ax - bt + \frac{\pi}{4}\right]$$

En consecuencia:

La amplitud de la onda resultante es: $4\sqrt{2}$ cm

9. Dos pulsos que viajan en la misma cuerda se describen por medio de

$$y_1 = \frac{5}{(3x-4t)^2+2} \quad ; \quad y_2 = \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2}$$

a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? b) ¿En qué tiempo se cancelan los dos? c) ¿En qué punto las dos ondas siempre se cancelan?

Resolución:

Parte (a) $y_1 = \frac{5}{(3x-4t)^2+2} \Rightarrow 3x - 4t = cte$

$\Rightarrow 3dx - 4dt = 0$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{4}{3} = v_{pulso}$

Como: v_{pulso} es positiva, entonces la onda viaja en la dirección «x» positiva

$y_2 = \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2} \Rightarrow 3x + 4t - 6 = cte$

$\Rightarrow 3dx + 4dt = 0$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-4}{3} = v_{pulso}$

Como: v_{pulso} es negativa, entonces la onda viaja en la dirección «x» negativa

Parte (b)

Se debe de cumplir que: $y_1 + y_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{5}{(3x-4t)^2+2} + \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2} = 0 \Rightarrow \frac{5}{(3x-4t)^2+2} = \frac{5}{(3x+4t-6)^2+2}$$

$$\Rightarrow (3x-4t)^2 = (3x+4t-6)^2$$

Resolviendo, resulta que: $-8t + 6 = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{3}{4} = 0{,}75$ s

Parte (c)

En: $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Luego: $y_1(3/4; 1) = 5/2 \wedge y_2(3/4; 1) = -5/2$

Luego:
Las dos ondas siempre se cancelan en x = 1,0 m

LA VELOCIDAD DE ONDAS EN CUERDAS

10. Se producen ondas transversales con una velocidad de 50 m/s en una cuerda tensada, cuya longitud es de 5,0 m con una masa total de 0,060 kg. ¿Cuál es la tensión requerida?

Resolución:

Sabemos que:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$



$$\Rightarrow (50)^2 = \frac{(F)(5)}{0{,}060} \quad \therefore \quad F = 30 \text{ N}$$

11. Una cuerda de piano de masa por longitud unitaria igual a $5{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m se somete a una tensión de 1 350 N. Encuentre la velocidad con la cual una onda se propaga en esta cuerda.

Resolución:

T ← ——— → T = 1 350 N

Sabemos que: $v_{onda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v_{onda} = \sqrt{\frac{1\,350}{5{,}00 \times 10^{-3}}} = 520$ m/s

12. Un astronauta sobre la Luna desea encontrar el valor local de g midiendo el tiempo de pulsos que viajan por un alambre que tiene una gran masa suspendida de él. Suponga que un alambre de 4,00 g de masa y 1,60 m de largo tiene una masa suspendida de 3,00 kg. Un pulso tarda 36,1 ms para recorrer la longitud del alambre. Calcule g a partir de estos datos. (Puede ignorar la masa del alambre cuando calcule la tensión en él.)

12A. Un astronauta sobre la Luna desea encontrar el valor local de g midiendo el tiempo de pulsos que viajan por un alambre que tiene una gran masa suspendida de él. Suponga que un alambre de masa m y largo L tiene una masa M suspendida. Un pulso tarda un tiempo t para recorrer la longitud del alambre. Calcule g a partir de estos datos. (Puede ignorar la masa del alambre cuando calcule la tensión en él.)

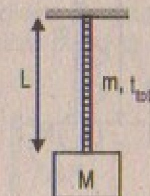
Resolución:

Por dato: L = 1,60 m;

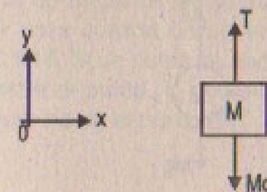
$m_{alambre} = 4 \times 10^{-3}$ kg ;

M = 3,00 kg

$t_{total} = 36{,}1 \times 10^{-3}$ s



D.C.L. (bloque)



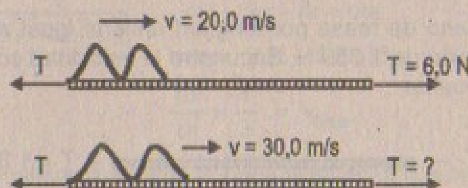
$\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = Mg$

Luego: $L = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \times t_{total} \Rightarrow (1,6) = \sqrt{\frac{MgL}{m}} \times 36,1 \times 10^{-3}$

$\therefore \quad g = 1,64 \text{ m/s}^2$

13. En un alambre sometido a una tensión de 6,00 N viajan ondas transversales con una velocidad de 20,0 m/s. ¿Qué tensión se requiere para una velocidad de onda de 30,0 m/s en la misma cuerda?

Resolución :



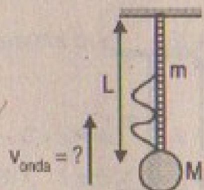
Sabemos que: $20 = \sqrt{\frac{6,0}{\mu}} \Rightarrow \frac{6,0}{(20)^2} = \mu \quad ... (1)$

Por otro lado: $30 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{(6,0)} \times (20)^2}$

$\Rightarrow (30)^2 = \frac{T}{(6,0)} \times (20)^2 \quad \therefore \quad T = 13,5 \text{ N}$

14. Un péndulo simple se compone de una bola de masa M que cuelga de una cuerda uniforme de masa m y longitud L, con m << M. Si el periodo de oscilación del péndulo es T, determine la velocidad de una onda transversal en la cuerda cuando el péndulo cuelga verticalmente.

Resolución :



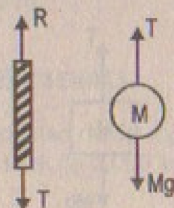
Datos: m << M

$T_{pend} = 2\pi \sqrt{\frac{L_f}{g}} = T$

Por dato: $T^2 = 4\pi^2 \frac{L_f}{g}$

$\therefore \quad L_f = T^2 g / 4\pi^2$

Por otro lado:

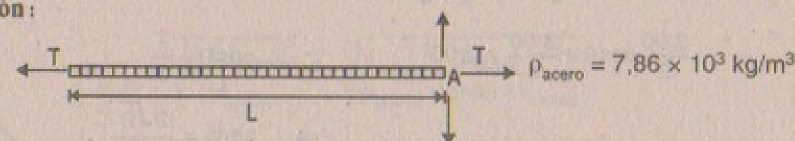


Entonces: $v_{onda\ trans.} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg.L_f}{m}} = \sqrt{\frac{Mg}{m}\left(\frac{T^2.g}{4\pi^2}\right)}$

$\therefore \quad v_{onda\ trans.\ (cuerda)} = \frac{Tg}{2\pi}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$

15. El límite elástico de un pedazo de alambre de acero es de $2,7 \times 10^9$ Pa. ¿Cuál es la velocidad máxima a la cual pueden propagarse pulsos de onda transversales a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es de $7,86 \times 10^3$ kg/m³.)

Resolución :



Sabemos que: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad ... (\alpha)$

Por otro lado: $\frac{T}{A} = 2,7 \times 10^9 \text{ Pa} \Rightarrow T = 2,7 \times 10^9 A \ ... (1)$

Además: $7,86 \times 10^3 = \frac{m}{V} = \frac{M_{acero}}{A.L} \Rightarrow \frac{M}{L} = \mu = 7,86 \times 10^3 \times A \ ... (2)$

Luego (1) y (2) en (α): $v = \sqrt{\frac{2,7 \times 10^9 \times A}{7,86 \times 10^3 \times A}} \quad \therefore \quad v = 586 \text{ m/s}$

16. Una cuerda ligera de 10,0 g de masa y longitud L = 3,00 m tiene sus extremos sujetos a dos paredes que están separadas por una distancia D. Dos masas, cada una de masa M = 2,00 kg, están suspendidas de esta cuerda como en la figura P16.16. Si un pulso de onda se envía desde el punto A, ¿cuánto tarda en viajar hasta el punto B?

16A. Una cuerda ligera de masa m y longitud L tiene sus extremos sujetos a dos paredes que están separadas por una distancia D. Dos masas, cada una de masa M, están suspendidas de esta cuerda como en la figura P16.16. Si un pulso de onda se envía desde el punto A, ¿cuánto tarda en viajar hasta el punto B?

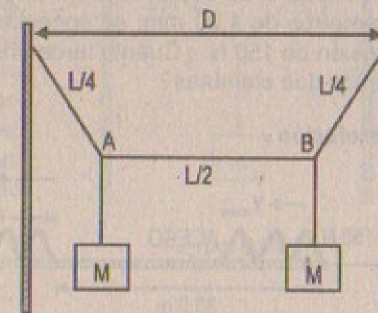
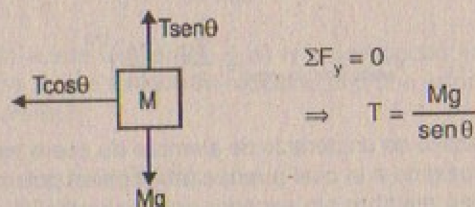


Figura P16.16

Resolución :

$M_{cuerda} = 10{,}0$ g ; $L_{cuerda} = 3{,}00$ m
D = 2,00 m ; M = 2,00 kg

D.C.L. (en el punto A)



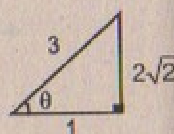
$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad T = \dfrac{Mg}{\text{sen}\theta}$

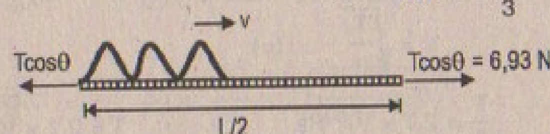
Por otro lado: $\dfrac{L}{4}\cos\theta + \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{4}\cos\theta = D$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3{,}00}{2}\cos\theta + \dfrac{3{,}00}{2} = 2{,}00 \quad \therefore \quad \cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



Luego:



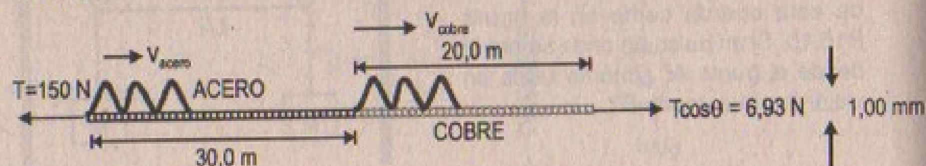
Como $\quad T = \dfrac{Mg}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \quad T\cos\theta = Mg.\cot\theta = \dfrac{(2)(9{,}8)(1)}{2\sqrt{2}}$

Entonces: $\quad v = \sqrt{\dfrac{T\cos\theta}{M_{cuerda}} \times L} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{9{,}8\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{0{,}01}{3}}}$

En consecuencia: $\quad \dfrac{L}{2} = v.t \quad \therefore \quad t = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{45{,}59} = 0{,}0329$ s

17. Un alambre de acero de 30,0 m y un alambre de cobre de 20,0 m, ambos con diámetros de 1,00 mm, se conectan extremo con extremo y se estiran hasta una tensión de 150 N. ¿Cuánto tarda una onda transversal en viajar por la longitud total de los dos alambres?

Resolución :



Sabemos que: $\rho_{acero} = 7{,}86 \times 10^3$ kg/m³ ; $\rho_{cobre} = 8{,}92 \times 10^3$ kg/m³

$$v_{acero} = \sqrt{\frac{T \times L}{M_{Acero}}} = \sqrt{\frac{T \cdot L_{acero}}{\rho_{acero} \times \text{área} \times L_{acero}}}$$

Reemplazando: $v_{acero} = \sqrt{\dfrac{150}{(7{,}86\times10^3)\left[\pi\left((0{,}5)\times10^{-3}\right)^2\right]}}$

$\therefore \quad v_{acero} = 155{,}88$ m/s

Luego: $\quad 30 = v_{acero}t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}192$ s

$$v_{cobre} = \sqrt{\frac{T \times L_{cobre}}{M_{cobre}}} = \sqrt{\frac{T \cdot L_{cobre}}{\rho_{cobre} \times \text{área} \times L_{cobre}}}$$

Entonces: $\quad v_{cobre} = \sqrt{\dfrac{150}{(8{,}92\times10^3)(\pi)\left[(0{,}5)(10^{-3})\right]^2}}$

$\therefore \quad v_{cobre} = 146{,}3$ m/s

Luego: $\quad 20{,}0 \text{ m} = v_{cobre} \times t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}1367$ s

En consecuencia:

El tiempo total que tarda una onda transversal en recorrer la longitud de los dos alambres será $t_1 + t_2$

$\therefore \quad T_{total} = t_1 + t_2 = (0{,}192) + (0{,}1367) = 0{,}3237$ segundos

18. Una cuerda ligera de 8,00 g/m de masa por longitud unitaria tiene sus extremos sujetos a dos paredes separadas por una distancia igual a tres cuartos de la longitud de la cuerda (Fig. P16.18). Una masa m se suspende del centro de la cuerda, a la cual le impone una tensión. a) Encuentre una expresión para la velocidad de la onda transversal en la cuerda como una función de la masa colgante. b) ¿Qué cantidad de masa debe suspenderse de la cuerda para tener una velocidad de onda de 60,0 m/s?

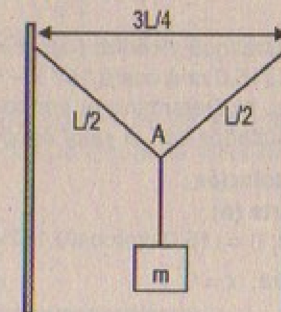
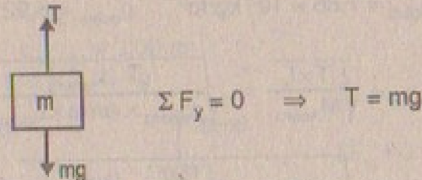


Figura P16.18

Resolución :

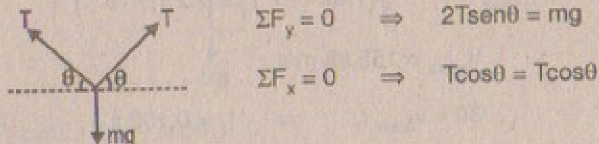
$\mu_{cuerda} = 8{,}00$ g/m

Parte (a)
D.C.L. (m)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = mg$

Por otro lado:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T\text{sen}\theta = mg$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta = T\cos\theta$

Además: $2\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta = \frac{3L}{4} \qquad \therefore \cos\theta = \frac{3}{4}$

Luego: $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Luego: $T = \frac{mg}{2\text{sen}\theta} = \frac{2\,mg}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}\,.\,mg$

Luego: $v_{transversal} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\left(2\times\sqrt{7}\times 10^3\right)(9,8)(m)}{56}}$

$\therefore \quad v_{trans.} = 30,4\,\sqrt{m}$

Parte (b)
Si: $v_{trans} = 60,0$ m/s $\Rightarrow (60,0)^2 = (80,4)^2 \times m$

$\therefore \quad m = 1,95$ kg

ONDAS SENOIDALES

19. a) Grafique y contra t en $x = 0$ para una onda senoidal de la forma: $y = (15,0\text{ cm})\cos(0,157\,x - 50,3\,t)$, donde x e y están en centímetros y t en segundos. b) Determine el periodo de vibración a partir de esta gráfica y compare sus resultados con el valor encontrado en el ejemplo 16.3.

Resolución :

Parte (a)

$y(x;\,t) = (15,0\text{ cm})\cos(0,157x - 50,3\,t)$

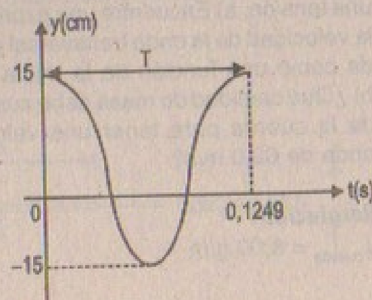
Para: $x = 0$

$\Rightarrow \quad y(0;t) = 15\cos(50,3t)$

Para $y(0;t) = 15$ cm

$\Rightarrow \quad \cos(50,3t) = 2\pi$

$\Rightarrow \quad t = 0,1249$ s



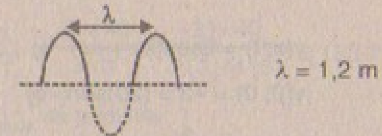
Luego: $T = 0,1249 - 0 = 0,125$ s

Parte (b) $T = t - 0 = 0,1249 - 0 = 0,1249 \approx 0,125$ s

20. Para cierta onda transversal, la distancia entre dos máximos sucesivos es de 1,2 m y ocho máximos pasan por un punto dado a lo largo de la dirección de propagación cada 12 s. Calcule la velocidad de onda.

20A. Para cierta onda transversal la distancia entre dos máximos sucesivos es λ y N máximos pasan por un punto dado a lo largo de la dirección de propagación cada t s. Calcule la velocidad de onda.

Resolución :



$\lambda = 1,2$ m

Además: En (3) máximos tenemos 7 λ

Entonces: $(7\lambda)(12\text{ s}) = v_{onda}$

$\therefore \quad v_{onda} = 7(1,2)(12) = 100,8$ m/s

21. Una onda senoidal viaja por una cuerda. El oscilador que genera a la onda completa 40,0 vibraciones en 30,0 s. Además, un máximo dado viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10,0 s. ¿Cuál es la longitud de onda?

Resolución :

Por dato: $f = \frac{40}{30}\,\frac{\text{vib.}}{\text{s}} \Rightarrow T = \frac{3}{4}\text{s}$

Por otro lado: $v_{onda} \times 10\text{ s} = 425\text{ cm} \equiv 4,25$ m

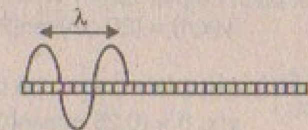
$\therefore \quad v_{onda} = 0,425$ m/s

Como: $\lambda = v_{onda} \times T \Rightarrow \lambda = (0,425)\left(\frac{3}{4}\right) = 0,319$ m

22. Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de 4,00 Hz, se produce una onda transversal de 60,0 cm de longitud de onda. Determine la velocidad de los pulsos de onda a lo largo del alambre.

Resolución :

Por dato: $\lambda = 0,6$ m
Además: $f = 4,00$ Hz



Pero: $v_{onda} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\,.\,f = (0,6)(4,00)$

$\therefore \quad v_{onda} = 2,4$ m/s

23. Una onda senoidal que viaja en la dirección –x(hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20,0 cm, una longitud de onda de 35,0 cm y una frecuencia de 12,0 Hz. El desplazamiento de la onda en t = 0, x = 0 es y = –3,00 cm y la onda tiene una velocidad positiva aquí. a) Dibuje la onda en t = 0. b) Encuentre el número de onda angular, el periodo, la frecuencia angular y la velocidad de fase de la onda. c) Escriba una expresión para la función de onda y(x; t).

Resolución :

Datos: $A = 0{,}2$ m ; $\lambda = 0{,}35$ m ; $f = 12{,}0$ Hz
En $t = 0$, $x = 0$ $y = -3$ cm $v = ?$

Parte (a) y (b)

Sabemos que: $y(x;t) = 2\text{sen}[kx + \omega t - \phi]$

Entonces: $y(0;0) = -3 = (20)\text{sen}[-\phi]$

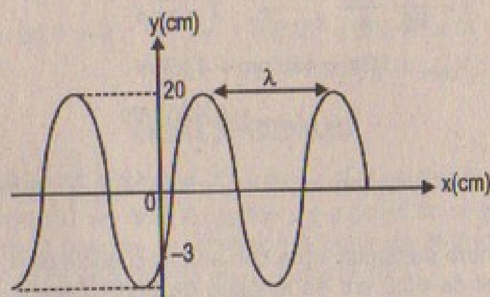
$$\therefore \quad \text{sen}(\phi) = \frac{3}{20} \Rightarrow \phi = \text{arc sen}\left(\frac{3}{20}\right) = 8{,}63° <> \pi/20$$

Por otro lado: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{35}$ y $\omega = 2\pi \times f = 24\pi$ rad/s

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{12}\text{ s}$$

Graficando:

Para $t = 0$ $\quad y(0;x) = 20\text{sen}\left[\frac{2\pi}{35}x - \frac{\pi}{20}\right] = 20\text{sen}(0{,}18x - 0{,}157)$



Parte (c)

La función de onda para cualquier instante de tiempo será:

$$y(x;t) = (20\text{ cm})\text{sen}[2{,}18x + 75{,}4t - 0{,}157]$$

24. Un tren de onda senoidal se describe por medio de

$$y(x;t) = (0{,}25\text{ m})\text{sen}(0{,}30x - 40t)$$

donde x e y se miden en metros y t en segundos. Determine para esta onda la a) amplitud, b) frecuencia angular, c) número de onda angular, d) longitud de onda, e) velocidad de onda, y f) dirección de movimiento.

Resolución :

$$y(x;t) = (0{,}25\text{ m})\text{sen}[0{,}30x - 40t]$$

Parte (a) Amplitud = (0,25 m)

Parte (b) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 40$ rad/s

Parte (c) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}30$ rad/m

Parte (d) Como: $\frac{2\pi}{\lambda} = (0{,}30) \Rightarrow \lambda = 21$ m

Parte (e) $v_{onda} = \frac{\lambda}{T} = \frac{21\times 40}{2\times\pi} = \frac{21\times 40}{2(3{,}1416)} = 133{,}7$ m/s

Parte (f) Como v_{onda} es positiva

$\Rightarrow$ La dirección del movimiento es en el eje «x» positivo

25. Dos ondas se describen mediante

$$y_1(x;t) = 5{,}0\text{sen}(2{,}0x - 10t)$$
$$y_2(x;t) = 10\cos(2{,}0x - 10t),$$

donde x está en metros y t en segundos. Demuestre que la onda resultante es senoidal y determine la amplitud y fase de esta onda senoidal.

Resolución :

Por demostrar que la onda resultante es senoidal.

Sea: $2x - 10t = \alpha$

Entonces: (+) $y_1(x;t) = 5\text{sen}\alpha$

$y_2(x;t) = 10\cos\alpha$

$y_1(x;t) + y_2(x;t) = y_R(x;t) = 5\text{sen}\alpha + 10\cos\alpha$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{y_R}{5}(x;t) = \text{sen}\alpha + 2\cos\alpha \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\text{sen}\alpha + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cos\alpha$$

(por artificio)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)y_R(x;t) = \cos\left(\alpha - \frac{53°}{2}\right) \text{ (por ángulo notable)}$$

$$\Rightarrow y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\cos[2{,}0x - 10t - \frac{53\pi}{360}] = 5\sqrt{5}\cos\left[\frac{53\pi}{360} - 2{,}0x + 10t\right]$$

y esto es equivalente a:

$$y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\cos\left[2{,}0x - 10t + \frac{127}{360} - \frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore \quad y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\,\text{sen}\left[2{,}0x - 10t + \frac{127}{360}\pi\right]$ (es función de onda senoidal)

Amplitud $= 5\sqrt{5}$ fase $= \frac{127}{360}\pi = 63{,}4°$ l.q.q.d.

26. Un murciélago puede detectar pequeños objetos, como un insecto cuyo tamaño es aproximadamente igual a una longitud de onda del sonido que el murciélago emite. Si estos animales emiten un chirrido a una frecuencia de 60,0 kHz y si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es el insecto más pequeño que un murciélago puede detectar?

Resolución :

λ = insecto más pequeño que un murciélago puede detectar.

Por otro lado: $v_{sonido} = \lambda f \Rightarrow \quad 340 = \lambda\,(60\text{ kHz})$

$\therefore \quad \lambda = 0{,}0057$ m

27. a) Escriba la expresión para y como una función de x y t de una onda senoidal que se propaga a lo largo de una cuerda en la dirección x negativa con las siguientes características: A = 8,00 cm, λ = 80,0 cm, f = 3,00 Hz y y(0; t) = 0 en t = 0. b) Escriba la expresión para y como una función de x para la onda en el inciso a) suponiendo que y(x; 0) = 0 en el punto x = 10,0 cm.

Resolución :

Parte (a)

Datos: A = 8,00 cm ; λ = 80,0 cm ; f = 3,00 Hz
y(0; t) = 0 ; t = 0

Entonces: $\omega = 2\pi \times f = 2(3{,}1416)(3) = 18{,}85$ rad/s

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2(3{,}1416)}{80} = 0{,}078 \text{ rad/cm}$$

Para $y(0;0) = 0 = \text{sen}(-\phi) \quad \therefore \quad \phi = 0$

En consecuencia: $y(x;t) = (8{,}00\text{ cm})\text{sen}[0{,}078x + 18{,}85t]$

Parte (b) $y(x;0) = (8{,}00\text{ cm})\text{sen}[0{,}7854]$
x = 10 cm
$\therefore \quad y(x;0) = 0{,}1$ cm

28. Una onda transversal en una cuerda se describe por medio de
$y = (0{,}12\text{ m})\text{sen}\pi(x/8 + 4t)$
a) Determine la velocidad y aceleración transversales de la cuerda en t = 0,20 s para el punto sobre la cuerda localizado en x = 1,6 m. b) ¿Cuáles son la longitud de onda, el periodo y la velocidad de propagación de esta onda?

Resolución :

$$y(x;t) = (0{,}12\text{ m})\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$$

Parte (a) $\frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = (4\pi)(0{,}12)\cos\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$

Entonces: para: t = 0,20 s y x = 1,6 m

$$V_{transv} = \frac{\partial y(0{,}2;1{,}6)}{\partial t} = (4)(3{,}1416)\cos\left[\frac{1{,}6\,\pi}{8} + 4\pi\,(0{,}2)\right](0{,}12)$$

$\therefore \quad V_{trans.} = +\,1{,}507$ m/s

Aceleración transversal de la cuerda $= -(4\pi)^2(0{,}12)\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$

Entonces: Para t = 0,2 s ; x = 1,6 m

$$A_{trans.} = -(4)^2(3{,}1416)^2(0{,}12)\text{sen}(\pi) = 0$$

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = 4\pi = \frac{2\pi}{T} \quad \therefore \quad T = 0{,}5$ s

Además: $\frac{\pi}{8} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda = 16$ m

En consecuencia: $v_{onda} = \frac{\lambda}{T} = \frac{(16)}{0{,}5} \quad \therefore \quad v_{onda} = 32$ m/s

29. Una onda senoidal transversal en una cuerda tiene un periodo T = 25,0 ms y viaja en la dirección x negativa con una velocidad de 30,0 m/s. En t = 0, una partícula sobre la cuerda en x = 0 tiene un desplazamiento de 2,00 cm y viaja hacia la izquierda con una velocidad de 2,0 m/s. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? c) ¿Cuál es la máxima velocidad transversal de la cuerda? d) Escriba la función de onda de la onda.

Resolución :

$T_{onda} = 25 \times 10^{-3}$ s ; $v_{onda} = 39{,}0$ m/s

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{30\times 25}{1000} = 75{,}0\text{ cm} = 0{,}75\text{ m}$$

Además: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{75{,}0} = \frac{8\pi}{3} \quad \wedge \quad \omega = \frac{2\pi}{25\times 10^{-3}} = 80\pi$ rad/s

Entonces: $y(x;t) = A\cos\left[\frac{8\pi}{3}x + 80\pi t - \phi\right]$

Pero: $y(0;\,0) = 0{,}02$ m

Además: $\dfrac{\partial y(x;t)}{\partial t} = -2$ m/s para $x = 0$, $t = 0$

Luego: $y(0;0) = 0{,}02 \text{ m} = A\cos(\phi)$

Y: $+2 = -80\pi \times A\text{sen}(-\phi)$ $(t = 0,\ x = 0)$

Luego: $\tan(\phi) = 2/(0{,}02)(40\pi)$ $\therefore$ $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{(0{,}02)(40\pi)}\right) = 0{,}379$ rad

En consecuencia: $\left|\dfrac{0{,}02}{\text{sen}(\phi)}\right| = A$ $\therefore$ $A = 2{,}15$ cm

Parte (b)

El ángulo de fase inicial es: $\phi = 0{,}379$ rad

Parte (c) $v_{trans\ máxima} = A.\omega = (2{,}15)\,(80\pi)$

$\therefore$ $v_{trans\ máxima} = 541$ cm/s

Parte (d)

La ecuación de onda será: $y(x;\,t) = (2{,}15\text{ cm})\cos\left[\dfrac{8\pi}{3}x + 80\pi t - 0{,}379\right]$

30. Una onda senoidal de longitud de onda igual a 2,0 m y 0,10 m de amplitud viaja con una velocidad de 1,0 m/s por una cuerda. Al principio, el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen y la onda se mueve de izquierda a derecha. Calcule a) la frecuencia y la frecuencia angular, b) el número de onda angular, y c) la función de onda correspondiente a esta onda. Determine la ecuación de movimiento para d) el extremo izquierdo de la cuerda, y e) el punto sobre la cuerda en x = 1,5 m hacia la derecha del extremo izquierdo. f) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier punto sobre la cuerda?

Resolución:

Datos: $\lambda = 2{,}0$ m
$A = 0{,}10$ m $v_{onda} = 1{,}0$ m/s

Parte (a)

Sabemos que: $v = \lambda f$ $\Rightarrow$ $f = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ Hz

$\omega = 2\pi f$ $\Rightarrow$ $\omega = \pi$ rad/s

Parte (b) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ rad/m

Parte (c) $y(x;\,t) = A\text{sen}\,[kx + \omega t - \phi]$ $\Rightarrow$ $y(x;\,t) = (0{,}10\text{ m})\text{sen}[\pi x + \pi t]$

Parte (d) $y(x;\,0) = (0{,}10)\text{sen}[\pi x]$

Parte (e) Para $x = 1{,}5$ m

$\Rightarrow$ $y(x;\,0) = (0{,}10)\text{sen}\left[\dfrac{3\pi}{2}\right] = -(0{,}10\text{ m})$

Parte (f) $v_{máxima} = A\omega = (0{,}1)(\pi) = 0{,}314$ m/s

31. Una onda se describe por medio de $y = (2{,}0\text{ cm})\text{sen}(kx - \omega t)$, donde $k = 2{,}11$ rad/m, $\omega = 3{,}62$ rad/s, x está en metros y t en segundos. Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de la onda.

Resolución:

Datos: $k = 2{,}11$ rad/m ; $\omega = 3{,}62$ rad/s
$y(x;\,t) = (2{,}0\text{ cm})\,\text{sen}[kx - \omega t]$

Amplitud = 2,0 cm ≡ 0,02 m

$2{,}11 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \dfrac{2\pi}{2{,}11} = 2{,}98$ m

$\omega = 2\pi f$ $\Rightarrow$ $3{,}62 = 2(3{,}1416)f$ $\therefore$ $f = 0{,}576$ Hz

$v_{onda} = \lambda f$ $\Rightarrow$ $v_{onda} = (2{,}98)(0{,}576) = 1{,}72$ m/s

32. Una onda senoidal en una cuerda se describe por medio de

$$y = (0{,}51\text{ cm})\text{sen}(kx - \omega t)$$

donde $k = 3{,}1$ rad/cm y $\omega = 9{,}3$ rad/s. ¿Qué distancia se mueve la cresta en 10 s? ¿Se mueve en la dirección x positiva o negativa?

Resolución:

$y(x;\,t) = (0{,}51\text{ cm})\text{sen}[kx - \omega t]$

$k = 3{,}1$ rad/cm $\omega = 9{,}3$ rad/s

Sabemos que: $9{,}3\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 2\pi \times f$ $\Rightarrow$ $f = 1{,}00$ Hz

Por otro lado: $v_{onda} = \lambda f$

Además: $k = 3{,}1 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \dfrac{2\pi}{3{,}1} = 2{,}03$ cm

$\therefore$ $v_{onda} = (2{,}03)(1) = 2{,}03$ cm/s

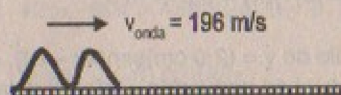
Entonces: $x = n\lambda = v_{onda} \times t = (2{,}03)(10)$

$\therefore$ $x_{distancia} = 20{,}3$ cm (se mueve en la dirección «x» positiva)

33. Una onda transversal que viaja por un alambre tenso tiene una amplitud de 0,200 mm y una frecuencia de 500 Hz y viaja con una velocidad de 196 m/s. a) Escriba una ecuación en unidades del SI de la forma y = Asen(kx – ωt) para esta onda. b) La masa por unidad de longitud de este alambre es 410 g/m. Calcule la tensión en el alambre.

Resolución:

$\longrightarrow v_{onda} = 196$ m/s f = 500 Hz



Amplitud = (0,2 mm)

Parte (a)

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\omega = 2\pi f = (2)(3{,}1416)(500) = 1\,000\,\pi$ rad/s

Además: 196 m/s $= \lambda f \Rightarrow \lambda = 0{,}392$ m

En consecuencia: $k = \dfrac{2\pi}{0{,}392} = 16{,}03$ rad/m

Luego la ecuación de la función de onda será:

$$y(x;\,t) = (2 \times 10^{-3}\text{ m})\text{sen}[16{,}03x - 1\,000\pi t]$$

Parte (b)

$\mu = 4{,}10$ g/m $= 4{,}10 \times 10^{-3}\ \dfrac{kg}{m}$

$\Rightarrow v_{onda} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow (196)^2 \times (4{,}10) \times 10^{-3} = T \quad \therefore\ T = 157{,}5$ N

34. Una onda en una cuerda se describe mediante la función de onda y = (0,10 m) sen(0,50x – 20t). a) Muestre que una partícula en la cuerda en x = 2,0 m ejecuta un movimiento armónico. b) Determine la frecuencia de oscilación de este punto particular.

Resolución:

$$y(x;\,t) = (0{,}1\text{ m})\text{sen}[0{,}5x - 20t]$$

Parte (a)

En x = 2,0 m $y(2;\,t) = (0{,}1)\text{sen}[1 - 20t]$; con ω = 20 rad/s

Entonces: $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -(0{,}1)(20)\cos[1 - 20t]$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(0{,}1)(20)^2\,\text{sen}[1 - 20t]$

Por otro lado: sabemos que la ecuación diferencial de un M.A.S. es: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega^2 y = 0$

Entonces: $-(0{,}1)(20)^2\text{sen}[1 - 20t] + (0{,}1)\omega^2\,\text{sen}[1 - 20t] = 0$ cumple

En consecuencia una partícula en la cuerda en x = 20 m realiza un M.A.S.

Parte (b): $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 20/2\pi = 3{,}2$ Hz

ENERGÍA TRANSMITIDA POR ONDAS SENOIDALES EN CUERDAS

35. Una cuerda tensada tiene una masa de 0,18 kg y una longitud de 3,6 m. ¿Qué potencia debe proporcionarse para generar ondas senoidales con una amplitud de 0,10 m y una longitud de onda de 0,50 m, y cuya velocidad sea de 30 m/s?

35A. Una cuerda tensada tiene una masa M y una longitud L. ¿Qué potencia debe proporcionarse para generar ondas senoidales con una amplitud A y una longitud de onda λ, y cuya velocidad sea v?

Resolución:

Datos: $M_{cuerda} = 0{,}18$ kg ; λ = 0,5 m
Longitud = 3,6 m ; $v_{onda} = 30$ m/s
Amplitud = (0,1 m)

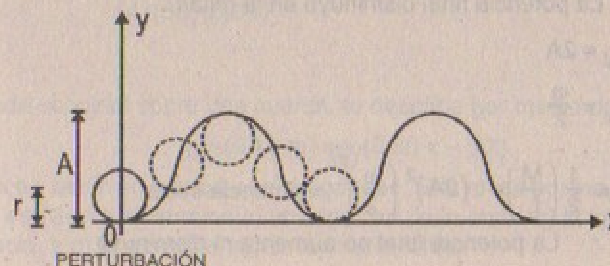
Sabemos que: $\left.\begin{array}{l}\omega = 2\pi\,.\,f \\ y \quad v_{onda} = \lambda\,.\,f\end{array}\right\} \div \ \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Luego: $\omega = \dfrac{v \times 2\pi}{\lambda} = \dfrac{(30)(2)(3{,}1416)}{0{,}5} = 120\pi$ rad/s

Por lo tanto: $\text{Potencia} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{cuerda}}{\text{Longitud}}\right)(30)\,(0{,}1)^2\,(120\,\pi)^2 = 1{,}07$ kW

36. Una onda bidimensional en el agua se distribuye en frentes de onda circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$ (Sugerencia: Considere la energía concentrada en el rizo que se mueve hacia afuera.)

Resolución:



Sabemos que: $y(x;t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$$v_{máx} = \frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = A.\omega\cos(\omega t + kx) = A.\omega$$

Entonces: Energía = $k.A^2.\omega^2$

Por otro lado:

En un mov. circular: $\frac{v^2}{r} = a_{cp}$ (en una onda)

Pero: $\frac{\partial^2 y(x;t)}{\partial t^2} = A.\omega^2 \Rightarrow v^2 = r.A.\omega^2$

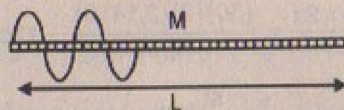
Luego: Energía (en una onda bidimensional) = k = constante

En consecuencia: $k.A^2.\omega^2 = k(1/r)A.\omega^2 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{\sqrt{r}}$ l.q.q.d.

37. Se generan ondas en una cuerda sometida a tensión constante. ¿En qué factor la potencia requerida aumenta o disminuye si: a) la longitud de la cuerda se duplica y la frecuencia angular permanece constante, b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, c) tanto la longitud de onda como la amplitud se duplican, y d) ambas variables se reducen a la mitad?

Resolución:

Sea:



$$\text{Potencial inicial} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v\omega^2A^2$$

Parte (a)

Si: $L_{final} = 2L$

$$\Rightarrow \text{Potencia} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v\omega^2A^2\right] = \frac{\text{Potencia Inicial}}{2}$$

$\therefore$ La potencia final disminuye en la mitad

Parte (b) $A_{final} = 2A$

$$\omega_{final} = \frac{\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v.(2A)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \text{potencia inicial}$$

$\therefore$ La potencia final no aumenta ni disminuye

Parte (c)

$\lambda_{final} = 2\lambda$; $A_{final} = 2A$

$\Rightarrow v_{onda} = 2v$

Luego: $$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)(2v)(2A)^2(\omega)^2 = 8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)vA^2\omega^2\right]$$

$\therefore$ La potencia aumenta en 8 veces la potencia inicial

Parte (d) $\lambda_{final} = \frac{\lambda}{2}$; amplitud final = $\frac{A}{2}$

$\Rightarrow v_{onda\ final} = \frac{v}{2}$

Luego: $$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)\left(\frac{v}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)^2(\omega)^2 = \frac{\text{Potencia inicial}}{8}$$

$\therefore$ La potencia final es $\frac{1}{8}$ de la potencia inicial

38. Se desea transmitir ondas de 5,00 cm de amplitud a lo largo de una cuerda que tiene una densidad lineal de $4,00 \times 10^{-2}$ kg/m. Si la máxima potencia entregada por la fuente es de 300 W y la cuerda está sometida a una tensión de 100 N, ¿cuál es la frecuencia de vibración más alta a la cual puede operar la fuente?

Resolución:

Datos: A = 0,05 m ; $\mu = 4,00 \times 10^{-2}$ kg/m

Potencia = 300 W ; T = 100 N

$$v_{onda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{100}{4\times10^{-2}}} = 50 \text{ m/s}$$

Entonces: $$300 \text{ W} = \frac{1}{2}(4\times10^{-2})(50)(0,05)^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{(300)(2)\times10^2}{(4)(50)(0,05)^2} = \omega^2 \quad \therefore \omega = 346,4 \text{ rad/s}$$

39. Una onda senoidal sobre una cuerda se describe por medio de la ecuación

$$y = (0,15 \text{ m})\,\text{sen}(0,80\,x - 50t)$$

donde x e y están en metros y t en segundos. Si la masa por longitud unitaria de esta cuerda es 12 g/m, determine a) la velocidad de la onda, b) la longitud de onda, c) la frecuencia, y d) la potencia transmitida a la onda.

Resolución:

Datos: $\mu = 12 \times 10^{-3}\ \dfrac{kg}{m}$

$y(x;t) = (0{,}15)\text{sen}[0{,}80x - 50t]$

Parte (a)

Sabemos que: $\omega = 2\pi \times f = 50 \quad \therefore \quad f = 7{,}96\ Hz$

Además: $0{,}80 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 7{,}854\ m$

En consecuencia: $v_{onda} = \lambda f = (7{,}854)(7{,}96) = 62{,}52\ m/s$

Parte (b)

La longitud de onda es: $\lambda = 7{,}854\ m$

Parte (c)

$$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2 = \frac{1}{2}(12 \times 10^{-3})(62{,}52)(0{,}15)^2(50)^2$$

$\therefore$ Potencia = 21,10 W

40. Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima de P (sin romperse) si viaja por ella una onda con amplitud A y frecuencia angular ω. Con el fin de aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y utiliza esta «cuerda doble» como un transmisor. Determine la potencia máxima que puede transmitirse a lo largo de la «cuerda doble».

Resolución:

Inicialmente: M L

Finalmente: M (L/2)

Inicialmente: $\mu = M/L\ ;\quad v = \sqrt{\dfrac{TL}{M}}$

Finalmente: $\mu = \dfrac{2M}{L}\ ;\quad v = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{TL}{M}}$

En consecuencia: Potencia máxima $= \dfrac{1}{2}(2)\left(\dfrac{M}{L}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) v A^2\omega^2$

$\therefore$ Potencia máxima $= \sqrt{2}\,P$

LA ECUACIÓN DE ONDA LINEAL

41. Demuestre que la función de onda $y = \ln[b(x - vt)]$ es una solución a la ecuación 16.26, donde b es una constante.

Resolución:

Por demostrar que: $y = \ln[b(x - vt)]$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando primero con respecto a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{bx - bvt} = \frac{1}{x - vt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x - vt)^2}$$

Luego derivando con respecto a «t»:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{v}{b(x - vt)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{v^2}{b}\left(\frac{1}{x - vt}\right)^2$$

Reemplazando en (α): $-\dfrac{1}{(x - vt)^2} = -\dfrac{v^2}{b}\cdot\dfrac{1}{(x - vt)^2}$

En consecuencia: $y = \ln[b(x - vt)]$ es solución de (α) l.q.q.d.

42. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda (ecuación 16.26), donde b es una constante.

Resolución:

Por demostrar que: $y = e^{b(x-vt)}$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando primeramente con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b e^{bx - bvt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2 e^{b(x-vt)}$$

Luego derivando con respecto a t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -bv e^{bx - bvt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2 v^2 e^{b(x-vt)}$$

Reemplazando en (α):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{l.q.q.d.}$$

43. a) Demuestre que la función $y(x, t) = x^2 + v^2t^2$ es una solución a la ecuación de onda. b) Muestre que la función anterior puede escribirse como $f(x + vt) + g(x - vt)$ y determine las formas funcionales de f y g. c) Repita los incisos a) y b) para la función $y(x; t) = \text{sen}(x)\cos(vt)$.

Resolución :

Por demostrar que: $y(x; t) = x^2 + v^2t^2$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando primero con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2$$

Luego derivando con respecto a t

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2v^2t \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2v^2$$

Reemplazando en (α): $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ l.q.q.d.

Parte (b)

Sabemos que: $y(x; t) = x^2 + v^2.t^2$

Pero: $y(x; t) = (x + vt)^2 - 2xvt$ (+)

ó: $y(x; t) = (x - vt)^2 + 2xvt$

$$y(x; t) + y(x; t) = (x + vt)^2 + (x - vt)^2 \quad \ldots (\alpha)$$

Por hipótesis: $y(x; t) = f(x + vt) + g(x - vt)$

$\Rightarrow$ Por (α): $f(x + vt) = \dfrac{1}{2}(x + vt)^2 \wedge g(x - vt) = \dfrac{1}{2}(x - vt)^2$

En consecuencia: $y(x; t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ l.q.q.d.

PROBLEMAS ADICIONALES

44. Una onda viajera se propaga de acuerdo con la expresión $y = (4{,}0\text{ cm})\text{sen}(2{,}0x - 3{,}0t)$, donde x se mide en centímetros y t en segundos. Determine: a) la amplitud, b) la longitud de onda, c) la frecuencia, d) el periodo, y e) la dirección de propagación de la onda.

Resolución :

$$y(x; t) = (4{,}0\text{ cm})\text{sen}(2{,}0x - 3{,}0t)$$

Parte (a) Amplitud = 4,0 cm

Parte (b) $k = 2{,}0 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{2{,}0} = 3{,}1416\text{ cm}$

Parte (c) $3{,}0 = 2\pi \times f \Rightarrow f = \dfrac{3{,}0}{2(3{,}1416)} = 0{,}48\text{ Hz}$

Parte (d) $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{0{,}48} = 20{,}9\text{ s}$

Parte (e) Como: $2{,}0x - 3{,}0t = \text{cte}$

$$\Rightarrow 2{,}0\frac{dx}{dt} = 3{,}0 \quad \therefore \quad v_{onda} = 1{,}5\text{ cm/s (positiva)}$$

Luego: La dirección de propagación de la onda es en la dirección «x» positiva.

45. La función de onda para una onda polarizada lineal en una cuerda tensada es (en unidades del SI)

$$y(x; t) = (0{,}35\text{ m})\text{sen}(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

a) ¿Cuáles son la velocidad y dirección de propagación de la onda? b) ¿Cuál es el desplazamiento vertical de la cuerda en t = 0, x = 0,10 m? c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la onda? d) ¿Cuál es la magnitud máxima de la velocidad transversal de la cuerda?

Resolución :

$$y(x; t) = (0{,}35\text{ m})\text{ sen}[10\pi t - 3\pi x + \pi/4]$$

Parte (a) $10\pi t - 3\pi x + \dfrac{\pi}{4} = \text{cte}$

$$\Rightarrow -3\pi dx + 10\pi dt = 0 \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = \frac{10}{3}\text{ m/s}$$

Como v_{onda} es positiva entonces la dirección de propagación de la onda es en la dirección «x» positiva.

Parte (b) $y(0{,}1\text{ m}; 0) = (0{,}35)\text{sen}[-3\pi(0{,}1) + \dfrac{\pi}{4}]$

$$\therefore \quad y(0{,}1\text{ m}; 0) = -0{,}055\text{ m} \equiv -5{,}48\text{ cm}$$

Parte (c) Como: $v_{onda} = \dfrac{10}{3} = \lambda f$

Además: $10\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 5\text{ Hz}$

Luego: $\dfrac{10}{3} = \lambda(5) \quad \therefore \lambda = \dfrac{2}{3}\text{m}$

Parte (d) $v_{trans.máxima} = A\omega = (0{,}35)(10)(3{,}1416) = 11\text{ m/s}$

46. Un bloque de masa $M = 2{,}0$ kg, soportado por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 45°$ con la horizontal (Fig. P16.46). La longitud de la cuerda es $L = 0{,}5$ m y su masa es $m = 2{,}0$ g, por lo que ésta es mucho menor que M. Determine el tiempo que tarda una onda transversal en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

46A. Un bloque de masa M, soportado por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig. P16.46). La longitud de la cuerda es L y su masa es $m << M$. Determine el tiempo que tarda una onda transversal en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

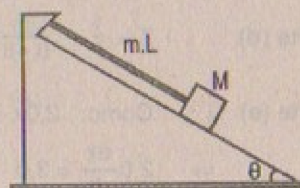


Figura P16.46

Resolución :

$M = 2{,}0$ kg
$L = 0{,}5$ m
$\theta = 45°$
$m = 2{,}0$ g

D.C.L. (bloque)

T, M, Mg, Mgsen45°, x, y

$\Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow \ T = Mg\,sen45° = (2)(9{,}8)\frac{\sqrt{2}}{2} = 9{,}8\sqrt{2}\ \text{N}$$

Entonces:

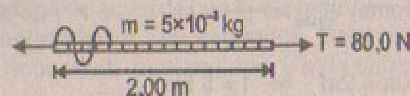
$$v_{onda}\ (\text{en una cuerda}) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{(9{,}8)\sqrt{2}\times 10^3}{(2)}\times(0{,}5)} = 58{,}86\ \text{m/s}$$

En consecuencia: $\quad V \times t = L$

$$\Rightarrow \quad (58{,}86)\times t_{total} = (0{,}5) \qquad \therefore \quad t_{total} = 8{,}5\ \text{ms}$$

47. a) Determine la velocidad de las ondas transversales en una cuerda sometida a una tensión de 80,0 N si la cuerda tiene una longitud de 2,00 m y una masa de 5,00 g. b) Calcule la potencia requerida para generar estas ondas si tales tienen una longitud de onda de 16,0 cm y una amplitud de 4,00 cm.

Resolución :



Parte (a) $\quad v_{onda\ en\ una\ cuerda} = \sqrt{\dfrac{T}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\dfrac{(80)(2)\times 10^3}{5}} = 178{,}9$ m/s

Parte (b) $\quad \lambda = 0{,}16$ m ; $\quad A = 0{,}04$ m

Entonces: $\quad 178{,}9 = (0{,}16)f \quad \Rightarrow \quad f = 1\,118$ Hz

Luego: $\quad \omega = 2\pi f = 2(3{,}1416)(1\,118) = 7\,025$ rad/s

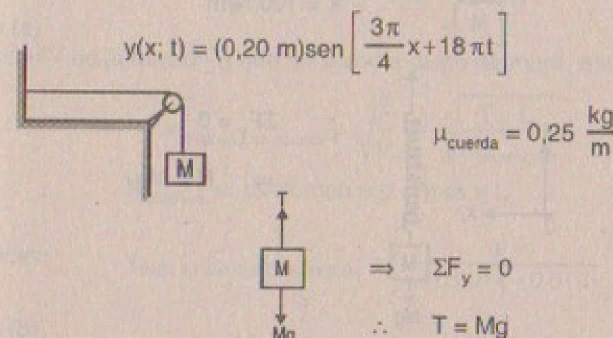
En consecuencia:

$$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\times10^{-3}}{2}\right)(178{,}9)(0{,}04)^2(7\,025)^2 = 17{,}7\ \text{kW}$$

48. Una onda senoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda $y = (0{,}20\ \text{m})\ sen[\pi(0{,}75x + 18t)]$, donde x e y están en metros y t en segundos. La cuerda tiene una densidad de masa lineal de 0,25 kg/m. Si la tensión en la cuerda la brinda un arreglo similar al que se ilustra en la figura 16.11, ¿cuál es el valor de la masa suspendida?

Resolución :

$$y(x;t) = (0{,}20\ \text{m})sen\left[\frac{3\pi}{4}x + 18\,\pi t\right]$$



$\mu_{cuerda} = 0{,}25\ \dfrac{kg}{m}$

$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0$

$\therefore \quad T = Mg$

Por otro lado: $\quad \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad \therefore \quad \lambda = \dfrac{8}{3}$ m

Además: $\quad 18\pi = 2\pi \times f \qquad \therefore \quad f = 9$ Hz

Entonces: $\quad v_{onda} = \lambda \,.\, f = \left(\dfrac{8}{3}\right)(9) = 24$ m/s

Luego: $\quad v_{onda} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{Mg}{0{,}25}}$

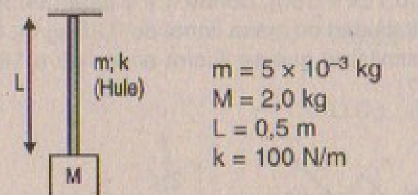
$$\Rightarrow \quad \frac{(24)^2\times(0{,}25)}{9{,}8} = M \qquad \therefore \quad M = 14{,}7\ \text{kg}$$

49. Un bloque de 2,0 kg cuelga de una cuerda de hule y se sostiene de modo que la cuerda no se estire. La longitud sin estirar de la cuerda es de 0,5 m y su masa es igual a 5,0 g. La «constante de cuerda» es de 100,0 N/m. El bloque se suelta y se

detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición «alargada»? c) Encuentre la velocidad de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

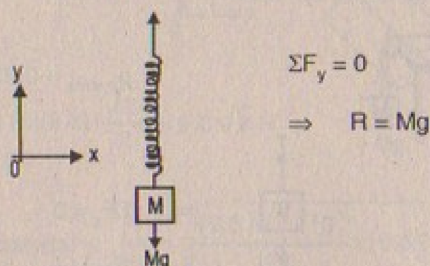
49A. Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de hule y se sostiene de modo que la cuerda se estire. La longitud sin estirar de la cuerda es L_0 y su masa es m. La «constante de cuerda» es de k. El bloque se suelta y se detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición «alargada»? c) Encuentre la velocidad de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

Resolución:



$m = 5 \times 10^{-3}$ kg
$M = 2{,}0$ kg
$L = 0{,}5$ m
$k = 100$ N/m

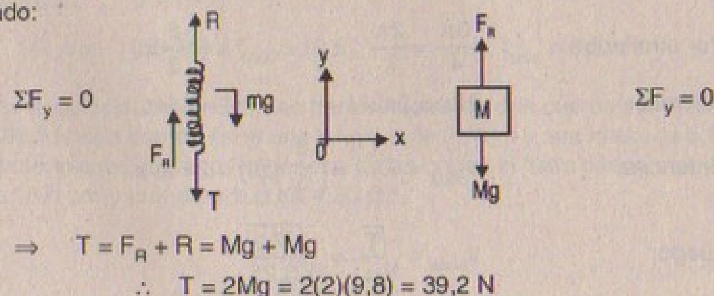
Parte (a)
D.C.L.



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad R = Mg$

Por otro lado:



$\Sigma F_y = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad T = F_R + R = Mg + Mg$

$\therefore \quad T = 2Mg = 2(2)(9{,}8) = 39{,}2$ N

Parte (b)

Sabemos que: $2F_R = k.\Delta L = 2Mg \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \dfrac{2Mg}{k}$

$\therefore \quad L_{final} = L + \dfrac{2Mg}{k} = 0{,}5 + \dfrac{2(2)(9{,}8)}{100} = 0{,}892$ m

Parte (c) $\qquad v_{onda\ trans.} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \left[\dfrac{2\ Mg}{m}(L + 2Mg/k)\right]^{1/2}$

Reemplazando: $v_{onda} = \left(\dfrac{2(2)(9{,}8)}{5 \times 10^{-3}}\left[0{,}5 + 2(2)(9{,}8)/100\right]\right)^{1/2} = 83{,}6$ m/s

50. Un alambre de densidad ρ se envuelve en una cinta de manera que su área de sección transversal varíe con x, de acuerdo con

$$A = (1{,}0 \times 10^{-3}x + 0{,}010)\text{cm}^2$$

a) Si el alambre se somete a una tensión F, obtenga una relación para la velocidad de onda como una función de la posición. b) Si el alambre es aluminio y se somete a una tensión de 24 N, determine la velocidad en el origen y en x = 10 m.

Resolución:

Alambre de densidad = ρ

$$A = (1{,}0 \times 10^{-3}x + 0{,}010)\ \text{cm}^2$$

Parte (a)

Como: «F» es la tensión a que se somete dicho alambre, entonces:

$$v_{onda\ en\ una\ cuerda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F\ .\ L}{M_{alambre}}}$$

Pero: $\quad M_{alambre} = \rho\text{Volumen} = \rho\ .\ \text{Área} \times L$

Entonces: $\quad v_{onda\ en\ una\ cuerda\ (alambre)} = \left[\dfrac{F}{\rho\ (0{,}001x + 0{,}010)}\right]^{1/2}$

Parte (b)

Si F = 24 N $\qquad \rho_{aluminio} = 2{,}70 \times 10^3$ kg/m³ $\quad$ y $\quad x = 10$ m

Entonces: $v_{onda\ en\ el\ alambre\ de\ Al} = \left[\dfrac{24 \times 10^4}{(2{,}70 \times 10^3)\left[10^{-3}(10) + 10^{-2}\right]}\right]$

$\therefore \quad v_{onda\ en\ el\ alambre\ de\ Al} = 66{,}7$ m/s

51. Determine la velocidad y dirección de propagación de cada una de las siguientes ondas senoidales, suponiendo que x se miden en metros y t en segundos.

a) $y = 0{,}60\cos(3{,}0x - 15t + 2)$ $\qquad$ b) $y = 0{,}40\cos(3{,}0x + 15t - 2)$
c) $y = 1{,}2\text{sen}(15t + 2{,}0x)$ $\qquad$ d) $y = 0{,}20\text{sen}(12t - x/2 + \pi)$

Resolución:

Parte (a)

Sea: $\qquad y(x;\ t) = (0{,}60\ \text{m})\cos[3{,}0x - 15t + 2]$

$3{,}0x - 15t + 2 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad 3{,}0dx - 15dt = 0$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = 5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es positiva, entonces la dirección de la onda es en el eje «x» positiva

Parte (b)

Sea: $y(x; t) = (0{,}40)\cos[3{,}0x + 15t - 2]$

$3{,}0x + 15t - 2 = cte$

$$\Rightarrow \quad 3{,}0dx + 15dt = 0 \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = -5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces la dirección y propagación de la onda es en el eje «x» negativa.

Parte (c)

Sea: $y(x; t) = (1{,}2)\text{sen}[2{,}0x + 15t]$

$2{,}0x + 15t = cte \Rightarrow 2{,}0dx + 15dt = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = -7{,}5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces la dirección y propagación de la onda es el eje «x» negativa.

Parte (d)

Sea: $y(x; t) = (0{,}20)\text{sen}\left[12t - \frac{x}{2} + \pi\right]$

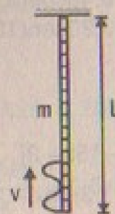
$$12t - \frac{1}{2}x + \pi = cte \quad \Rightarrow \quad 12dt - 0{,}5dx = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = 24 \text{ m/s}$$

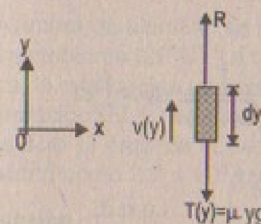
Como: v_{onda} es positiva, entonces la dirección y propagación de la onda es en el eje «x» positiva.

52. Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Demuestre que un pulso de onda transversal recorrerá la longitud de la cuerda en un tiempo $t = 2\sqrt{L/g}$. (Sugerencia: Encuentre primero una expresión para la velocidad de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior considerando la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de ese punto.)

Resolución:



Sea: μ: densidad lineal



$$\Rightarrow \quad v_{(y)} = \sqrt{\frac{\mu yg}{\mu}} = \sqrt{yg}$$

Sabemos que: $\frac{dy}{dt} = \sqrt{yg} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int_0^t dt$

$$\therefore \quad t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

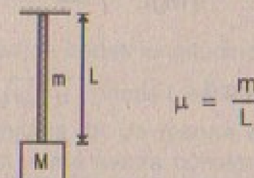
53. Si la masa M se suspende de la parte inferior de la cuerda del problema 52, a) Demuestre que el tiempo necesario para que la onda transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m} - \sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right)$$

b) Demuestre que esto se reduce al resultado del problema 52 cuando M = 0.

c) Demuestre que para m << M, la expresión en el inciso a) se reduce a $t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$

Resolución:

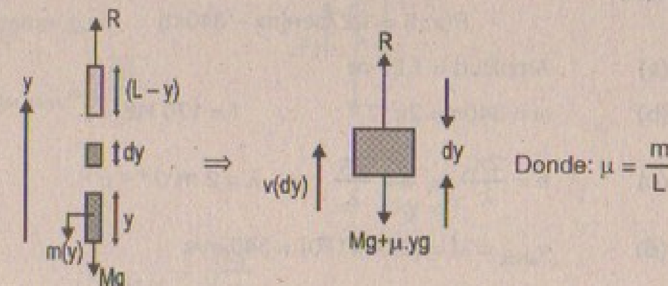


$$\mu = \frac{m}{L}$$

Parte (a)

Por demostrar que: $t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m} - \sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right)$

Sea:



Donde: $\mu = \frac{m}{L}$

Entonces: dy = v(dy).dt

$$\Rightarrow \quad dy = \sqrt{\frac{(M+\mu y)g}{\mu}} \cdot dt \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{g}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{M+\mu y}} dy = \int_0^t dt$$

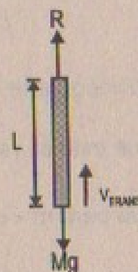
En consecuencia: $t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \left(\frac{\sqrt{M+m} - \sqrt{M}}{\sqrt{m}} \right)$ l.q.q.d.

Parte (b) Si $M = 0 \Rightarrow t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$ l.q.q.d.

Parte (c)
Por demostrar que para: m << M

$$t_{total} = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

Como: m << M
Entonces:



Por cinemática:

$v_{onda\ trans} \cdot t_{total} = L$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{MgL}{m}} \times t_{total} = L \Rightarrow \sqrt{\frac{mL^2}{MgL}} = t_{total}$$

$$\therefore \quad t_{total} = \sqrt{\frac{mL}{Mg}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

54. Cuando una onda sonora viaja por el aire produce variaciones de presión (arriba y abajo de la presión atmosférica) dadas por P = 1,27sen π(x – 340t) en unidades del SI. Calcule a) la amplitud de las variaciones de presión, b) la frecuencia, c) la longitud de onda en el aire, y d) la velocidad de la onda sonora.

Resolución :

$$P(x; t) = 1{,}27\text{sen}[\pi x - 340\pi t]$$

Parte (a) Amplitud = 1,27 m

Parte (b) $\omega = 340\pi = 2\pi f \quad \therefore \quad f = 170$ Hz

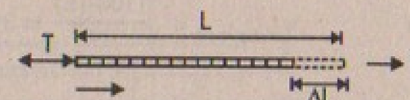
Parte (c) $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \lambda = 2$ m

Parte (d) $v_{onda} = \lambda f = (2{,}00)(170) = 340$ m/s

55. Un alambre de aluminio se sujeta en cada extremo bajo una tensión cero a temperatura ambiente (22°C). La tensión en el alambre se incrementa al reducir la temperatura, lo cual origina una disminución en la longitud de equilibrio del alambre. ¿Qué deformación (ΔL/L) se produce en una velocidad de onda transversal de 100 m/s? Considere el área de la sección transversal del alambre igual a 5,0 × 10⁻⁶ m², la densidad como 2,7 × 10³ kg/m³ y el módulo Young de 7,0 × 10¹⁰ N/m².

Resolución :

$v_{onda} = 100$ m/s
Área = $5{,}0 \times 10^{-6}$ m²
$\rho_{Al} = 2{,}7 \times 10^3$ kg/m³
Young = $7{,}0 \times 10^{10}$ N/m²



Sabemos que: $v_{onda\ trans} = \sqrt{\frac{T \times L}{M_{Al}}}$

Pero: $M_{alum} = \rho \cdot Vol = \rho AL$

$$\Rightarrow \quad v_{onda\ trans} = \sqrt{\frac{TL}{\rho AL}} = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$$

$$\Rightarrow \quad (100)^2(2{,}7 \times 10^3)(5{,}0 \times 10^{-6}) = T \quad \therefore \quad T = 135\ \text{N}$$

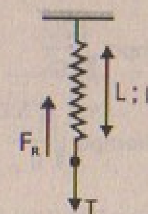
Luego: $\frac{T}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{(135)}{(5{,}0)(10^{-6})(7\times10^{10})} = 3{,}86 \times 10^{-4}$

56. a) Demuestre que la velocidad de ondas longitudinales a lo largo de un resorte de constante de fuerza k es $v = \sqrt{kL/\mu}$, donde L es la longitud sin alargar del resorte y μ es la masa por longitud unitaria. b) Un resorte de 0,40 kg de masa tiene una longitud sin alargar de 2,0 m y una fuerza constante de 100 N/m. Utilizando los resultados del inciso a), determine la velocidad de ondas longitudinales a lo largo de este resorte.

Resolución :

Parte (a)
Por demostrar que:

$$v_{ondas\ trans} = \sqrt{\frac{kL}{\mu}}$$



$F_R = k(y) \quad \Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0$
$\Rightarrow \quad ky = T$

Luego: $v_{ondas\ (y)} = \sqrt{\frac{ky}{\mu}}$

En particular $y = L \Rightarrow \quad v_{\text{ondas trans}} = \sqrt{\dfrac{kL}{\mu}}$ l.q.q.d.

Parte (b)

$\mu = \dfrac{0,4}{2,0} \quad \Rightarrow \quad \mu = 0,2 \qquad k = 100$ N/m

Luego: $v_{\text{ondas trans}} = \sqrt{\dfrac{(100)(2)}{0,2}} = 31,6$ m/s

57. En el problema 52 se estableció que un pulso de onda viaja desde la parte inferior hasta la superior de una cuerda de longitud L en un tiempo $t = 2\sqrt{L/g}$. Use este resultado para responder las siguientes preguntas. (No es necesario efectuar ninguna nueva integración.) a) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso onda en recorrer la mitad de la cuerda? (Dé su respuesta como una fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$) b) Un pulso empieza a viajar por la cuerda. ¿Qué distancia ha recorrido después de un tiempo $\sqrt{L/g}$?

Resolución:
Parte (a)

Sabemos que: $t_{\text{total}} = 2\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ para una cuerda de longitud «L»

Si ahora la cuerda tiene una longitud de: "$\dfrac{L}{2}$" entonces:

$$t_{\text{total}} = 2\sqrt{\frac{L}{2g}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \left(\frac{2L}{g}\right)^{1/2}$$

Parte (b)

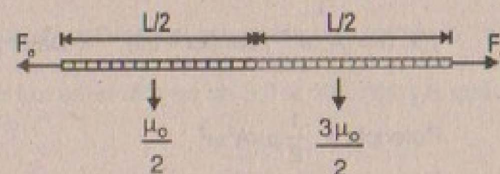
Si: $\dfrac{L}{2}$ lo recorre en un tiempo $\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$

«x» lo recorrerá en un tiempo $\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$\therefore \quad x = \frac{L}{4}$$

58. Una cuerda de longitud L consta de dos secciones. La mitad izquierda tiene una masa por longitud unitaria $\mu = \mu_0/2$, en tanto que la derecha tiene una masa por unidad de longitud $\mu' = 3\mu = 3\mu_0/2$. La tensión en la cuerda es F_0. Advierta, según los datos proporcionados que esta cuerda tiene la misma masa total que una cuerda uniforme de longitud L y masa por longitud unitaria μ_0. a) Encuentre las velocidades v y v' a la cual los pulsos de la onda transversal viajan en las dos secciones. Exprese las velocidades en términos de F_0 y μ_0, y también como múltiplos de la velocidad $v_0 = \sqrt{F_0/\mu_0}$. b) Encuentre el tiempo necesario para que un pulso viaje de un extremo al otro de la cuerda. Brinde su resultado como un múltiplo de $T_0 = L/v_0$.

Resolución:



Parte (a)

$$v_{\text{pulso en la cuerda (parte izquierda)}} = \sqrt{\frac{F_0}{\frac{\mu_0}{2}}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{F_0}{\mu_0}}$$

$$v_{\text{pulso en la cuerda (parte derecha)}} = \sqrt{\frac{F_0}{\frac{3\mu_0}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{\frac{F_0}{\mu_0}}$$

Parte (b)
Por cinemática:

$$t_{\text{total (parte izquierda)}} = \frac{\frac{L}{2}}{v_{\text{pulso}}} = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{F_0}{\mu_0}}} = \frac{L\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{\mu_0}{F_0}}$$

$$t_{\text{total (parte derecha)}} = \frac{\frac{L}{2}}{v_{\text{pulso}}} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{\frac{F_0}{\mu_0}}} = \frac{L\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_0}{F_0}}$$

En consecuencia:
El tiempo total necesario para que un pulso viaje de extremo a extremo será:

$$t_{\text{total (parte izquierda)}} + t_{\text{total (derecha)}} = t_{\text{total necesario}}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\text{total}} = \frac{L\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{\mu_0}{F_0}} + \frac{L\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_0}{F_0}} = \frac{L\sqrt{2}}{4}\left[1 + 2\sqrt{3}\right] v_0$$

59. Un pulso de onda que viaja a lo largo de una cuerda de densidad de masa lineal μ se describe por medio de la relación

$$y = [A_0 e^{-bx}]\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

donde se afirma que los factores entre corchetes antes del seno corresponden a la amplitud. a) ¿Cuál es la potencia P(x) que transporta esta onda en el punto x? b) ¿Cuál es la potencia que transporta esta onda en el origen? c) Calcule la razón P(x)/P(0).

Resolución :

Sea: $y(x; t) = [A_0 . e^{-bx}]\ \text{sen}(kx - \omega t)$ Dato: μ: densidad lineal

Parte (a)

Sabemos que $\text{Potencia} = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2$

$\Rightarrow \text{Potencia}(x) = \frac{1}{2}\mu . (A_0 . e^{-bx})^2 \omega^2 v$

Pero: $v = \frac{\omega}{k}$

$\therefore \text{Potencia}(x) = \frac{1}{2}\mu . A_0^2 \frac{\omega^3}{k} e^{-2bx}$

Parte (b) $P(0) = \left(\frac{1}{2k}\right)\mu\omega^3 A_0^2$

Parte (c) Nos piden: $\frac{P(x)}{P(0)}$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{P(0)} = \frac{\frac{1}{2}\mu A_0^2 \frac{\omega^3}{k} e^{-2bx}}{\frac{1}{2}\mu \frac{\omega^3}{k} A_0^2} \qquad \therefore \frac{P(x)}{P(0)} = e^{-2bx}$$

Capítulo 17

ONDAS SONORAS

VELOCIDAD DE ONDAS SONORAS

1. Suponga que usted escucha el trueno de una tormenta 16,2 s después de ver el rayo asociado. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 343 m/s y la velocidad de la luz en el aire es de $3{,}0 \times 10^8$ m/s. ¿A qué distancia se encuentra usted del rayo?

Resolución :

Supongamos que en un tiempo «t», el rayo se encuentra con respecto del observador a una distancia «d».

Entonces en un tiempo «t + 16,2 s» las ondas de sonido han recorrido dicha distancia; luego:

Por cinemática: $v_{luz} \times t = d$ ... (1) Donde: $v_{luz} = 3 \times 10^8$ m/s

$v_{sonido} \times (t + 16{,}2) = d$ ... (2) Donde: $v_{sonido} = 343$ m/s

Igualando: $v_{luz} \times t = v_{sonido}(t + 16{,}2)$

$\Rightarrow (3 \times 10^8 - 343)\,t = 343(16{,}2) \qquad \therefore \quad t = \frac{343\,(16{,}2)}{\underbrace{3\times10^8 - 343}_{\approx 3\times10^8}}$

En consecuencia:

$d = \text{distancia del observador al rayo} = 3 \times 10^8 . \frac{(343)(16{,}2)}{3\times10^8} = 5{,}56 \text{ km}$

2. Se deja caer una piedra en un profundo cañón y se escucha que golpea el fondo 10,2 s después. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 343 m/s. ¿Cuál es la profundidad del cañón? ¿Cuál sería el porcentaje de error en la profundidad si no se toma en cuenta el tiempo que tarda el sonido en llegar a la orilla del cañón?

2A. Se deja caer una piedra en un profundo cañón y se escucha que golpea el fondo t segundos después. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es v. ¿Cuál es la profundidad del cañón? ¿Cuál sería el porcentaje de error en la profundidad si no se toma en cuenta el tiempo que tarda el sonido en llegar a la orilla del cañón?

Resolución :

En un tiempo «t» la piedra recorrerá la profundidad «H» del cañón, entonces:
En un tiempo «t + 10,2» las ondas del sonido recorrerán dicha profundidad.
Luego:

Por caída libre: $H = \frac{1}{2}(g)t^2$ Donde: $g = 9{,}8$ m/s^2

Por cinemática: $v_{sonido}(t + 10,2) = H$ donde $v_{sonido} = 343$ m/s

Entonces: $4,9\,t^2 - 343\,t - 3\,498,6 = 0$

Resolviendo la ecuación resulta que: $t = 79,03$ s

En consecuencia: $H = \frac{1}{2}(9,8)(79,03)^2 \quad \therefore \quad H = 30\,605,7$ m

3. Calcule la velocidad del sonido en el elemento mercurio, el cual tiene un módulo volumétrico de aproximadamene $2,8 \times 10^{10}$ N/m² y una densidad de 13 600 kg/m³.

Resolución:

Datos: $B_{Hg} = 2,8 \times 10^{10}$ N/m² ; $\rho_{Hg} = 18\,600$ kg/m³

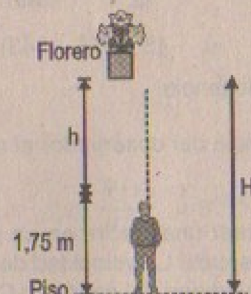
$v_{Hg} = ?$

Sabemos que: $v_{ondas\ sonoras} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \Rightarrow v_{ondas\ sonoras} = \sqrt{\frac{2,8 \times 10^{10}}{13\,600}}$

$\therefore \quad v_{ondas\ sonoras} = 1\,435$ m/s

4. Un florero cae por un balcón que está a 20,0 m de altura de la acera y se aproxima a la cabeza de un hombre de 1,75 m de altura que se encuentra parado abajo. ¿A qué altura sobre el suelo debe estar el florero después de la cual sería demasiado tarde para que el hombre escuche a tiempo un grito de aviso? Suponga que el hombre necesita 0,300 s para reaccionar al aviso.

Resolución:



Para que el hombre pueda reaccionar al aviso necesita como mínimo un tiempo de: 0,300 s, entonces:

Por caída libre:

$h = \frac{1}{2}(9,8)t^2 = \frac{1}{2}(9,8)(0,300)^2$

$\therefore \quad h = 0,44$ m

En consecuencia:

El florero debe estar a una altura $H = h + 1,75$ m

$\therefore \quad H = 1,75 + 0,44 = 2,19$ m

5. La velocidad del sonido en el aire es $v = \sqrt{\gamma P/\rho}$, donde γ es una constante igual a 7/5, P es la presión del aire y ρ es la densidad del aire. Calcule la velocidad del sonido para $P = 1$ atm $= 1,013 \times 10^5$ Pa y $\rho = 1,29$ kg/m³.

Resolución:

Por dato: $v_{sonido\ en\ el\ aire} = \sqrt{\frac{\gamma . P}{\rho}}$

$\gamma = \frac{7}{5}$, ρ = densidad del aire , P = presión del aire

Para: $P = 1$ atm $= 1,013 \times 10^5$ Pa $\quad \rho_{aire} = 1,29$ kg/m³

Entonces: $v_{sonido\ en\ el\ aire} = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{(1,013 \times 10^5)}{1,29}}$

$\therefore \quad v_{sonido\ en\ el\ aire} = 332$ m/s

ONDAS SONORAS PERIÓDICAS

Nota: En esta sección utilice los siguientes valores según sea necesario, a menos que se especifiquen de otra manera: la densidad de equilibrio del aire, $\rho = 1,29$ kg/m³; la velocidad del sonido en el aire, $v = 343$ m/s. Además, las variaciones de presión ΔP se miden en relación con la presión atmosférica.

6. La densidad del aluminio es $2,7 \times 10^3$ kg/m³. Utilice el valor para la velocidad del sonido en el aluminio dado en la tabla 17.1 para calcular el módulo de Young correspondiente a este material.

Resolución:

Datos: $\rho_{Al} = 2,7 \times 10^3$ kg/m³ ; $Y = ?$; $v_{Al} = 5\,100$ m/s (Tabla 17.1)

Sabemos que: $v_{Al} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

$\Rightarrow \quad v_{Al}^2 \times \rho = Y$

$\Rightarrow \quad (5\,100)^2 \times (2,7 \times 10^3) = Y \quad \therefore \quad Y = 7,02 \times 10^{10}$ N/m²

7. Mientras usted observa la construcción de un muelle en la orilla lejana de un estuario ocurre una explosión. Escucha el sonido en el agua 4,5 s antes de que llegue a usted por el aire. ¿Cuál es la anchura del estuario? (Sugerencia: Vea la tabla 17.1. Suponga que la temperatura del aire es de 20° C.)

Resolución:

Por dato: $v_{aire}(20°C) \times t$ = Long. del estuario

$v_{agua\ mar} \times (t - 4,5)$ = Long. del estuario

Donde: $v_{ondas\ (aire)} = 343$ m/s

$v_{ondas\ (agua\ de\ mar)} = 1\,533$ m/s

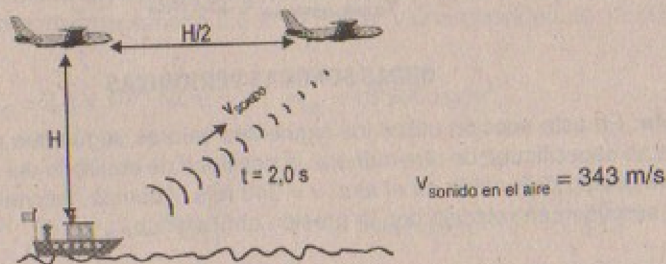
Entonces: (Igualando)

$343t = 1\,533\,(t - 45) \Rightarrow t = \frac{1\,533 \times 4,5}{1\,533 - 343} \quad \therefore \quad t = 5,797$ s

En consecuencia: Longitud del estuario = (343)(5,797) = 1,988 km

8. Un avión de rescate vuela horizontalmente a una velocidad constante durante la búsqueda de un bote a la deriva. Cuando el avión está exactamente sobre el bote, la tripulación de éste hace sonar una bocina. En el momento en que el detector de sonidos del avión percibe la señal de auxilio de la bocina, el avión ha recorrido una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si el sonido tarda 2,0 s en llegar al avión, determine a) la velocidad de éste, y b) su altura. Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que: $v_{sonido} \times t = \frac{H}{2}\sqrt{5} \Rightarrow (343)(2,0) = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{5}$

$\therefore \quad \frac{H}{2} = 306,8 \text{ m}$

Por otro lado: $\frac{H}{2} = v_{avión} \times (2,0) \Rightarrow \frac{306,8}{2} = v_{avión}$

$\therefore \quad v_{avión} = 153,4 \text{ m/s}$

Parte (b)

Como: $\frac{H}{2} = 306,8 \Rightarrow H = 613,6 \text{ m}$

9. La velocidad del sonido (en m/s) depende de la temperatura de acuerdo con la expresión

$$v = 331,5 + 0,607T_C$$

donde T_C es la temperatura en grados Celsius. En aire seco la temperatura disminuye cerca de 1°C por cada 150 m de aumento en la altura. a) Suponiendo que este cambio es constante hasta una altitud de 9 000 m, ¿cuánto tardará el sonido desde un avión que vuela a 9 000 m en llegar al suelo en un día en el que la temperatura en la superficie es de 30°C? b) Compare este valor con el tiempo que sería necesario si el aire tuviera una temperatura constante de 30°C. ¿Qué tiempo será mayor?

Resolución :

Parte (a)

A 9 000 m y la velocidad del sonido será: $v = 331,5 + 0,607(-1)$, a 30°C

$\therefore \quad v = 330,893 \text{ m/s}$

Entonces: $9\,000 = 330,893 \times t_{total}$

$\therefore \quad t_{total} = 27,2 \text{ s}$

Parte (b)

Para T = 30°C

Entonces: $v_{sonido} = 331,5 + 0,607\,(30)$

$\therefore \quad v_{sonido} = 349,71 \text{ m/s}$

Luego: $(349,71)t = 9\,000 \quad \therefore \quad t = 25,7 \text{ s}$

En consecuencia: este tiempo es menor en 5,30%

10. Calcule la amplitud de presión de una onda sonora de 2,0 kHz en el aire si la amplitud de desplazamiento es igual a $2,0 \times 10^{-8}$ m.

Resolución :

Nos piden $\Delta P_{máx} = ?$

Entonces: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire} \cdot v_{sonido\ aire} \cdot \omega \cdot s_{máx}$

Pero: $\rho_{aire} = 1,29 \text{ kg/m}^3$; $v_{sonido} = 3,43 \text{ m/s}$; $s_{máx} = 2,0 \times 10^{-8}$ m

$\omega = 2\pi f = 2(3,1416)(2,0 \text{ kHz})$

Entonces: $\Delta P_{máx} = (1,29)(343)(2,0 \times 10^{-8})(2)(3,1416)(2)(10^3)$

$\therefore \quad \Delta P_{máx} = 0,11 \frac{N}{m^2} = 1,11 \times 10^{-1} \text{ Pa}$

11. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión igual a $4,0 \times 10^{-3}$ Pa. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10,0 kHz.

Resolución :

Por dato: $\Delta P_{máx} = 4,0 \times 10^{-3}$ Pa $\quad f = 10,0$ kHz $\quad s_{máx} = ?$

Sabemos que: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire} \cdot v_{sonido} \cdot \omega \cdot s_{máx}$

$\Rightarrow \quad 4,0 \times 10^{-3} = (1,29)(2\pi)(10,0 \text{ kHz})(343) \cdot s_{máx}$

$\Rightarrow \quad 4,0 \times 10^{-3} = (1,29)(2)(3,1416)(10^4)(343) \cdot s_{máx}$

$\therefore \quad s_{máx} = 1,55 \times 10^{-10}$ m

12. Una onda sonora en un cilindro se describe por medio de las ecuaciones 17.4 a 17.6. Demuestre que $\Delta P = \pm\rho v\omega\sqrt{s_{máx}^2 - s^2}$.

Resolución :

Por la ecuación (17.4) $\quad \Delta P_{máx} = \rho.v.\omega.s_{máx}$

Por la ecuación (17.6) $\quad \Delta P^2_{máx} = (\rho.v.\omega.s_{máx})^2$

Sabemos que: $P_{máx} = \rho.v.\omega.s_{máx}$

$\wedge \quad \Rightarrow \quad P = \rho v \omega s$ (presión mínima)

$\Rightarrow \quad P^2_{máx} = (\rho\ v\ \omega\ s_{máx})^2 \qquad (-)$

y $\qquad P^2 = (\rho\ v\ \omega\ s)^2$

$P^2_{máx} - P^2 = (\rho v \omega.)^2\ (s^2_{máx} - s^2)$

$\Rightarrow \quad (P_{máx} - P)(P_{máx} + P) = (\rho v \omega)^2\ .\ (s^2_{máx} - s^2)$; sea: $P_{máx} - P = \Delta P$

$\Rightarrow \quad (\Delta P)\ (\Delta P + 2P) = (\rho.v.\omega)^2\ .\ (s^2_{máx} - s^2)$

$\therefore \quad \Delta P = \sqrt{(\rho v \omega)^2}\ .\sqrt{s^2_{máx} - s^2} = \pm \rho \omega v \sqrt{s^2_{máx} - s^2}$ l.q.q.d.

13. Un investigador desea generar en el aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento igual a $5,5 \times 10^{-6}$ m. La amplitud de presión estará limitada a $8,4 \times 10^{-1}$ Pa. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que la onda sonora puede tener?

Resolución:

Por dato: $\rho_{aire} = 1,29$ kg/m³ ; $\Delta P_{máx} = 8,4 \times 10^{-1}$ Pa

$s_{máx} = 5,5 \times 10^{-6}$ m $\qquad \lambda_{mínima} = ?$

Como nos piden $\lambda_{mínima}$, entonces $v_{sonido\ de\ las\ ondas\ en\ el\ aire} = 331$ m/s (0°C)

Luego: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire}\ v.\omega.s_{máx}$

$\Rightarrow \quad 8,4 \times 10^{-1} = (1,29)(331)\ (5,5 \times 10^{-6})(2\pi \times f)$

$\therefore \quad f = 56,93$ Hz

Como: $\lambda_{min} \times f = v_{min} = v_{ondas\ en\ aire}\ (0°)$

$\Rightarrow \quad \lambda_{min} = \dfrac{v_{min}}{f} = \dfrac{331}{56,33} \qquad \therefore \quad \lambda_{mínimo} = 5,81$ m

14. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión de 4,0 Pa y una frecuencia de 5,0 kHz. $\Delta P = 0$ en el punto $x = 0$ cuando $t = 0$. a) ¿Cuál es el valor de ΔP en $x = 0$ cuando $t = 2,0 \times 10^{-4}$ s, y b) ¿cuál es el valor de ΔP en $x = 0,020$ m cuando $t = 0$?

Resolución:

Datos: $\Delta P_{máx} = 4,0$ Pa ; $f = 5,0$ kHz

$\Delta P = 0$; para $x = 0$; $t = 0$

Parte (a)

Como $\qquad \Delta P = 0$ cuando $x = 0$; $t = 0$

Entonces: $\Delta P(x;\ t) = \Delta P_{máx}\ .\ \text{sen}(kx - \omega t)$

Para $\qquad x = 0$; $t = 2,0 \times 10^{-4}$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0,2 \times 10^{-4}) = (4,0)\ \text{sen}\ [-10\pi k\ (2,0 \times 10^{-4})]$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0,2 \times 10^{-4}) = -(4,0)\ \text{sen}(6,2832\ \text{rad})$

$\therefore \quad \Delta P\ (0,\ 2 \times 10^{-4}\ s) = -5,9 \times 10^{-5}$ Pa

Parte (b)

Para $x = 0,020$ y $t = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0,020;\ 0) = (4,0)\ \text{sen}(0,020k)$

Pero: $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad$ y $\quad v = \lambda f$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{2\pi.f}{v} = \dfrac{2\ (3,1416)\ (5,0 \times 10^3)}{343} = 91,6$ rad/m

Entonces: $\Delta P\ (0,020;\ 0) = (4,0)\text{sen}[1,83\ \text{rad}]$

$\therefore \quad \Delta P\ (0,020;\ 0) = 3,86$ Pa

15. Una onda sonora senoidal se describe por el desplazamiento

$$s(x;\ t) = (2,00\ \mu m)\ \cos[(15,7\ m^{-1})x - (858\ s^{-1})t]$$

a) Encuentre la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de esta onda y determine a través de qué material está viajando. (Véase la tabla 17.1.) b) Determine el desplazamiento instantáneo de las moléculas en la posición $x = 0,0500$ m en $t = 3,00$ ms. c) Determine la velocidad máxima del movimiento oscilatorio de las moléculas.

Resolución:

$s(x;\ t) = (2,00\ \mu m)\cos\ [15,7x - 858t]$

Parte (a)

Amplitud = 2,00 μm = $2,00 \times 10^{-6}$ m

Por otro lado: $\quad k = 15,7 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{2(3,1416)}{15,7} = 0,4$ m

Además: $\quad \omega = 858 = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{858}{2(3,1416)} = 136,55$ Hz

Luego: $\quad v_{onda} = \lambda f = (136,55)(0,4) = 54,6$ m/s

Según la tabla (17.1) la onda está viajando por «hule vulcanizado».

Parte (b)

Para $x = 0,05$ m y $t = 3,00 \times 10^{-3}$ s

Entonces: $\quad s\ (0,05;\ 3 \times 10^{-3}) = (2,00\ \mu m)\cos[0,785 - 2,574]$

$\therefore \quad s\ (0,05; 3 \times 10^{-3}) = (2,00\ \mu m)\cos(1,789\ \text{rad}) = -0,439\ \mu m$

Parte (c)

Sabemos que: $s(x; t) = (2,00\ \mu m)\cos[15,7x - 858t]$

Entonces: $\dfrac{\partial s(x;t)}{\partial t} = v(x; t) = (858)(2,00\ \mu m)\ \text{sen}[15,7x - 858t]$

$\Rightarrow \quad v_{máx}(x,t) = (858)(2,00\ \mu m)(1)$

$\therefore \quad v_{máx} = 1716\ \mu m/s = 1,72\ mm/s$

16. La tensión en una barra de cobre es 99,5% de su punto de fractura elástica de $13 \times 10^{10}\ N/m^2$. Si una onda sonora de 500 Hz se transmite por la barra, a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que la barra se rompa, y b) cuál es la velocidad máxima de las partículas en ese momento?

Resolución:

Sabemos que el esfuerzo del punto de fractura de la barra de cobre es:

$$13 \times 10^{10}\ N/m^2\ ;\quad \rho_{cobre} = 8,92 \times 10^3\ kg/m^3$$

Entonces: La tensión será: (en ese punto) $\dfrac{99,5}{100} \times 13 \times 10^{10} = 12,94 \times 10^{10}\ N/m^2$

Parte (a)

$f = 500\ Hz \quad \Rightarrow \quad \omega = 1000\pi\ rad/s$

Cuando la barra se rompa ΔP = máxima = $12,94 \times 10^{10}\ N/m^2$

Entonces: $\Delta P_{máx} = \rho_{cobre} \cdot v_{onda\ (cobre)}\ \omega\ s_{máx}$

Donde $v_{onda\ cobre} = 3\ 560\ m/s$

$\Rightarrow \quad s_{máx} = 12,94 \times 10^{10}/1000(3,1416)(3\ 560)(8,92 \times 10^3)$

$\therefore \quad s_{máx} = 1,297\ m$

Parte (b)

$v_{máx} = s.\omega = (1,297)(2)(3,1416)(500) = 4,07 \times 10^3\ m/s$

17. Anote una expresión que describa la variación de presión como una función de la posición y el tiempo para una onda sonora senoidal en el aire si $\lambda = 0,10\ m$ y $\Delta P_{máx} = 0,20\ Pa$.

Resolución:

Datos: $\lambda = 0,10\ m\ ;\ \Delta P_{máx} = 0,20\ Pa\ ;\ v_{ondas\ en\ el\ aire} = 343\ m/s$

Sabemos que: $\Delta P(x; t) = \Delta P_{máx} \cdot \text{sen}[kx - \omega t]$

Pero: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \quad k = \dfrac{(2)(3,1416)}{0,1} = 62,8\ rad/m$

Además: $\omega = 2\pi.f$

y $\quad v_{aire} = \lambda f \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{343}{0,1} = 3,43 \times 10^3\ Hz$

Entonces: $\omega = (2)(3,1416)(3,43 \times 10^3) = 2,16 \times 10^4$

En consecuencia: $\Delta P(x; t) = (0,200\ Pa)\ \text{sen}[62,8x - 2,16 \times 10^4 t]$

18. Anote la función que describe la onda de desplazamiento correspondiente a la onda de presión en el problema 17.

Resolución:

Sabemos que: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire}\ v\ \omega\ .\ s_{máx}$

$$\Rightarrow \quad s_{máx} = \frac{0,200}{(1,29)(343)(2,16 \times 10^4)} = 2,092 \times 10^{-8}\ m$$

Por lo tanto: $s(x; t) = (2,1 \times 10^{-8}\ m)\cos[62,8x - 2,16 \times 10^4 t]$

INTENSIDAD DE ONDAS SONORAS PERIÓDICAS

19. Calcule el nivel sonoro en dB de una onda sonora que tiene una intensidad de $4,0\ \mu W/m^2$.

Resolución:

Sabemos que la constante de intensidad de referencia es: $I_o = 1,00 \times 10^{-12}\ W/m^2$

Entonces: (por fórmula)

$$\beta = 10 \log\left[\frac{I}{I_o}\right]$$

Para $\quad I = 4,0\ \mu.W/m^2$

$$\Rightarrow \quad \beta = 10 \log\left[\frac{4,0 \times 10^{-6}}{1,00 \times 10^{-12}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 10 \log[4 \times 10^6] = 10 \log(4) + 10 \log(10^6)$$

$$\therefore \quad \beta = 66,00\ dB$$

20. Una aspiradora tiene un nivel sonoro medido de 70 dB. ¿Cuál es la intensidad de este sonido en W/m^2?

Resolución:

Por dato: $I_{(aspiradora)} = 70\ dB$

Entonces: $70\ dB = 10\log\left[\dfrac{I}{I_o}\right] = 10 \log\left[\dfrac{I}{1,00 \times 10^{-12}}\right]$

$\Rightarrow \quad 7 = \log(I) - \log(10^{-12})$

$\therefore \quad \log(I) = -5 \quad \Rightarrow \quad I = 1,00 \times 10^{-5}\ W/m^2$

21. Demuestre que la diferencia en niveles de decibeles, β_1 y β_2, de una fuente sonora se relaciona con la razón entre sus distancias, r_1 y r_2, desde los receptores por medio de

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Resolución:

Sea: β_2 a una distancia «r_2» β_1 a una distancia «r_1»

Entonces: $I_2 = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi \times r_2^2}$ y $I_1 = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi \times r_1^2}$

Luego: $\beta_2 = 10\log\left[\dfrac{\text{Potencia}\times 10^{12}}{4\pi\times r_2^2}\right]$

$\beta_1 = 10\log\left[\dfrac{\text{Potencia}\times 10^{12}}{4\pi\times r_1^2}\right]$ (–)

Resulta que: $\beta_2 - \beta_1 = 10\log\left[\dfrac{\text{Potencia}\times 10^{12}}{4\pi\times r_2^2}\right] - 10\log\left[\dfrac{\text{Potencia}\times 10^{12}}{4\pi\times r_1^2}\right]$

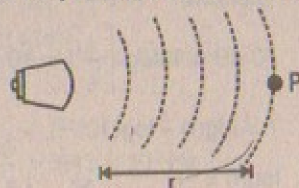
$\Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ (propiedad de logaritmo)

$\therefore \beta_2 - \beta_1 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ l.q.q.d.

22. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de un altavoz que vibra a 1,00 kHz es 0,600 W/m². a) Determine la intensidad si la frecuencia aumenta a 2,50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0,500 kHz y la amplitud de desplazamiento se duplica.

22A. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de un altavoz que vibra a una frecuencia f es I. a) Determine la intensidad si la frecuencia aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante, b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a f/2 y la amplitud de desplazamiento se duplica.

Resolución:



Parte (a)

$I_f = ?$ cuando $f = 2{,}50$ kHz

$s_{máx} = \text{cte}$

Sabemos que:

$$I_i = \frac{1}{2}\rho_{aire}\, v\, A\, \omega^2\, s_{máx}^2 = 0{,}600\ \text{W/m}^2$$

Entonces: Si $f = 2{,}50$ kHz $\Rightarrow \omega_1 = 2\pi.(2{,}5) = 2{,}5\omega$ $\therefore \omega_1^2 = 6{,}25\,\omega^2$

y $s_{máx} = \text{cte}$

Por lo tanto: $I_f = 6{,}25\, I_i = 6{,}25\,(0{,}600) = 3{,}75\ \text{W/m}^2$

Parte (b)

$I_f = ?$, cuando: $f = 0{,}500$ kHz ; $s_{máx\,final} = 2\, s_{máx\,inicial}$

Entonces: $\omega_{final} = 0{,}5.\omega_{inicial} = 0{,}5\,(2\pi f)$ $\Rightarrow$ $\omega^2_{final} = 0{,}25\,\omega^2$

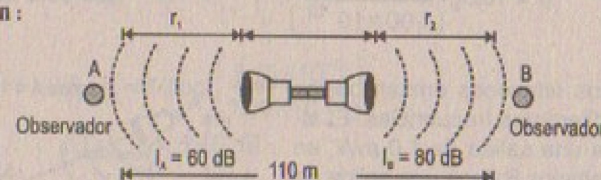
Además: $s_{máx\,final} = 2 s_{máx\,inicial}$ $\Rightarrow$ $s_{máx\,final}^2 = 4\, s_{máx}^2$

En consecuencia: $I_{final} = (0{,}25)(4)\,.\,I_{inicial}$

$\therefore I_{final} = 0{,}600\ \text{W/m}^2$

23. Un altavoz se coloca entre dos observadores separados por una distancia de 110 m, a lo largo de la línea que los une. Si un observador registra un nivel de intensidad de 60 dB y el otro registra un nivel de intensidad de 80 dB, ¿a qué distancia está el altavoz de cada observador?

Resolución:



Por dato: $r_1 + r_2 = 110$ m ... (α)

Además por demostración del problema n.° 21 se cumple que

$\beta_2 - \beta_1 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ $\Rightarrow$ $I_B - I_A = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$

$\Rightarrow 80 - 60 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ $\Rightarrow$ $10r_2 = r_1$

Luego: De (α)

$10r_2 + r_2 = 110$ m $\therefore$ $r_2 = 10$ m

$\Rightarrow$ $r_1 = 100$ m

24. Se detona una carga explosiva a una altura de varios kilómetros en la atmósfera. A una distancia de 400 m de la explosión la presión acústica alcanza un máximo de 10 Pa. Si se supone que la atmósfera es homogénea sobre la distancia considerada, ¿cuál

será el nivel sonoro (en dB) a 4 km de la explosión? (Las ondas sonoras en el aire se absorben a una tasa de aproximadamente 7 dB/km.)

Resolución:

Datos: cuando $r = 400$ m ; $\Delta P_{máx} = 10$ Pa; $\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³

$$v_{sonido\ en\ aire} = 343 \text{ m/s}$$

$$\text{Tasa de las ondas sonoras} = \frac{7\text{ dB}}{\text{km}}$$

Sabemos que: $I = \dfrac{\Delta P_{máx}^2}{2\rho V} = \dfrac{(10)^2}{2(1{,}29)(343)} \quad \therefore \quad I = 1{,}13 \times 10^{-1}$ W/m²

Entonces: $1{,}13 \times 10^{-1} = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi(400)^2}$

$\therefore$ Potencia promedio $= 2{,}27 \times 10^5$ W

Entonces el nivel de intensidad sonora a 4 km de la explosión en decibeles será:

$$I = \frac{2{,}27\times10^5}{4\pi(4\times10^3)^2} \Rightarrow I = 1{,}13\times10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{1{,}13\times10^{-3}}{1{,}00\times10^{-12}}\right] \quad \therefore \quad \beta = 90{,}5$ dB

25. Dos pequeños altavoces emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias. El altavoz A tiene una salida de 1,0 mW, en tanto que el altavoz B tiene una salida de 1,5 mW. Determine el nivel de intensidad sonora (en dB) en el punto C(Fig. P17.25) si a) sólo el altavoz A emite sonido, b) sólo el altavoz B emite sonido, y c) ambos altavoces emiten sonido.

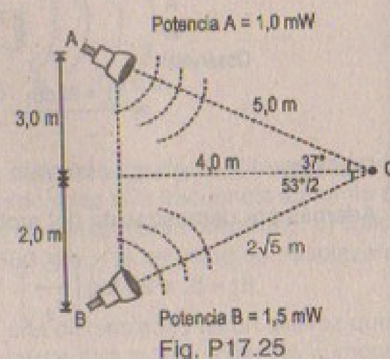


Fig. P17.25

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $I_A = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow \frac{1{,}0\times10^{-3}}{4(3{,}1416)(5)^2} = I_A \quad \therefore \quad I_A = 3{,}18\times10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{3{,}18\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right] \quad \therefore \quad \beta = 65$ dB

Parte (b)

Sabemos que: $I_B = \dfrac{P_{prom}}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5\times10^{-3}}{4(3{,}1416)(2\sqrt{5})^2} = I_B \quad \therefore \quad I_B = 5{,}97\times10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{5{,}97\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right] \quad \therefore \quad \beta = 67{,}8$ dB

Parte (c)

Entonces: $I_{resultante} = I_A + I_B = 5{,}97\times10^{-6} + 3{,}18\times10^{-6}$

$\therefore \quad I_{resultante} = 9{,}15\times10^{-6}$ W/m²

Luego:I resultante en decibeles será:

$\beta_{result.} = 10\log\left[\dfrac{I_{result}}{I_o}\right]$ Donde: $I_o = 1{,}00\times10^{-12}$ W/m²

$$\Rightarrow \beta_{result.} = 10\log\left[\frac{9{,}15\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$$

$\therefore \quad \beta_{resultante} = 69{,}6$ dB

26. Dos fuentes tienen niveles sonoros de 75 dB y 80 dB. Si suenan simultáneamente, a) ¿cuál es el nivel sonoro combinado? b) ¿Cuál es su intensidad combinada en W/m²?

Resolución:

Sea: $I_A \equiv \beta_A = 75$ dB y $I_B \equiv \beta_B = 80$ dB

Entonces: $75\text{ dB} = 10\log\left(\dfrac{I_A}{I_o}\right) \Rightarrow I_A = 10^{7{,}5}\times I_o$

$$80\text{ dB} = 10\log\left(\frac{I_B}{I_o}\right) \Rightarrow I_B = 10^8\times I_o$$

Luego: $I_{result.} = I_A + I_B = 10^{15{,}5}\times I_o$

En consecuencia $I_{result.}$ en W/m² será:

$$I_{result} = 1{,}00\times10^{-12}\,.\,10^{+15{,}5} \equiv 1\times10^{3{,}5} \equiv \sqrt{10}\times10^3 = 3{,}16\times10^3 \text{ W/m}^2$$

ONDAS ESFÉRICAS Y PLANAS

27. Un experimento requiere una intensidad sonora de 1,2 W/m² a una distancia de 4 m del altavoz. ¿Qué salida de potencia se requiere?

Resolución :

Por dato: $I = 1,2\ W/m^2$; $r = 4$ m

Entonces: Por fórmula: $I = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2} \Rightarrow 1,2 = \dfrac{P_{prom}}{4\,(3,1416)(4)^2}$

$\Rightarrow (1,2)(4)(3,1416)(4)^2 = P_{prom}$

$\therefore$ Potencia promedio = 241 watts

28. Una fuente de sonido (1 000 Hz) emite uniformemente en todas las direcciones. Un observador a 3,0 m de la fuente mide un nivel sonoro de 40 dB. Calcule la salida de potencia promedio de la fuente.

Resolución :

Por dato: $f = 1000$ Hz ; $r = 3$ m (de la fuente)
$I_1 = 40$ dB ; $P_{prom.} = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2} \Rightarrow I = \dfrac{P_{prom.}}{4\,(3,1416)(3)^2}$ ... (α)

Pero: $40\ dB = 10 \log\left[\dfrac{I}{1,00\times10^{-12}}\right] \quad \therefore I = 1,00 \times 10^{-8}\ W/m^2$

En consecuencia en (α)

$1,00 \times 10^{-8} = \dfrac{P_{prom.}}{4\,(3,1416)(3)^2} \quad \therefore P_{prom.} = 1,13 \times 10^{-6}$ W

29. El nivel sonoro a una distancia de 3,0 m de una fuente es de 120 dB. ¿A qué distancia el nivel sonoro será a) 100 dB, y b) 10 dB?

Resolución :

Por dato: $r = 3,0$ m (de la fuente)
$\beta = 120$ dB

Parte (a)

$r_1 = ?$; $\beta_1 = 100$ dB

Por demostración del problema n.° 21 sabemos que:

$\beta - \beta_1 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r}\right) \Rightarrow 120 - 100 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{3}\right)$

$\Rightarrow 1 = \log\left(\dfrac{r_1}{3}\right) \quad \therefore r_1 = 30$ m

Parte (b)

$r_2 = ?$ si $\beta_2 = 10$ dB

Entonces: igual que la parte (a)

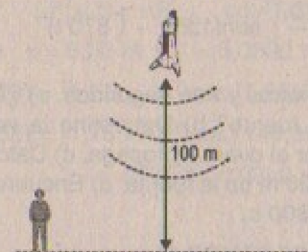
$\beta - \beta_2 = 20\log\left(\dfrac{r_2}{3}\right) \Rightarrow 120 - 10 = 20\log(r_2/3)$

$\Rightarrow 5,5 = \log(r_2/3) \quad \therefore r_2 = 9,49 \times 10^5$ m

30. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador sobre el suelo directamente abajo de la explosión percibe una intensidad sonora promedio de $7,0 \times 10^{-2}\ W/m^2$ durante 0,20 s. a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? b) ¿Cuál es el nivel sonoro en decibeles que escucha el observador?

30A. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h sobre el suelo. Un observador sobre el suelo directamente abajo de la explosión percibe una intensidad sonora promedio I durante un tiempo t. a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? b) ¿Cuál es el nivel sonoro en decibeles que escucha el observador?

Resolución :



$I_{prom} = 7,0 \times 10^{-2}\ W/m^2$
$t = 0,20$ s

N.R (suelo)

Parte (a)

Sabemos que: $I = \dfrac{P_{prom}}{4\pi(100)^2}$

$\Rightarrow 7,0 \times 10^{-2}\,(4)(3,1416)(10^4) = P_{prom} \quad \therefore P_{prom} = 8,8 \times 10^3$ W

Por otro lado:

$P_{prom} = \dfrac{E_{total}}{\Delta t} \Rightarrow (8,8 \times 10^3)(0,20) = E_{total}$

$\therefore E_{total} = 1,76 \times 10^3$ joules

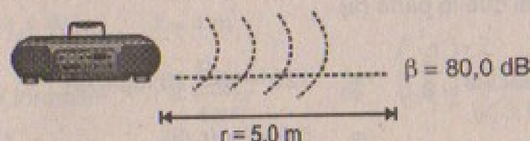
Parte (b)

Sabemos que: $\beta = 10.\log\left[\dfrac{I}{I_o}\right] \Rightarrow \beta = 10\log\left[\dfrac{7,0\times10^{-2}}{1,00\times10^{-12}}\right]$

$\Rightarrow \beta = 10\log(7,0) + 10\log(10^{10}) \quad \therefore \beta = 108,45$ dB

31. Un grupo de rock está tocando en un estudio. El sonido que sale por una puerta abierta se dispersa uniformemente en todas las direcciones. Si el nivel sonoro de la música es de 80,0 dB a una distancia de 5,0 m de la puerta, ¿a qué distancia la música es apenas audible para una persona con un umbral auditivo normal (0 dB)? Descarte la absorción.

Resolución:



Nos piden r_1 = ? cuando $\beta_1 = 0$ dB

Por demostración del problema n.° 21, se cumple que:

$$\beta - \beta_1 = 20\log\left(\frac{r_1}{r}\right) \Rightarrow 80 - 0 = 20\log\left(\frac{r_1}{5}\right)$$

$$\therefore\ r_1 = 5 \times 10^4 \text{ m} = 50{,}0 \text{ km}$$

32. Una onda esférica es radiada desde una fuente puntual y se describe de la manera siguiente:

$$y(r;\ t) = \left(\frac{25{,}0}{r}\right)\text{sen}(1{,}25r - 1\ 870\ t)$$

donde y está en pascales, r en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de presión máxima a 4,00 m de la fuente? b) Determine la velocidad de la onda y consecuentemente el material por el cual se propaga. c) Calcule la intensidad de la onda en dB a una distancia de 4,00 m de la fuente. d) Encuentre la presión instantánea a 5,00 m de la fuente en 0,0800 s.

Resolución:

$$y(r;\ t) = \left(\frac{25}{r}\right)\text{sen}(1{,}25r - 1870t)$$

Parte (a)

$\Delta P_{máx}$ = ? cuando r = 4,00 m

Sabemos que: $\Delta P_{máx} = \rho . v . \omega . s_{máx}$

Pero: $1{,}25 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1{,}6\pi$ m y $s_{máx} = \frac{25}{4} = y_{(r=4)}$

Además: $1\ 870 = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{935}{\pi}$ Hz

Luego: $v = \lambda f = (1{,}6\ \pi)\left(\frac{935}{\pi}\right) = 1\ 496$ m/s

Pero: 1 496 m/s pertenece a la velocidad de la onda en el agua.

En consecuencia:

$$\Delta P_{máx} = \rho_{agua} \cdot v_{onda} \cdot \omega \cdot s_{máx}$$

$$\therefore\ \Delta P_{máx} = (10^3)(1{,}496 \times 10^3)(1{,}87 \times 10^3)(25/4) = 1{,}75 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Parte (b)

De lo hallado en (a) tenemos que $v_{onda} = 1{,}496 \times 10^3$ m/s y la onda se propaga en «agua»

Parte (c)

Sabemos que: $I = \frac{\Delta P^2_{máx}}{2 . \rho . v} \Rightarrow I = \frac{(1{,}75 \times 10^7)^2}{2 \times 10^3 \times 1{,}496 \times 10^3}$

$$\therefore\ I = 1{,}02 \times 10^8 \text{ W/m}^2$$

Entonces en decibeles será:

$$\beta = 10\log\left[\frac{1{,}02 \times 10^8}{1{,}00 \times 10^{-12}}\right] \Rightarrow \beta = 10\log(1{,}02) + 10\log(10^{20})$$

$$\therefore\ \beta = 200 \text{ dB}$$

Parte (d)

Sabemos que: $\Delta P(x;\ t) = \Delta P_{máx} . \cos(1{,}25x - 1\ 870\ t)$

Entonces para x = 5,00 m y t = 0,0800 s

$$\Delta P(5;\ 0{,}08) = (1{,}75 \times 10^7)\cos[1{,}25(5) - 1\ 870(0{,}0800)]$$

$$\Rightarrow \Delta P(5;\ 0{,}08) = (1{,}75 \times 10^7)\cos[143{,}35 \text{ rad}]$$

$$\therefore\ \Delta P(5 \text{ m};\ 0{,}08 \text{ s}) = 6{,}94 \times 10^6 \text{ Pa}$$

EL EFECTO DOPPLER

33. Una bala disparada por un rifle se desplaza a 1,38 Mach (es decir, $v_s/v = 1{,}38$). ¿Qué ángulo forma el frente de la onda de choque con la trayectoria de la bala?

Resolución:

Por dato: $\frac{v_s}{v} = 1{,}38$

Pero $\text{sen}\theta = \frac{v}{v_s} \Rightarrow \frac{1}{1{,}38} = \frac{v}{v_s} = \text{sen}\,\theta$

$\therefore\ \theta = \text{arc sen}(0{,}7246)$ $\therefore\ \theta = 46{,}4°$

34. Un bloque con un altavoz atornillado a él se conecta a un resorte que tiene una constante k = 20,0 N/m como muestra la figura P17.34. La masa total del bloque y el altavoz es de 5,00 kg y la amplitud del movimiento de este conjunto es 0,500 m.

a) Si el altavoz emite ondas sonoras de 440 Hz de frecuencia, determine el intervalo de frecuencias que escucha una persona a la derecha del altavoz. b) Si el nivel de intensidad máximo escuchado por la persona es de 60 dB cuando está lo más cerca del altavoz, 1,00 m de distancia, ¿cuál es la intensidad mínima escuchada por el observador? Suponga que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

34 A. Un bloque con un altavoz atornillado a él se conecta a un resorte que tiene una constante k, como muestra la figura P17.34. La masa total del bloque y el altavoz es m y la amplitud del movimiento de este conjunto es A. a) Si el altavoz emite ondas sonoras de frecuencia f, determine el intervalo de frecuencias que escucha una persona a la derecha del altavoz. b) Si el nivel de intensidad máximo escuchado por la persona es β cuando está lo más cerca del altavoz, una distancia d, ¿cuál es la intensidad mínima escuchada por el observador?

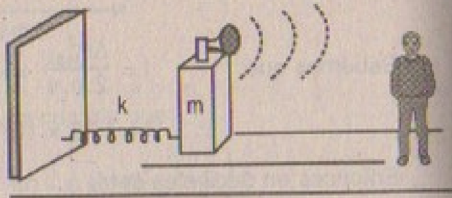


Figura P17.34

Resolución:

Amplitud = 0,500 m ; k = 20 N/m

$M_{total} = m = 5{,}00$ kg ; $v = v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

$f = 440$ Hz ; $f_{obs} = ?$

Por movimiento armónico simple:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{M}}\,.\,A \quad \therefore \quad v_f = +1 \text{ m/s}$$

Cuando la fuente se acerca se cumple que

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{v_f}{v}}\right) = 440\left(\frac{1}{1-\frac{1}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad f_{obs} = 441{,}3 \text{ Hz}$$

Cuando la fuente se aleja se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{v_f}{v}}\right) = 440\left(\frac{1}{1+\frac{1}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad f_{obs} = 438{,}7 \text{ Hz}$$

En consecuencia:

El intervalo de frecuencias que escucha una persona será: $438{,}7 \leq f_{obs} \leq 441{,}3$ Hz

Parte (b)

Por dato $\quad I_{máx} = \beta_{máx} = 60$ dB $\quad r_{máx} = 1{,}00$ m

Entonces sin elongarse el resorte el observador se encuentra a 1,50 m del altavoz, luego $d_{mínima} = d_{de\ alejamiento} = 2{,}00$ m (cuando el altavoz esté lo más lejos del observador)

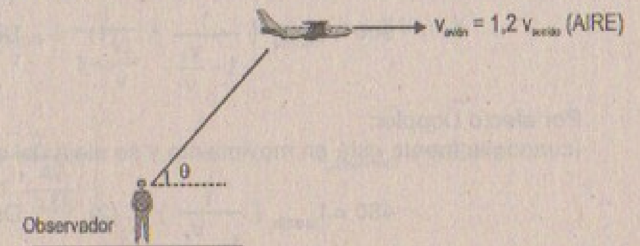
Por lo tanto: por demostración del problema n.° 21

$$\beta_{máx} - \beta_{mín} = 20\log\left(\frac{2{,}00}{1{,}00}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 60 - \beta_{min} = 20\log(2) \quad \therefore \quad \beta_{mínimo} = 53{,}9 \text{ dB} = 54 \text{ dB}$$

35. Un avión a reacción de combate viaja horizontalmente a 1,2 Match (es decir, 1,2 veces la velocidad del sonido en el aire). En el instante en el que una observadora sobre el suelo escucha la onda de choque, ¿cuál es el ángulo que su línea de visión forma con la horizontal cuando ella mira al avión?

Resolución:



Sabemos que:

$$\text{sen}\theta = \frac{v_{ondas}}{v_f}$$

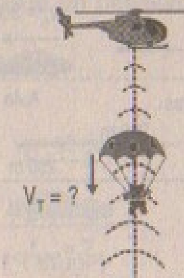
Donde: v = velocidad del sonido

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \frac{v_{ondas}\ (\text{Aire})}{1{,}2\,v_{ondas}\ (\text{Aire})} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\theta = 0{,}8333$$

En consecuencia: $\quad \theta = \text{sen}^{-1}(0{,}83333) \approx 56{,}4°$

36. Desde un helicóptero se lanza un soldado paracaidista que porta un transmisor de radio el cual emite una señal de 500 Hz. El radar en el avión rastrea la señal del transmisor conforme cae el paracaidista. Si la frecuencia percibida se vuelve constante a 450 Hz, ¿cual es la velocidad terminal del paracaidista? Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 343 m/s y suponga que el paracaidista siempre permanece debajo del helicóptero.

Resolución:



f_{radar} (avión) = 450 Hz

$v_{sonido} = 343$ m/s

$f_{fuente\ (radio)} = 500$ Hz

Por efecto Doppler: cuando la fuente (radio del obs.) están en movimiento y el obs. en este caso el helicóptero está en reposo, se cumple que:

$$f_{obs(helicop.)} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{V_T}{V}}\right) \quad \Rightarrow \quad 450 = 500\left(\frac{1}{1+\frac{V_T}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad V_{terminal} = 38{,}1 \text{ m/s}$$

37. Al estar parado en el cruce de una calle usted escucha una frecuencia de 560 Hz proveniente de la sirena de un carro de policía que se acerca. Después de que este vehículo pasa, la frecuencia observada de la sirena es 480 Hz. Determine la velocidad del carro de acuerdo con estas observaciones.

Resolución:

Por efecto Doppler: cuando la fuente está en movimiento y se acerca al observador se cumple que:

$$560 = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{V_f}{V}}\right) \ldots (1) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

Por efecto Doppler:
(cuando la fuente está en movimiento y se aleja del observador se cumple que):

$$480 = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{V_f}{V}}\right) \ldots (2) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$(1) \div (2): \qquad \frac{560}{480} = \frac{V+V_f}{V-V_f}$$

$$\Rightarrow \quad 1\,040 v_f = 80 v \qquad \therefore \quad v_f = 26{,}4 \text{ m/s}$$

38. Un carro de bomberos que se mueve hacia la derecha a 40 m/s suena su bocina (frecuencia de 500 Hz) a los dos vehículos que se muestran en la figura P17.38. El auto se mueve hacia la derecha a 30 m/s, en tanto que la camioneta está detenida. a) ¿Qué frecuencia perciben los pasajeros en el auto? b) ¿Cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en la camioneta? c) Cuando el carro de bomberos está a 200 m del automóvil y a 250 m de la camioneta, los pasajeros en el carro perciben un nivel de intensidad sonora de 90 dB. En ese momento, ¿cuál es el nivel de intensidad que perciben los pasajeros en la camioneta?

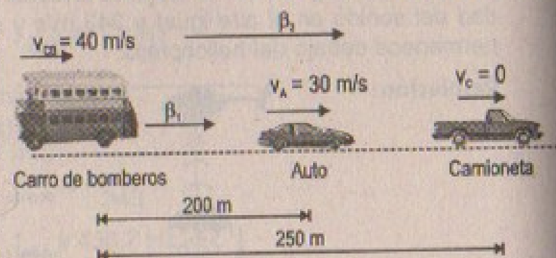


Figura P17.38

Resolución:

Parte (a)

Por efecto Doppler: cuando el observador y la fuente están en movimiento,entonces se cumple:

$$f_{obs} = f_{auto} = f_f\left(\frac{V-V_o}{V-V_f}\right) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = (500)\left[\frac{343-30}{343-40}\right]$$

$$\therefore \quad f_{auto} = 516{,}50 \text{ Hz}$$

Parte (b)

Por efecto Doppler: cuando el observador (camioneta) está en reposo y la fuente (carro de bomberos) está en movimiento, se cumple:

$$f_{obs} = f_{camioneta} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{V_f}{V}}\right) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{camioneta} = 500\left[\frac{1}{1-\frac{40}{343}}\right] \qquad \therefore \quad f_{camioneta} = 566 \text{ Hz}$$

Parte (c)

Por demostración del problema n.° 21 se cumple que:

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log\left[\frac{r_1}{r_2}\right] \Rightarrow \beta_2 - 90 = 20\log\left[\frac{200}{250}\right]$$

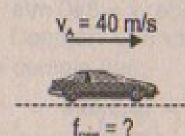
$$\therefore \quad \beta_2 = 88 \text{ dB}$$

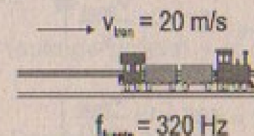
(lo que perciben los pasajeros en la camioneta)

39. Un tren se mueve a 20 m/s paralelo a una autopista. Un auto viaja en la misma dirección que la del tren a 40 m/s. La bocina del auto suena a 510 Hz, y el silbato del tren, a 320 Hz. a) Cuando el carro está detrás del tren, ¿qué frecuencia del silbato del tren percibe un ocupante del auto? b) Cuando el carro está frente al tren, ¿qué frecuencia percibe un pasajero en el tren del claxon del carro cuando acaba de pasarlo?

Resolución:

Parte (a)





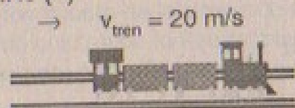
Por efecto Doppler: cuando la fuente (silbato del tren) y el observador (pasajero dentro del auto) están en movimiento, se cumple que:

$$f_{obs} = f_f\left[\frac{v + v_o}{v + v_f}\right] \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

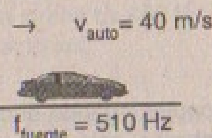
$$\Rightarrow \quad f_{obs} = 320\left[\frac{343+40}{343+20}\right] \qquad \therefore \quad f_{obs(\text{dentro del auto})} = 338 \text{ Hz}$$

Parte (b)

$\rightarrow \; v_{tren} = 20$ m/s



$\rightarrow \; v_{auto} = 40$ m/s



$f_{fuente} = 510$ Hz

Por efecto Doppler: cuando la fuente (bocina del auto) y el observador (pasajero dentro del tren) están en movimiento, se cumple que:

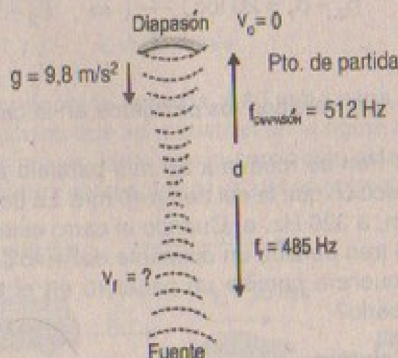
$$f_{obs} = f_f\left[\frac{v + v_o}{v + v_f}\right] \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{obs} = 510\left[\frac{343+20}{343+40}\right] \qquad \therefore \quad f_{obs} = 483 \text{ Hz}$$

(dentro del tren)

40. Un diapasón que vibra a 512 Hz cae desde el reposo y se acelera a 9,80 m/s². ¿A qué distancia abajo del punto donde se suelta el diapasón llegan ondas de 485 Hz de frecuencia al punto de partida? Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s.

Resolución :



Por efecto Doppler: cuando el observador (diapasón) se aproxima a la fuente (abajo del punto de equilibrio) abajo del punto de partida; entonces se cumple:

$$f_{obs\,(\text{diapasón})} = f_f\left(1 + \frac{v_{final}}{v}\right) \qquad \text{Donde: } v = 340 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad 512 = 485\left(1 + \frac{v_{final}}{340}\right) \qquad \therefore \quad v_{final} = 18{,}9 \text{ m/s}$$

Entonces: por cinemática

$$d = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{(18{,}9)^2 - 0^2}{2(9{,}80)}$$

$$\therefore \quad d = 18{,}27 \text{ m}$$

41. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una velocidad mayor que la de la luz en ese medio se produce una onda de choque, u onda de arco, de luz. Este fenómeno se conoce como *efecto Cerenkov* y puede observarse en la vecindad del núcleo de la alberca de un reactor nuclear debido a que los electrones de alta velocidad se mueven por el agua. En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un ángulo del ápice de 53°. Calcule la velocidad de los electrones en el agua. (La velocidad de la luz en el agua es 2,25 × 10⁸ m/s.)

Resolución :

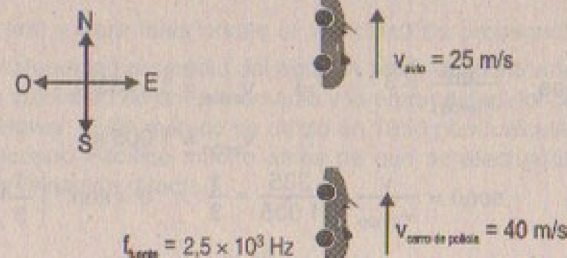
Sabemos que: $\quad \text{sen}53° = \dfrac{v_{ondas}}{v_{fuente}}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}7986 = \frac{v_{ondas}}{v_{fuente}} = \frac{2{,}25\times10^8}{v_{fuente}}$$

$$\therefore \quad v_{fuente} = 2{,}82 \times 10^8 \text{ m/s}$$

42. Un conductor que viaja rumbo al norte en una autopista conduce a una velocidad de 25 m/s. Un carro de policía que viaja en dirección sur a una velocidad de 40 m/s se aproxima sonando su sirena a una frecuencia base de 2 500 Hz. a) ¿Qué frecuencia percibe el automovilista conforme se acerca el carro de policía? b) ¿Qué frecuencia es detectada por el conductor del automóvil después de que el carro de policía lo pasa? c) Repita los juicios a) y b) para el caso en que el carro de policía está viajando rumbo al norte.

Resolución :



Parte (a)

Por efecto Doppler: Cuando la fuente (auto de policía) y el observador (auto) se mueven se cumple que:

$$f_{auto} = f_{fuente}\left(\frac{v - v_A}{v - v_f}\right) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = 2\,500\left[\frac{343-25}{343-40}\right] \quad \therefore \quad f_{auto} = 2\,624 \text{ Hz}$$

Parte (b)

Por efecto Doppler: cuando la fuente (auto de policía) es perseguido por el observador (auto), se cumple que:

$$f_{auto} = f_{fuente}\left(\frac{v+v_A}{v+v_f}\right) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = 2\,500\left(\frac{343+25}{343+40}\right) \quad \therefore \quad f_{auto} = 2\,403 \text{ Hz}$$

43. Un avión supersónico que viaja a 3 Mach a una altura de 20 000 m está directamente por encima de la cabeza de un observador en el tiempo t = 0, como en la figura P17.43. a) ¿Qué distancia recorrerá antes de que uno se encuentre con la onda de choque? b) ¿Dónde estará el avión cuando dicha onda finalmente se escuche? (Suponga que la velocidad del sonido en el aire se mantiene uniforme en 335 m/s.)

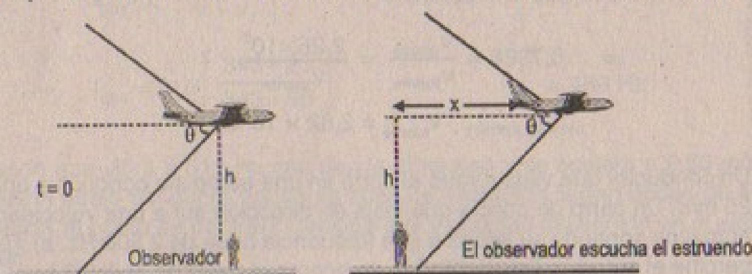


Figura P17.43

Resolución:

El observador escucha el estruendo:

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{v_{avión}}{v_{sonido}} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_{avión} = 3 \times (335)$

$\therefore \quad v_{avión} = 1\,005$ s

Además: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_{avión}} = \dfrac{335}{1\,005} = \dfrac{1}{3} \quad \therefore \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 19{,}47°$

Por otro lado: $\dfrac{h}{x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{h}{\tan\theta} = \dfrac{2\times10^4}{\tan(19{,}47°)}$

$\therefore \quad x = 56\,568{,}556$ m

Luego: $v_{avión} \times t = 56\,568{,}556 \quad \therefore \quad t = 56{,}3$ s

Parte (b)

En consecuencia el avión estará a:

$$\vec{r}_{avión} = 56{,}6 \text{ km}\,\hat{i} + 20{,}0 \text{ km}\,\hat{j} \qquad \text{desde el observador}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

44. A una barra de cobre se le da un severo golpe de compresión en un extremo. El sonido del golpe, viajando por el aire a 0°C, llega al extremo opuesto de la barra 6,4 ms después de que el sonido se transmite a lo largo de la misma. ¿Cuál es la longitud de la barra? (Véase la tabla 17.1.)

Resolución:

v_{sonido} (0°C) = 381 m/s $\qquad t_{total \times aire} = t + 6{,}4 \times 10^{-3}$ s

COBRE

L

v_{ondas} (COBRE) = 3 560 m/s $\qquad t_{total \times cobre} = t$

Por los datos sabemos que:

$L = v_{sonido\ en\ aire\ (0°C)} \times (t + 6{,}4 \times 10^{-3}) \quad \ldots (1)$

$L = v_{sonido\ en\ cobre} \times t \quad \ldots (2)$

Entonces: (1) = (2): $\quad 3\,560 \times t = 331 \times (t + 6{,}4 \times 10^{-3})$

$\therefore \quad t = 6{,}6 \times 10^{-4}$ s

Luego: longitud de la barra del cobre será = 2,35 m

45. Un terremoto en el lecho del océano del Golfo de Alaska produce un *tsunami* (denominado algunas veces una «marejada») que llega a Hilo, Hawai, a 4 450 km de distancia, en un tiempo de 9 h 30 min. Los *tsunamis* tienen enormes longitudes de onda (100-200 km) y para tales ondas la velocidad de propagación es $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad promedio del agua. A partir de la información proporcionada, calcule la velocidad de onda promedio y la profundidad del océano promedio entre Alaska y Hawai. (Este método se utilizó en 1856 para calcular la profundidad promedio del Océano Pacífico mucho antes de que se efectuaran sondeos para brindar una determinación directa.)

Resolución:

Sabemos que: $v_{ondas} \times t$ = Distancia (Alaska - Hawai)

$\Rightarrow \quad v_{ondas} = \dfrac{4\,450}{9{,}5} \quad \therefore \quad v_{ondas} = 130$ m/s

Por otro lado:

La velocidad de propagación de las ondas = $\sqrt{g\,d}$ (por dato)

Entonces: $(130)^2 = (9,80) \cdot \bar{d}$

$\therefore \quad \bar{d} = 1,73$ km (profundidad promedio del océano Pacífico)

46. La salida de potencia de cierto altavoz estereofónico es 6,0 W. a) ¿A qué distancia del altavoz el sonido sería doloroso para el oído? b) ¿A qué distancia del altavoz el sonido apenas sería audible?

Resolución:

Datos: Potencia = 6,0 W $\qquad I_o = 1,00 \times 10^{-12}$ W/m²

Parte (a)

Sabemos que: $I = \dfrac{6,0}{4\pi r^2}$

Entonces:

Para que el sonido sea doloroso para el oído humano se tiene que cumplir que:

$$\beta = 120 \text{ dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 120 = 10\log\left[\frac{6\times10^{12}}{4(3,1416)r^2}\right] \quad \Rightarrow \quad 10^{12} \times (4)(3,1416)r^2 = 10^{12} \times 6$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{6}{4(3,1416)} \quad \therefore \quad r = 1,77 \text{ m}$$

En consecuencia:

A esta distancia dicho sonido sería doloroso para nuestro oído.

Parte (b)

Sería audible, cuando «β» sea mínimo, es decir:

$$0 \text{ dB} = 10\log\left[\frac{6\times10^{12}}{4(3,1416)r^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1 \times (4)(3,1416) \times r^2 = 6 \times 10^{12} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{6\times10^{12}}{4(3,1416)}$$

$$\therefore \quad r = 4,77 \times 10^{11} \text{ m}$$

En consecuencia:

A esta distancia el sonido apenas sería audible.

47. Un avión jet viaja hacia la altura a una velocidad constante de 196,3 m/s en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig. P17.47). Un observador en el suelo escucha el avión por primera vez cuando éste está directamente encima de él. Determine el valor de θ si la velocidad del sonido en el aire es de 340,0 m/s. (Sugerencia: Muestre primero que el primer sonido escuchado por el observador proviene del avión cuando la línea que lo conecta con este último es perpendicular a la trayectoria del jet.)

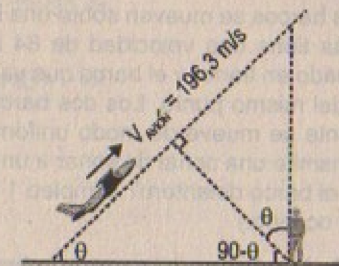


Figura P17.47

Resolución:

$v_{sonido} = 340,0$ m/s

Por sugerencia:

$$DC = d\,\text{sen}\theta$$

$$AD = d\cos\theta = v_{avión} \times t_{AD} \quad \ldots (1)$$

Además: $v_{sonido} \times t_{AD} = \lambda_{onda} = \overline{DC}$

$$\Rightarrow \quad d\,\text{sen}\theta = v_{sonido} \cdot t_{AD} \quad \ldots (2)$$

Dividiendo (2) por (1) resulta que:

$$\frac{d\,\text{sen}\theta}{d\cos\theta} = \frac{v_{sonido} \cdot t_{AD}}{v_{avión} \cdot t_{AD}}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v_{sonido}}{v_{avión}}$$

Luego: $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_{sonido}}{v_{avión}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{340}{196,3}\right) = 60°$

48. Un horno de microondas genera un nivel sonoro de 40,0 dB cuando consume 1,00 kW de potencia. Estime la fracción de esta potencia que se convierte en la energía de las ondas sonoras.

Resolución:

Por dato: $\beta = 40$ dB ; Potencia = $1,00 \times 10^3$ W

Sabemos que: $40 = 10\log\left(\dfrac{I}{I_o}\right)$ $\qquad$ Donde: $I_o = 1,00 \times 10^{-12}$ W/m²

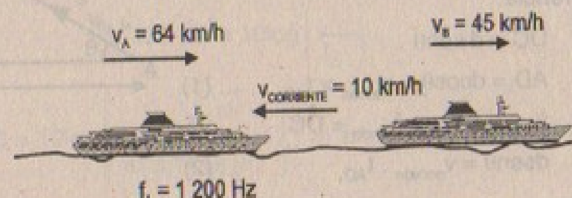
$$\Rightarrow \quad 4 = \log\left(\frac{I}{1,00\times10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad 10^4 = 10^{12} \times I$$

$$\therefore \quad I = 1,00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

49. Dos barcos se mueven sobre una línea en dirección este. La embarcación que viaja atrás tiene una velocidad de 64 km/h, en relación con un punto de observación situado en tierra, y el barco que va adelante tiene una velocidad de 45 km/h respecto del mismo punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve de modo uniforme rumbo al oeste a 10 km/h. El barco de atrás transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200 Hz. ¿Qué frecuencia registra el barco delantero? (Emplee 1 520 m/s como la velocidad del sonido en el agua del océano.)

49A. Dos barcos se mueven sobre una línea en dirección este. La embarcación que va atrás tiene una velocidad de v_1 en relación con un punto de observación situado en tierra, y el barco en la delantera tiene una velocidad $v_2 < v_1$ respecto del mismo punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve de modo uniforme rumbo al oeste a una velocidad v. El barco de atrás transmite una señal de sonar a una frecuencia f. ¿Qué frecuencia registra el barco delantero? (Emplee v_s como la velocidad del sonido en el agua del océano.)

Resolución:



Datos: $v_{\text{sonido en el agua}} = 1\,520$ m/s

Por velocidad relativa: $v_{C/o} + v_{A/c} = v_{A/o}$

$\Rightarrow \quad v_{A/c} = v_{A/o} - v_{c/o} = 64 - 10 = 54$ km/h

Además: $v_{c/o} + v_{B/c} = v_{B/o}$

$\Rightarrow \quad v_{B/c} = v_{B/o} - v_{c/o} = 45 - 10 = 35$ km/h

Luego:
Por efecto Doppler: cuando la fuente (barco A) persigue al observador u oyente (barco B) y están en movimiento, se cumple que:

$$f_B = f_A\left[\frac{v - v_B}{v - v_A}\right] \qquad \text{Donde: } v_{\text{sonido en agua}} = 1\,520 \text{ m/s}$$

$$\text{Entonces} \quad f_B = 1\,200\left[\frac{1500-35}{1520-54}\right] \qquad \therefore \quad f_B = 1\,204 \text{ Hz}$$

50. Considere una onda longitudinal (compresional) de longitud de onda λ viajando con velocidad v a lo largo de la dirección x por un medio de densidad ρ. El desplazamiento de las moléculas del medio a partir de su posición de equilibrio es

$$s = s_{máx}\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Demuestre que la variación de presión en el medio es

$$P = \left(\frac{2\pi\rho v^2}{\lambda}\,s_{máx}\right)\cos(kx - \omega t)$$

Resolución:

Datos: λ, v, ρ

$s(x; t) = s_{máx}\,.\,\text{sen}(kx - \omega t)$

Por demostrar que: $P(x; t) = \left(\frac{2\pi\rho v^2}{\lambda}\,s_{máx}\right)\cos(kx - \omega t)$

Sabemos que $\Delta P_{máx} = \rho\omega v\,s_{máx}$

Pero: $\omega = 2\pi f$

Además $\lambda\,.\,f = v \;\Rightarrow\; f = \frac{v}{\lambda} \qquad \therefore\; \omega = 2\pi \times \frac{v}{\lambda}$

Por lo tanto: $\Delta P_{máx} = \rho\left(2\pi\times\frac{v}{\lambda}\right)v\,s_{máx} = \frac{2\pi}{\lambda}\rho\,v^2\,s_{máx}$

Por otro lado: Como P(x; t) y s(x; t) están en fase $\pi/2$

Entonces: $P(x; t) = \Delta P_{máx}\,.\,\text{sen}(kx - \omega t + \pi/2)$

$\Rightarrow \quad P(x; t) = \Delta P_{máx}\,.\,\cos(kx - \omega t)$

$\therefore \quad P(x; t) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho\,v^2 s_{máx}\right)\cos[kx - \omega t]$ l.q.q.d.

51. Un meteorito del tamaño de un camión entra a la atmósfera de la Tierra a una velocidad de 20 km/s y no disminuye mucho su velocidad antes de entrar al océano. a) ¿Cuál es el ángulo de Mach de la onda de choque desde el meteorito en la atmósfera? (Utilice 331 m/s como la velocidad del sonido.) b) Suponiendo que el meteorito supera el impacto con la superficie del océano, ¿cuál es el ángulo de Mach (inicial) de la onda de choque que el meteorito produce en el agua? (Emplee la velocidad de onda para el agua de mar dada en la tabla 17.1.)

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $\text{sen}\theta = \frac{v}{v_M}$ Donde v = Veloc. sonido = 331 m/s

v_M = Veloc.meteorito

$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \frac{331}{2\times10^4} = 0{,}01655 \;\Rightarrow\; \theta = \text{sen}^{-1}(0{,}01655) = 0{,}948^\circ$

Parte (b)

En el agua $v_{sonido} = 1\,533$ m/s

Entonces: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v_s}{v_M} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1\,533}{2\times10^4} = 0{,}07665$

$\therefore \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}07665) = 4{,}40°$

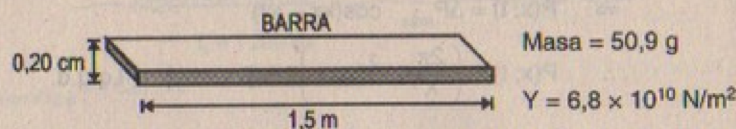
52. En la tarde el nivel sonoro de una vía de alta velocidad con tráfico es de 80 dB con 100 autos que pasan por un punto determinado cada minuto. Más tarde, en la noche, el flujo del tráfico sólo es de cinco autos por minuto. ¿Cuál es el nivel sonoro en la noche?

Resolución :

Si en una vía en la tarde pasan 100 autos por minuto produciendo un nivel sonoro de 80 dB; entonces en la noche en la misma vía, cuando pasen solamente 5 autos x minuto producirán un nivel sonoro de 4 dB.

53. Si se excita apropiadamente es posible producir ondas longitudinales así como transversales en una larga barra metálica. Una barra de cierto metal tiene 150 cm de largo, 0,20 cm de radio y masa igual a 50,9 g. El módulo de Young para el material es de 6,8 × 10¹⁰ N/m². ¿Cuál debe ser la tensión (o comprensión) en la barra si la proporción entre la velocidad de las ondas longitudinales y la de las transversales es 8?

Resolución :



Además: $\dfrac{v_{\text{long (ondas)}}}{v_{\text{trans (ondas)}}} = 8$

Sabemos que $v_{\text{ondas long.(en una barra)}} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{ondas long}} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{6{,}8\times10^{10}}{50{,}9\times10^{-3}}}{\pi\left(0{,}2\times10^{-2}\right)^2\cdot(1{,}5)}} = \sqrt{\dfrac{\left(6{,}8\times10^{10}\right)(\pi)\left(2\times10^{-3}\right)^2(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad v_{\text{ondas long.}} = 5{,}02\times10^3 \text{ m/s}$$

Por otro lado: $v_{\text{ondas trans.}} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{T\times1{,}5}{50{,}9\times10^{-3}}}$

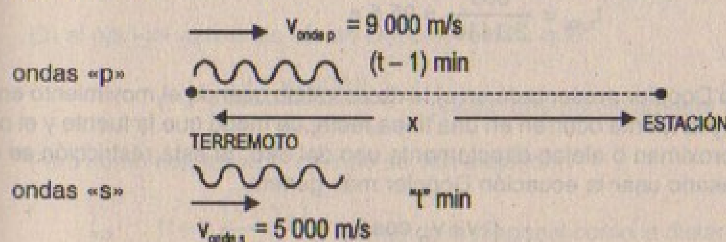
Como: $\dfrac{v_{\text{ondas long.}}}{v_{\text{ondas trans}}} = 8$

$$\frac{\left(6{,}8\times10^{10}\right)(3{,}1416)(4)\left(10^{-6}\right)(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}} = \frac{64\times T\times(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}}$$

$$\therefore \quad T = 1{,}34\times10^4 \text{ N}$$

54. Un terremoto emite tanto ondas P como S que viajan a diferentes velocidades a través de la Tierra. Una onda P viaja a una velocidad de 9 000 m/s y una onda S lo hace a 5 000 m/s. Si las ondas P se reciben en una estación sísmica un minuto después de que llega una onda S, ¿a qué distancia está el epicentro del terremoto?

Resolución :



Por cinemática: $v_p \times (t-1) = x$

$v_s \times t = x \quad \Rightarrow \quad v_p \times t + v_p = v_s \times t$

$\Rightarrow \quad (9\,000)(10t) - 9\,000\,(60) = 5\,000t$

$4\,000t = 9\,000\times60$

$\therefore \quad t = 135 \text{ s}$

Luego $\quad x = v_p \times (t-60) = 9\,000\,(75) = 675 \text{ km}$

En consecuencia: El epicentro estará a 675 km del terremoto.

55. Una sirena crea un nivel sonoro de 60,00 dB a 500,0 m de la bocina. La sirena se alimenta con una batería que entrega una energía total de 1,00 kJ. Suponiendo que la eficiencia de la sirena es 30% (esto es, 30% de la energía suministrada se transforma en energía sonora), determine el tiempo total que la sirena puede sonar.

55 A. Una sirena crea un nivel sonoro β a una distancia d de la bocina. La sirena se alimenta con una batería que entrega una energía total E. Suponiendo que la eficiencia de la sirena es 30% (esto es, 30% de la energía suministrada se transforma en energía sonora), determine el tiempo total que la sirena puede sonar.

Resolución :

Sabemos que: $$60 = 10\log\left[\frac{I}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$$

$\Rightarrow\ 10^6 = I\times10^{12}\ \therefore\ I = 1{,}00\times10^{-6}\ W/m^2$

Luego: $$1{,}00\times10^{-6} = \frac{Potencia}{4\pi\left(r^2\right)} = \frac{Potencia}{4(3{,}1416)(500)^2}$$

$\therefore$ Potencia = 3,1416 Watts

Como: $$3{,}1416\ W = \frac{30}{100}\cdot\frac{\text{Energía total}}{t}$$

Energía total = 1×10^3 J

Entonces: $$t_{total} = \frac{300}{3{,}1416} = 95{,}5\ s$$

56. La ecuación Doppler presentada en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente ocurren en una línea recta, de modo que la fuente y el observador se aproximan o alejan directamente uno del otro. Si esta restricción se elimina, es necesario usar la ecuación Doppler más general.

$$f' = \left(\frac{v+v_0\cos\theta_0}{v-v_s\cos\theta_s}\right)f$$

donde θ_0 y θ_s se definen en la figura P17.56a. a) Si tanto el observador como la fuente se alejan una del otro, demuestre que la ecuación anterior se reduce a la ecuación 17.17 con los signos inferiores. b) Emplee la ecuación anterior para resolver el siguiente problema. Un tren se mueve a una velocidad constante de 25,0 m/s hacia el cruce mostrado en la figura P17.56b. Un carro está detenido cerca del cruce, a 30,0 m de los rieles. Si la bocina del tren emite una frecuencia de 500 Hz, ¿cuál es la frecuencia escuchada por los pasajeros en el auto cuando el tren está a 40,0 m del cruce? Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

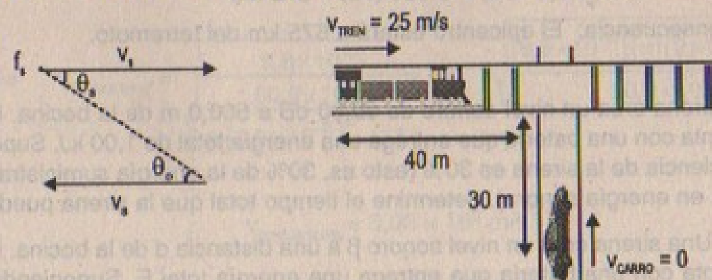


Figura P17.56

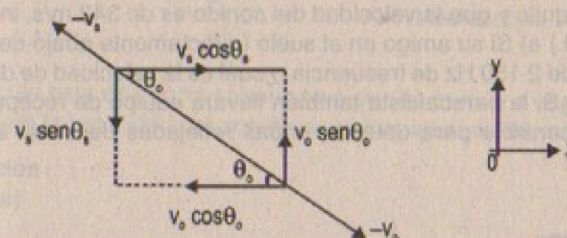
Resolución :

Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

Por demostrar que: $$f' = f\left(\frac{v+v_o\cos\theta_o}{v-v_s\cos\theta_s}\right) = f\left(\frac{v-v_o}{v+v_s}\right)$$

Sea:



En el eje «x» aplicando efecto Doppler resulta que:

$$f' = f\,\frac{(v+v_o\cos\theta_o)}{v-v_s\cos\theta_s}$$ puesto que paralelamente se van acercando

Pero como nos piden f ' cuando se van alejando

$$\Rightarrow\ f' = f\,\frac{(v-v_o)}{v+v_s}$$ (tomando la diagonal como la distancia de alejamiento)

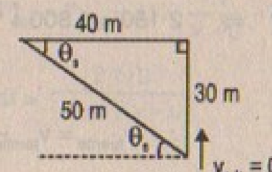
En consecuencia:

$$f' = f\left(\frac{v-v_o}{v+v_s}\right)$$ cuando se alejan l.q.q.d.

Parte (b)

$V_{tren} = 25$ m/s

$f_{tren} = 500$ Hz



Considerar: v = 343 m/s

Entonces: Por fórmula: $$f' = f_{pasajeros(auto)} = f_{tren}\left(\frac{v+v_o\cos\theta_o}{v-v_s\cos\theta_s}\right)$$

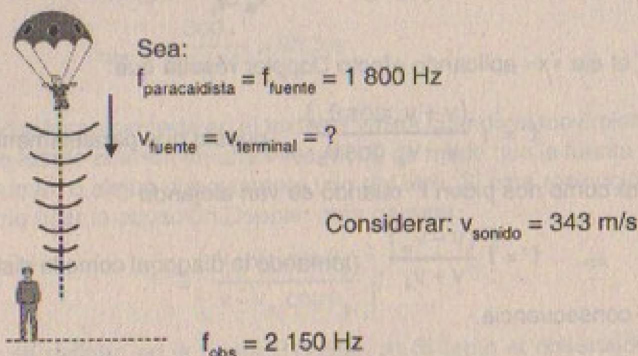
$$\Rightarrow\ f' = 500\left[\frac{343+0}{343-25\left(\frac{40}{50}\right)}\right]$$

$\therefore$ f' = frecuencia escuchada por los pasajeros en el auto = 531 Hz

57. Con el propósito de poder determinar su velocidad, una paracaidista lleva un generador de tonos. Un amigo en el suelo en el sitio de aterrizaje cuenta con equipo para recibir y analizar ondas sonoras. Mientras la paracaidista está cayendo a la velocidad terminal, su generador de tonos emite un tono estable de 1 800 Hz. (Suponga que el aire está tranquilo y que la velocidad del sonido es de 343 m/s, independientemente de la altitud.) a) Si su amigo en el suelo (directamente abajo de la paracaidista) recibe ondas de 2 150 Hz de frecuencia, ¿cuál es la velocidad de descenso de la paracaidista? b) ¿Si la paracaidista también llevara equipo de recepción sonora lo suficientemente sensible para detectar ondas reflejadas desde el suelo, ¿qué frecuencia recibiría?

Resolución:

Parte (a)



Sea:

$f_{paracaidista} = f_{fuente} = 1\,800$ Hz

$v_{fuente} = v_{terminal} = ?$

Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

$f_{obs} = 2\,150$ Hz

Por efecto Doppler: Cuando el paracaidista (fuente) está en movimiento y observador en reposo se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{v_f}{v}}\right) \Rightarrow 2\,150 = 1\,800\left[\frac{1}{1-\frac{v_f}{343}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1\,800}{2\,150} = 1 - v_f/343 \qquad \therefore\ v_{fuente} = v_{terminal} = 55{,}8 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Cuando la fuente está en reposo y observador en movimiento (paracaídas) se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(1+\frac{v_f}{v}\right) \Rightarrow f_{obs} = 2\,150\left(1+\frac{55{,}8}{343}\right)$$

$$\therefore\ f_{observador} = 2\,500 \text{ Hz}$$

58. El silbato de un tren (f = 400 Hz) suena más alto o más bajo de tono dependiendo de si se aproxima o se aleja. a) Demuestre que la diferencia de frecuencia entre el silbato del tren conforme se acerca y se aleja es

$$\Delta f = \frac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}}$$

u = velocidad del tren

v = velocidad del sonido

b) Calcule esta diferencia para un tren que se mueve a una velocidad de 130 km/h. Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s.

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $\Delta f = \dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}}$ Donde: u = velocidad del tren, v = velocidad del sonido

Hallando la f'_{obs} cuando el silbato de un tren se acerca

Entonces: $f'_{obs} = f\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{v}}\right)$ ... (1)

Hallando la f''_{obs} cuando el silbato de un tren se aleja

Entonces: $f''_{obs} = f\left(\dfrac{1}{1+\frac{u}{v}}\right)$ ... (2)

(1) – (2) restando: $f'_{obs} - f''_{obs} = \Delta f = \dfrac{fv}{v-u} - \dfrac{fv}{v+u}$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{2\,fvu}{(v-u)(v+u)}$$

Resulta que: $\Delta f = 2\dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{\left(1-\frac{u}{v}\right)\left(1+\frac{u}{v}\right)} = \dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}}$ l.q.q.d.

Parte (b)

Cuando $v_{tren} = u = 180$ km/h $\equiv 36{,}1$ m/s

v = 340 m/s ; f = 400 Hz

$$\text{Entonces:} \qquad \Delta f = \frac{2(400)\left[\frac{36{,}1}{340}\right]}{1-\left(\frac{36{,}1}{340}\right)^2} \qquad \therefore \quad \Delta f = 85{,}9 \text{ Hz}$$

59. Tres barras metálicas se localizan una respecto de las otras como se indica en la figura P17.59, donde $L_1 + L_2 = L_3$. Los valores de la densidad y del módulo de Young para los tres materiales son $\rho_1 = 2{,}7 \times 10^3$ kg/m³, $Y_1 = 7{,}0 \times 10^{10}$ N/m²; $\rho_2 = 11{,}3 \times 10^3$ kg/m³, $Y_2 = 1{,}6 \times 10^{10}$ N/m²; y $\rho_3 = 8{,}8 \times 10^3$ kg/m³, $Y_3 = 11 \times 10^{10}$ N/m². a) Si $L_3 = 1{,}5$ m, ¿cuál debe ser la proporción L_1/L_2 si una onda sonora recorrerá la longitud de las barras 1 y 2 en el mismo tiempo en que la onda recorre la longitud de la barra 3? b) Si la frecuencia de la fuente es 4,00 kHz, determine la diferencia de fase entre la onda que viaja a lo largo de las barras 1 y 2 y de la que lo hace a lo largo de la barra 3.

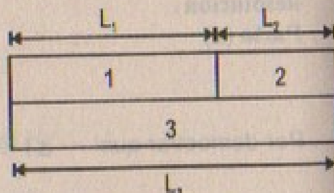


Figura P17.59

Resolución:

Datos: $\rho_1 = 2{,}7 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_1 = 7{,}0 \times 10^{10}$ N/m²

$\rho_2 = 11{,}3 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_2 = 1{,}6 \times 10^{10}$ N/m²

$\rho_3 = 8{,}8 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_3 = 11 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a)

Si: $L_3 = 1{,}5$ m $\qquad L_1/L_2 = ?$ $\qquad$ en un tiempo igual a 3

$$v_3 = \sqrt{\frac{Y_3}{\rho_3}} = \sqrt{\frac{11\times10^{10}}{8{,}8\times10^3}} \qquad \therefore \quad v_3 = 3{,}536 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Entonces: $1{,}5 = 3{,}536 \times 10^3 \cdot t_{total} \qquad \therefore \quad t_{total} = 0{,}424 \times 10^{-3}$ s

Por otro lado: $v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 = 1{,}5$

Además: $t_1 + t_2 = t_{total} = 0{,}424 \times 10^{-3}$ s

$$\text{Luego:} \qquad \sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}} \times t_1 + \sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}} \times t_2 = 1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{7{,}0\times10^{10}}{2{,}7\times10^3}} \times t_1 + \sqrt{\frac{1{,}6\times10^{10}}{11{,}3\times10^3}} \times t_2 = 1{,}5$$

$$\Rightarrow \quad 5{,}092 \times 10^3 \times t_1 + 1{,}189 \times 10^3\, t_2 = 1{,}5 \quad ...(\alpha)$$

Pero: $t_1 + t_2 = 0{,}424 \times 10^{-3} \quad ...(\beta)$

Entonces: desarrollando α y β resulta que:

$t_1 = 0{,}256 \times 10^{-3}$ s $\quad \Rightarrow \quad (5{,}092 \times 10^3)(0{,}256 \times 10^{-3}) = L_1$

$t_2 = 0{,}1678 \times 10^{-3}$ s $\quad \Rightarrow \quad (1{,}189 \times 10^3)(0{,}1678 \times 10^{-3}) = L_2$

$$\text{En consecuencia:} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{1{,}303}{0{,}199} = 6{,}45$$

Parte (b)

Como la onda que viaja a lo largo de las barras 1 y 2 emplea el mismo tiempo, que la onda que viaja por la barra 3,entonces: La llegada de un pulso de onda que vaya por la barra 1 y 2 va a coincidir con la llegada de un pulso de onda que viaje por la barra 3 y en consecuencia la diferencia de fases de dichas ondas será 0°.

60. Un murciélago, que se mueve a 5,00 m/s, está cazando un insecto volador. Si el murciélago emite un chirrido de 40,0 kHz y recibe de regreso un eco a 40,4 kHz, ¿a qué velocidad se acerca o se aleja el insecto del murciélago? (Tome la velocidad del sonido en el aire igual a v = 340 m/s.)

Resolución:

Datos: $v_{murciélago} = 5{,}00$ m/s ; $\quad v_{insecto} = ?$

$f_{murciélago} = 40{,}0 \times 10^3$ Hz ; $\quad f_{obs.} = 40{,}4 \times 10^3$ Hz

Por efecto Doppler: cuando la fuente (murciélago) persigue al observador (insecto), ambos en movimiento; entonces se cumple:

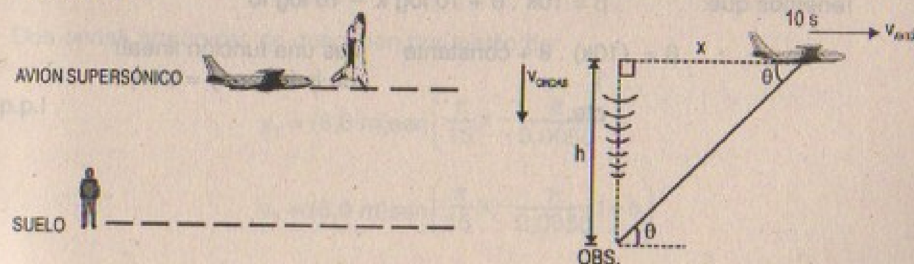
$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{v + v_I}{v - v_f}\right) \qquad \text{donde: } v = 340 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad 40{,}4 \times 10^3 = 40 \times 10^3\left(\frac{340 + v_I}{340 - 5}\right) \qquad \therefore \quad v_{insecto} = -1{,}65 \text{ m/s}$$

Esto quiere decir que el insecto se acerca a 1,65 m/s.

61. Un avión supersónico vuela paralelo al suelo. Cuando el avión está directamente arriba, un observador ve que se lanza un cohete desde la aeronave. Diez segundos después el observador escucha la explosión sónica, seguida 2,8 s después por el sonido del motor del cohete. ¿Cuál es el número de Mach del avión?

Resolución:



Del gráfico: $\tan\theta = \frac{h}{x} = \frac{v_{\text{sonido explosión}}\times(10) + v_{\text{sonido motor}}\times(2,8)}{v_{\text{avión}}\times(10)}$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v_{\text{sonido}}(12,8)}{v_{\text{avión}}(10)}$

Como: $\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{v_{\text{avión}}}$

$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{12,8}{10}\right) \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{10}{12,8} \quad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{12,8}\right) = 38,6°$

En consecuencia:

El n.° de Match del avión será = $\frac{v_{\text{avión}}}{v} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{0,6242} = 1,60$

62. El botón del volumen de un radio tiene lo que se conoce como una «graduación logarítmica». El dispositivo eléctrico conectado al botón (llamado potenciómetro) tiene una resistencia R cuyo logaritmo es proporcional a la posición angular del botón: esto es, log R α θ. Si la intensidad del sonido I (en W/m^2) producida por el altavoz es proporcional a la resistencia R, demuestre que el nivel de sonido β (en dB) es una función lineal de θ.

Resolución:

Sabemos que: (por dato) $\log(R) = k.\theta$

Además: $I = R.k'$

Entonces: $\log I = \log R + \log k'$

$\Rightarrow \quad 10 \log I = 10k\theta + 10.\log k' \quad ... (1)$

Pero: $\beta = 10.\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$

$\Rightarrow \quad \beta = 10 \log I - \underbrace{10 \log I_o}_{\text{constante}} \quad ... (2)$

Entonces (1) en (2)

Tenemos que: $\beta = 10k . \theta + 10 \log k' - 10 \log Io$

$\therefore \quad \beta = \underset{\text{cte.}}{\underset{\uparrow}{(10k)}} . \theta + \text{constante}$ (es una función lineal) de la forma: y = ax + b

l.q.q.d.

Capítulo 18

SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS

SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIA DE ONDAS SENOIDALES

1. Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$y_1 = (5,0\text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t)]$$
$$y_2 = (5,0\text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t - 0,25)]$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y *t* en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante? b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

Resolución:

$$y_1(x;t) = (5,0\text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t)]$$
$$y_2(x;t) = (5,0\text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t - 0,25)]$$

Parte (a)

$y_{\text{resultante}} = y_1 + y_2$

Entonces: recordando: $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\frac{(\alpha+\beta)}{2}.\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

Entonces: $y_1 + y_2 = (5,0\text{ m})\left[2\cos\left[\frac{0,25\pi}{2}\right].\operatorname{sen}\left[\pi(4,0x - 1\,200t) - \frac{\pi}{2}(0,25)\right]\right]$

En consecuencia: $y_{\text{resultante}} = (10,00\text{ m})\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\operatorname{sen}\left(4,0\pi x - 1\,200\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$

Donde: Amplitud = $(10,00\text{ m})\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = (10,00)(0,924) = 9,24$ m

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = 1\,200\,\pi = 2\pi f$

$\Rightarrow \quad f = \frac{1\,200\pi}{2\pi} = 600$ Hz

2. Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$y_1 = (6,0\text{ m})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0,0050}t\right)$$

$$y_2 = (6,0\text{ m})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0,0050}t - \phi\right)$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y *t* en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante cuando $\phi = (\pi/6)$ rad? b) ¿Para qué valores de ϕ la amplitud de la onda resultante tendrá su valor máximo?

Resolución:

$$y_1\,(x;\,t) = (6{,}0\text{ m})\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t\right)$$

$$y_2\,(x;\,t) = (6{,}0\text{ m})\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t - \phi\right)$$

Parte (a) $y_{resultante} = y_1 + y_2$

Entonces: $y_1 + y_2 = (6{,}0\text{ m})\left[2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t - \frac{\phi}{2}\right)$

Donde: Amplitud $= (12{,}0\text{ m})\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$

Entonces: Para: $\phi = \pi/6$

$$\text{Amplitud} = (12{,}0\text{ m})\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 11{,}6\text{ m}$$

Parte (b)

Si la amplitud es máxima, entonces:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \quad \therefore \quad \frac{\theta}{2} = k\pi\,; \quad k = 0;1;2;...$$

3. Dos ondas armónicas idénticas con longitudes de onda de 3,0 m viajan en la misma dirección a una velocidad de 2,0 m/s. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primera, pero a un tiempo posterior. Determine el mínimo intervalo de tiempo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de las dos ondas iniciales.

3A. Dos ondas armónicas idénticas con longitudes de onda λ viajan en la misma dirección a una velocidad *v*. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primera, pero a un tiempo posterior. Determine el mínimo intervalo de tiempo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de las dos ondas iniciales.

Resolución:

Por dato: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3{,}0$ m

$v_1 = v_2 = 2{,}0$ m

$A_1 = A_2 = A_{result.} = A$

Entonces: $2{,}0 = 3f \Rightarrow \frac{2}{3} = f \quad \therefore \quad \omega = \frac{4\pi}{3}$ rad/s

Luego: $y_1(x;\,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$y_2(x;\,t) = A.\text{sen}(kx - \omega t - \phi)$

Pero $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{3}$

Luego: $y_1\,(x;\,t) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t\right)$

$y_2\,(x;\,t) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t - \phi\right)$

Entonces: $y_{result} = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t - \frac{\phi}{2}\right]$

Pero por dato: $2A\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = A \Rightarrow \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0{,}5 \quad \therefore \quad \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{3}$rad

Luego: $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}t \quad \therefore \quad t_{mínimo} = 0{,}59$

4. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Están localizados sobre un poste vertical a una distancia de 4,00 m uno del otro. Un hombre camina hacia uno de los altavoces en una dirección perpendicular al poste como se indica en la figura P18.4. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad sonora, y b) a qué distancia se encuentra él de la pared en estos momentos? Considere la velocidad del sonido igual a 330 m/s e ignore toda reflexión de sonido proveniente del piso.

4A. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador de frecuencia *f*. Están localizados sobre un poste vertical a una distancia *d* uno del otro. Un hombre camina hacia uno de los altavoces en una dirección perpendicular al poste como se indica en la figura P18.4. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad sonora, y b) a qué distancia se encuentra él de la pared en estos momentos? Considere la velocidad del sonido igual a *v* e ignore toda reflexión de sonido proveniente del piso.

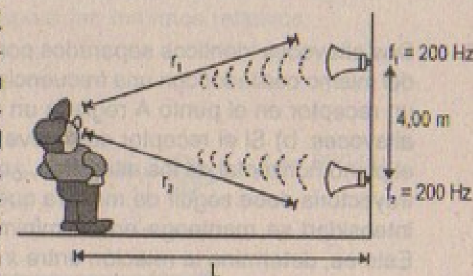


Figura P18.4

Resolución:

Considera: $v_{sonido} = 330$ m/s

Parte (a)

El primer mínimo de intensidad sonora ocurrirá cuando las ondas que llegan al ob-

servador estén 180° fuera de base, esto quiere decir que se tiene que cumplir:

$$|r_1 - r_2| = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 1;\ 3;\ 5\ ...$$

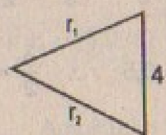
En consecuencia se escucharán: $\frac{n}{2}\left[\frac{330}{200}\right]$ veces en la intensidad sonora.

Parte (b)

Como el primer mínimo lo escucha cuando:

$$|r_1 - r_2| = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{330}{200}\right) = 0{,}825 \text{ m}$$

Entonces por teorema: (desigualdad triangular)

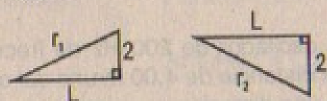


$$|r_1 - r_2| < 4 < |r_1 + r_2|$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}825 < 4 < r_1 + r_2$$

$$\therefore \quad r_1 + r_2 \text{ mínimo} = 4{,}1 \text{ m}$$

Luego:



como $r_1 + r_2 = 4{,}1$

$\wedge \quad r_1 - r_2 = 0{,}825$

$\therefore \quad r_1 = 1{,}69 \text{ m} \wedge r_2 = 2{,}41 \text{ m}$

En consecuencia:

Por Pitágoras: $L^2 = 4 - r_1^2$

$\Rightarrow \quad L^2 = 4 - (1{,}69)^2 \qquad \therefore \quad L_{máximo} \text{ (se acerca)} = 1{,}07 \text{ m}$

5. Dos altavoces idénticos separados por una distancia de 10,0 m se excitan por medio del mismo oscilador con una frecuencia de $f = 21{,}5$ Hz (fig. P18.5). a) Explique por qué un receptor en el punto A registra un mínimo en la intensidad sonora de estos dos altavoces. b) Si el receptor se mueve en el plano horizontal de los altavoces, ¿qué trayectoria debe seguir de manera que la intensidad se mantenga en un mínimo? Esto es, determine la relación entre x y y (las coordenadas del receptor) que provoca que el receptor registre un mínimo en la intensidad sonora. Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

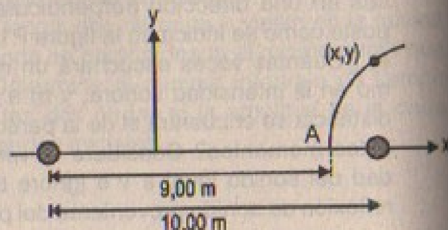


Figura P18.5

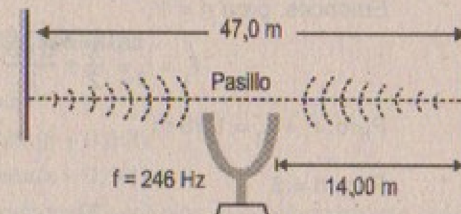
Datos incorrectos.

6. Un diapasón genera ondas sonoras con una frecuencia de 246 Hz. Las ondas viajan en direcciones opuestas a lo largo de un pasillo, se reflejan en las paredes y regresan. ¿Cuál es la diferencia de fase entre las ondas reflejadas cuando se encuentran? El corredor mide 47 m de largo y el diapasón se localiza a 14 m de un extremo. La velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

Resolución:

Considerar:

$v_{sonido} = 343$ m/s



Sabemos que: $\Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$

Sea: $r_1 = 14{,}00$ m $\Rightarrow$ $r_2 = 33$ m

Luego: $\Delta r = |r_2 - r_1| = \frac{\lambda}{2\pi}\phi \Rightarrow 33 - 14 = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$ ... (1)

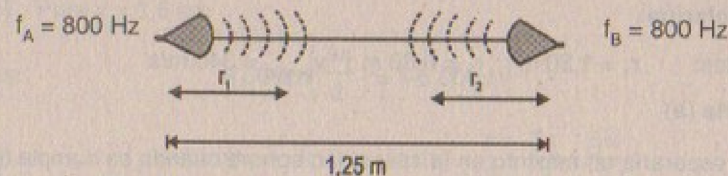
Por otro lado:

Sabemos que: $v_{sonido} = f\lambda \Rightarrow 343 = 246\,\lambda \qquad \therefore \quad \lambda = 1{,}39$ m

En consecuencia de (1): $19 = \frac{1{,}39}{2(3{,}1416)}\phi \qquad \therefore \quad \phi = 85{,}8$ rad

7. Dos altavoces se excitan por medio de un oscilador común a 800 Hz y se ponen uno en frente al otro a una distancia de 1,25 m. Localice los puntos a lo lago de una línea que una los dos altavoces donde se esperarían mínimos relativos. (Considere $v = 343$ m/s).

Resolución:



Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

Sabemos que: $v_{sonido} = f\,\lambda$

$\Rightarrow \quad 343 = 800\,\lambda \qquad \therefore \quad \lambda = 0{,}43$ m

Por otro lado:
Se esperarían mínimos de intensidad sonora cuando se cumpla que

$$|r_1 - r_2| = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 1;\ 3;\ 5\ ...$$

- Entonces: para n = 1

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} = \frac{0,43}{2} = 0,215 \text{ m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1,25$ m $\quad\therefore\quad r_1 = 0,7325$ m

- Para n = 3

$$r_1 - r_2 = \frac{3\lambda}{2} = 3(0,215) = 0,645 \text{ m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1,25$ m $\quad\therefore\quad r_1 = 0,9475$ m

- Para n = 5

$$r_1 - r_2 = \frac{5\lambda}{2} = 5(0,215) = 1,075 \text{ m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1,25$ m $\quad\therefore\quad r_1 = 1,1625$ m

En consecuencia los puntos serán:

0,7325 m; 0,9475 m; 1,1625 m

8. Para el arreglo que se muestra en la figura 18.2, haga la longitud de la trayectoria $r_1 = 1,20$ m y la longitud de la trayectoria $r_2 = 0,80$ m. a) Calcule las tres frecuencias más bajas del altavoz que darían como resultado una intensidad máxima en el receptor. b) ¿Cuál es la frecuencia más alta dentro del intervalo audible (20-20 000 Hz) que produciría un mínimo en el receptor? (Considere $v = 340$ m/s).

Resolución:

Datos: $r_1 = 1,20$ m ; $r_2 = 0,80$ m ; $v_{sonido} = 340$ m/s

Parte (a)

Se esperaría un máximo en la intensidad sonora cuando se cumpla que:

$$|r_1 - r_2| = n\lambda \qquad \text{para } n = 0;\ 1;\ 2;\ ...$$

Entonces: para n = 1 $\qquad \lambda = 0,4$ m $\quad\therefore\quad f_1 = \frac{340}{0,4} = 850$ Hz

Para: n = 2 $\qquad \lambda = 0,8$ m entonces: $\qquad f_2 = 340/0,8 = 425$ Hz

Para: n = 3 $\qquad \lambda = 1,2$ m entonces: $\qquad f_3 = 340/1,2 = 283,3$ Hz

Parte (b)

Nos piden $\qquad 20 \text{ Hz} < f < 20\,000 \text{ Hz} \qquad$ para n = 1; 3; 5...

Entonces: $\qquad 20 < 2\,v_{sonido}/0,4n < 20\,000 \Rightarrow 0,0425 \times 2 < n < 42,5 \times 2$

Por lo tanto: $\qquad f(1) = 340/0,4(1) \Rightarrow f(1) = 1\,700$ Hz

ONDAS ESTACIONARIAS

9. Dos ondas armónicas se describen por:

$$y_1 = (3,0 \text{ cm})\text{sen}\pi(x + 0,60t)$$
$$y_2 = (3,0 \text{ cm})\text{sen}\pi(x - 0,60t)$$

donde *x* está en centímetros y *t* en segundos. Determine el desplazamiento *máximo* del movimiento en a) x = 0,25 cm, b) x = 0,50 cm, y c) x = 1,5 cm. d) Encuentre los tres valores más pequeños de x correspondientes a los antinodos.

Resolución:

Parte (a)

$$y_1 + y_2 = (3,0 \text{ cm})[\text{sen}(\pi x)\cos(\pi(0,6)t) + \cos(\pi x)\text{sen}(\pi(0,6)t) + \text{sen}(\pi x)\cos(\pi(0,6)t) - \text{sen}(\pi(0,6)t)\cos(\pi x)]$$

$$\therefore\quad y_1 + y_2 = [(2)(3,0 \text{ cm})\text{sen}(\pi x)]\cos\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$$

Donde: $\qquad 6,00\text{sen}(\pi x)$ = Amplitud máxima

Entonces el desplazamiento máximo para x = 0,25 cm será:

$$(6,00 \text{ cm})\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4,24 \text{ cm}$$

Parte (b) Para x = 0,50 cm

Entonces: $\qquad 6,00\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6,00$ cm

Parte (c) Para x = 1,5 cm

Entonces: $\qquad 6,00\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = |-6,00 \text{ cm}|$

Parte (d) $\qquad \text{sen}(\pi x) = \frac{\pi}{2}k \Rightarrow \pi(x) = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}$

$\therefore\quad x = 0,5$ cm ; x = 1,50 cm ; x = 2,25 cm

10. Utilice la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\text{sen}\,b$$

para demostrar que la resultante de dos funciones de onda cada una de amplitud A_0, frecuencia angular ω y número de propagación *k* y que viajan en direcciones

opuestas puede expresarse como:

$$y = (2A_0 \text{senkx})\cos\omega t$$

Resolución :

Datos: A_0, ω, k

Por demostrar que: $y = 2A_0\text{sen}(kx)\cos\omega t$

Sea: $y_1 = A_0\ \text{sen}(kx - \omega t)\ \rightarrow$

$y_2 = A_0\ \text{sen}(kx + \omega t)\ \leftarrow$

Entonces: aplicando la sugerencia

$$y = y_1 + y_2 = A_0\ [\text{sen}(kx)\cos(\omega t) - \text{sen}(\omega t)\cos(kx) + \text{sen}(kx)\cos(\omega t) + \text{sen}(\omega t)\cos(kx)]$$

$$\therefore\quad y = 2A_0\text{sen}(kx)\cos(\omega t) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

11. La función de onda para una onda estacionaria en una cuerda es

$$y = (0{,}30\ \text{m})\text{sen}(0{,}25\ x)\cos(120\ \pi t)$$

donde x está en metros y *t* en segundos. Determine la longitud de onda y la frecuencia de las ondas viajeras que interfieren.

Resolución :

$$y = (0{,}30\ \text{m})\text{sen}(0{,}25x)[\cos(120\pi t)]$$

Sabemos que: $0{,}25 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi = 25{,}1\ \text{m}$

Por otro lado: $120\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 60\ \text{Hz}$

12. Dos ondas armónicas que se propagan en direcciones opuestas interfieren para producir una onda estacionaria descrita por

$$y = (1{,}50\ \text{m})\text{sen}(0{,}400\ x)\cos(200t)$$

donde x está en metros y *t* en segundos. Determine la longitud, frecuencia y velocidad de las ondas que interfieren.

Resolución :

$$y = (1{,}50\ \text{m})\text{sen}(0{,}400x)\cos(200t)$$

$$0{,}400 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad\Rightarrow\quad \lambda = 5\pi = 15{,}7\ \text{m}$$

$$200 = 2\pi f \quad\Rightarrow\quad f = \frac{100}{\pi} \quad\therefore\quad f = 31{,}8\ \text{Hz}$$

En consecuencia: $v_{ondas} = \lambda f = (15{,}7)(31{,}8) \quad\therefore\quad v_{ondas} = 499{,}26\ \text{m/s}$

13. Una onda estacionaria se forma por medio de la interferencia de dos ondas viajeras, cada una de las cuales tiene una amplitud $A = \pi$ cm, número de onda angular $k = (\pi/2)\ \text{cm}^{-1}$ y frecuencia angular $\omega = 10\pi$ rad/s. a) Calcule la distancia entre los dos primeros antinodos. b) ¿Cuál es la amplitud de la onda estacionaria en x = 0,25 cm?

Resolución :

Datos: $A = \pi\ \text{cm}$; $k = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\text{cm}}$; $\omega = 10\pi\ \text{rad/s}$

Parte (a)

Sabemos que: Amplitud máxima = 2Asen(kx)

Entonces: $\text{sen}(kx) = 1 \quad\Rightarrow\quad kx = \frac{\pi}{2}k \quad (k = 1;\ 3;\ 5...)$

Para el primer antinodo k = 1

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} \quad\therefore\quad x = 1{,}0\ \text{cm}$$

Para el segundo antinodo k = 3

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2}x = \frac{3\pi}{2} \quad\therefore\quad x = 3{,}0\ \text{cm}$$

Parte (b)

Sabemos que: Amplitud = 2Asen(kx)

Entonces para x = 0,25 cm

$$\text{Amplitud} = 2(\pi)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(0{,}25)\right) \quad\Rightarrow\quad \text{Amplitud} = 2(3{,}1416)\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore\quad \text{Amplitud} = 2{,}4\ \text{cm}$$

14. Verifique por sustitución directa que la función de onda de una onda estacionaria dada en la ecuación 18.3,

$$y = 2A_0\ \text{sen}\ kx\cos\omega t$$

es una solución de la ecuación de onda general, ecuación 16.26:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Resolución :

Por demostrar que: $y = 2A_0\ \text{sen}(kx).\cos(\omega t)$

Es solución de: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ... (1)

Por sustitución directa: $\frac{\partial y}{\partial x} = (2A_0 k)\cos(\omega t)\cos(kx)$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -2\ A_0 k^2\cos(\omega t)\ [\text{sen}(kx)] \qquad ...\ (2)$$

Por otro lado: $\frac{\partial y}{\partial t} = -2\ A_0\ (\omega)\text{sen}(kx)\ \text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\,A_o\,\omega^2\,\text{sen}(kx)\cos(wt) \quad \dots (3)$$

Entonces reemplazando (2) y (3) en (1):

$$-2\,A_o k^2 \cos(\omega t)(\text{sen}(kx)) = -2\,A_o \omega^2\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = (2\pi f)^2 \quad \therefore \quad 4\pi^2 = 4\pi^2 v^2$$

En consecuencia: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ l.q.q.d.

15. Dos ondas dadas por $y_1(x, t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$ y $y_2(x, t) = A\text{sen}(2kx + \omega t)$ interfieren. a) Determine todos los valores x donde haya nodos estacionarios. b) Determine todos los valores x donde haya nodos que dependan del tiempo *t*.

Resolución:

Datos: $y_1(x; t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$y_2(x; t) = A\text{sen}(2kx + \omega t)$

Parte (a)

Sumando: $y_1 + y_2 = y$

$$\Rightarrow \quad y = A[\text{sen}(kx)\cos(\omega t) - \text{sen}(\omega t)\cos(kx) + \text{sen}(2kx)\cos(\omega t) + \cos(2kx)\,\text{sen}(\omega t)]$$

Pero además: recordando $\text{sen}(a) + \text{sen}(b) = 2\,\text{sen}\dfrac{(a+b)}{2}\cos\dfrac{(a-b)}{2}$

Entonces: $y = 2\text{sen}\left(\dfrac{3kx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{kx}{2} + \omega t\right)$

Luego: $\text{Amplitud} = 2\text{sen}\left(\dfrac{3kx}{2}\right)$

Para que existan nodos se tiene que cumplir que:

$$2\text{sen}\left(\frac{3kx}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3kx}{2} = +\pi;\ 2\pi \quad \therefore \quad x = \pm\frac{2\pi}{3k}\ ;\ \pm\frac{4\pi}{3k}$$

Parte (b)

Para que existan nodos que dependan del tiempo se tiene que cumplir que:

$$2\cos\left(\frac{kx}{2} + \omega t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kx}{2} + \omega t = \pm\frac{\pi}{2}\ ;\ \pm\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{\pi - 2\omega t}{k} \quad \text{o} \quad x = \pm\frac{3\pi - 2\omega t}{k}$$

16. Dos ondas en una larga cuerda están dadas por

$$y_1 = (0{,}015\text{ m})\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right) \qquad y_2 = (0{,}015\text{ m})\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

donde las *x* e *y* están en metros y t en segundos. a) Determine la posición de los nodos de la onda estacionaria resultante. b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo en la posición x = 0,40 m?

Resolución:

Parte (a)

$$y_1 + y_2 = y_{result} = (0{,}015)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(40t) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}(40t) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(40t) - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}(40t)\right]$$

$$\therefore \quad y_{result} = (0{,}03\text{ m})\cos\frac{x}{2}\cos(40t)$$

Entonces la posición de los nodos se encontrarán cuando:

$$(0{,}03\text{ m})\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2}\ ;\ \pm\frac{3\pi}{2} \quad \therefore \ x = \pm\pi \quad \text{o} \quad x = \pm 3\pi$$

Parte (b)

Sabemos: $\text{Amplitud} = (0{,}03)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Entonces para x = 0,40 m

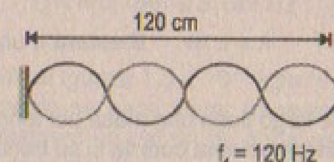
Amplitud máxima = (0,03)cos[0,2 rad]

$\therefore$ Amplitud máxima $= y_{máx} = 0{,}029$ m

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

17. Una onda estacionaria se establece en una cuerda fija de 120 cm de largo en ambos extremos. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se excita a 120 Hz. a) Determine la longitud de onda. b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

Resolución:



n.° de antinodos = 4

Parte (a)

Sabemos que distancia de nodo a nodo = $\frac{\lambda}{2}$

Entonces: $4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 120 \text{ cm} \qquad \therefore \quad \lambda = 60{,}00 \text{ cm}$

Parte (b)

Por dato: $f(4) = 120 \text{ Hz}$

$\Rightarrow \quad f(4) = 4f_1 \qquad \Rightarrow \quad 120 = 4f_1 \qquad \therefore \quad f_1 = 30 \text{ Hz}$

18. Una cuerda alargada tiene 160 cm de largo y una densidad lineal de 0,015 g/cm. ¿Qué tensión en la cuerda producirá un segundo armónico de 460 Hz?

Resolución:

Datos: $L_{cuerda} = 160 \text{ cm} \qquad m = 0{,}015 \text{ g/cm}$

$f_2 = 460 \text{ Hz} \qquad T = ?$

Sabemos que: $f_2 = \frac{2}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$\Rightarrow \quad (460)^2\,(1{,}6)^2\,(0{,}015)10^3 \times 10^2 = T$

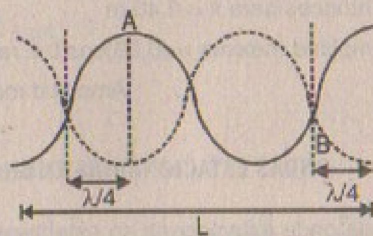
$\therefore \quad T = 812{,}5 \text{ N}$

19. Considere la cuerda de longitud *L* de una guitarra afinada. ¿En qué punto a lo largo de la cuerda (fracción de la longitud desde un extremo) debe pulsarse y en qué punto debe mantenerse el dedo ligeramente contra la cuerda de manera que el segundo armónico sea el modo de vibración más prominente?

Resolución:

A: Es el punto donde debe pulsarse la cuerda.

B: Es el punto donde debe mantenerse el dedo, para que solamente el segundo armónico sea el nodo de vibración más prominente.



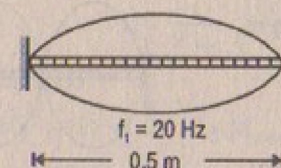
Entonces: Como: $\lambda = L \Rightarrow$ A estará a una distancia $\frac{L}{4}$

Como: $\lambda = L \Rightarrow$ B estará a una distancia $\frac{2\lambda}{4} \equiv \frac{L}{2}$

20. Una cuerda de 50 cm de largo tiene una masa por longitud unitaria de 20×10^{-5} kg/m. ¿A qué tensión debe alargarse esta cuerda si su frecuencia fundamental va a ser a) 20 Hz y b) 4 500 Hz?

Resolución:

Parte (a)



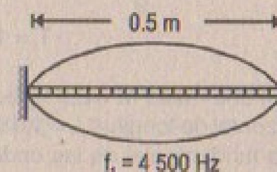
$\mu = 20 \times 10^{-5}$ kg/m

Entonces: $20 = \frac{1}{2(0{,}5)} \times \sqrt{\frac{T}{2\times10^{-4}}}$

$\Rightarrow \quad (20)^2 \times (2 \times 10^{-4}) = T \qquad \therefore \quad T = 0{,}08 \text{ N}$

Parte (b)

Entonces:



$4\,500 = \frac{1}{2(0{,}5)} \times \sqrt{\frac{T}{2\times10^{-4}}}$

$\Rightarrow \quad (4\,500)^2 \times 2 \times 10^{-4} = T$

$\therefore \quad T = 4\,050 \text{ N}$

21. Encuentre la frecuencia fundamental y las siguientes tres frecuencias que podrían ocasionar un patrón de ondas estacionarias en una cuerda de 30 m de largo, con una masa por unidad de longitud de $9{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m y alargada hasta una tensión de 20 N.

Resolución:

Datos: long. cuerda = 30 m ; $T = 20 \text{ N}$

$\mu = 9{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m ; $f_1 = ?\,;\ f_2 = ?\,;\ f_3 = ?\,;\ f_4 = ?$

$f_1 = \frac{1}{2L}\times\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2(30)} \times \sqrt{\frac{20}{9{,}0\times10^{-3}}} \qquad \therefore \quad f_1 = 0{,}786 \text{ Hz}$

Luego: $f_2 = 2 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_2 = 2(0{,}786) = 1{,}57 \text{ Hz}$

$f_3 = 3 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_3 = 3(0{,}786) = 2{,}357 \text{ Hz}$

$f_4 = 4 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_4 = 4(0{,}786) = 3{,}143 \text{ Hz}$

22. Una cuerda de densidad lineal igual a $1{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m y de 3,0 m de largo se estira entre dos puntos. Un extremo se hace vibrar transversalmente a 200 Hz. ¿Qué tensión en la cuerda establecerá un patrón de onda estacionaria con tres medias ondas en toda la longitud de la cuerda?

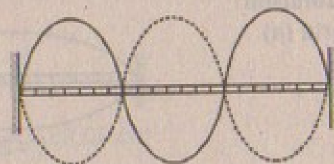
Resolución :

Datos: $\mu_{(cuerda)} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m

$L_{cuerda} = 3{,}0$ m

$f = 200$ Hz

$T = ?$



$$f_3 = 3f_1 = 3(200) \;\therefore\; f_3 = 600 \text{ Hz}$$

Luego:
$$f_3 = 600 = \frac{3}{2(3{,}0)} \times \sqrt{\frac{T}{1{,}0\times 10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{(600)^2 \times (2)^2 \times (3{,}0)^2}{9} \times 1{,}0 \times 10^{-3} = T$$

$$\therefore \quad T = 1\,440 \text{ N}$$

23. Una esfera con una masa $M = 2{,}0$ kg está sostenida por una cuerda que pasa sobre una barra horizontal de longitud $L = 1{,}0$ m (Fig. P18.23). Dado que el ángulo es $\theta = 35°$ y la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la cuerda es $f = 50{,}0$ Hz, determine la masa de la cuerda.

23A. Una esfera con una masa *M* está sostenida por una cuerda que pasa sobre una barra horizontal de longitud *L*. (Fig. P18.23). Dado que el ángulo es θ y la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la cuerda es *f*, determine la masa de la cuerda.

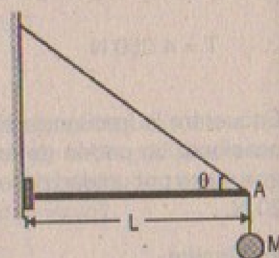


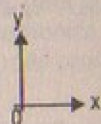
Figura P18.23

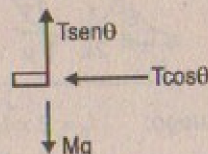
Resolución :

$f_1 = 50{,}0$ Hz ; $M = 2{,}00$ kg

$L = 1{,}0$ m ; $\theta = 35°$

D.C.L. en «A» de la barra





$$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}\theta = Mg \quad \therefore \quad T = \frac{Mg}{\text{sen}\,\theta} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado:
Cuando la onda estacionaria se transmite a través de la cuerda (esto quiere decir que se propaga tanto en el eje x como en el eje y); luego por la frecuencia fundamental:

En el eje «x»
$$f_1 = \frac{1}{2\,L_c}\sqrt{\frac{T\cos\theta \times L_{cuerda}}{M_{cuerda}}}$$

Entonces: reemplazando:

$$(50)^2 \times (2)^2\,(1{,}0 \text{ m})^2 \times M_{cuerda} = T\cos\theta \times (1{,}0)$$

$$\Rightarrow \quad 10^4 \times M_{cuerda} = Mg\cot\theta \times (1) \;\Rightarrow\; 10^4 \times M_{cuerda} = (9{,}8)(2)\cot(35°)$$

$$\Rightarrow \quad 10^4 \times M_{cuerda} = (2)(9{,}8)\,\frac{1}{\tan 35°} \qquad \therefore \quad M_{cuerda} = 2{,}8 \text{ g}$$

24. Un alambre de 2,0 m de largo y una masa de 0,10 kg está fijo en ambos extremos. La tensión en el alambre se mantiene en 20 N. Se observa un nodo en un punto a 0,40 m de un extremo. ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros tres modos de vibración permitidos?

Resolución :

Datos: long. alambre = 2,0 m

Masa de un alambre = 0,10 kg

T = 20,0 N

$$f_1 = \frac{1}{2(2)} \times \sqrt{\frac{(20)(2)}{0{,}10}} \qquad \therefore \quad f_1 = 5{,}00 \text{ Hz}$$

Luego:
$$f_2 = 2 \times f_1 \;\Rightarrow\; f_2 = 2(5{,}00) \qquad \therefore \quad f_2 = 10{,}00 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \times f_1 \;\Rightarrow\; f_3 = 3(5{,}00) \qquad \therefore \quad f_3 = 15{,}00 \text{ Hz}$$

25. La cuerda La de un chelo vibra en su modo fundamental con una frecuencia de 220 vibraciones/s. El segmento en vibración es de 70 cm de largo y tiene una masa de 1,2 g. a) Encuentre la tensión en la cuerda. b) Determine la frecuencia del armónico que hace que la cuerda vibre en tres segmentos.

Resolución :

Datos: $f_1 = 220$ Hz ; $L = 0{,}7$ m

Masa $= 1{,}2 \times 10^{-3}$ kg

Parte (a)

Sabemos que:
$$f_1 = \frac{1}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(220)^2 \times (4)(0{,}7)^2 \times 1{,}2\times 10^{-3}}{(0{,}7)} = T$$

$$\therefore \quad T_{cuerda} = 163 \text{ N}$$

Parte (b)

Nos piden f_3
$$\Rightarrow \quad f_3 = \frac{3}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f_3 = \frac{3}{2(0{,}7)} \times \sqrt{\frac{(163)(0{,}7)}{1{,}2\times 10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad f_3 = 660 \text{ Hz}$$

26. En el arreglo mostrado en la figura P18.26 puede colgarse una masa de una cuerda (con una densidad de masa lineal $\mu = 0{,}0020$ kg/m) alrededor de una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante, f), y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2{,}0$ m. Cuando la masa m es de 16 kg o de 25 kg, se observan ondas estacionarias, pero no se observan ese tipo de ondas para cualesquiera otras masas entre estos valores. a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? (*Sugerencia*: A mayor tensión en la cuerda, menor número de nodos en la onda estacionaria). b) ¿Cuál es la masa más grande para la cual podrían observarse ondas estacionarias?

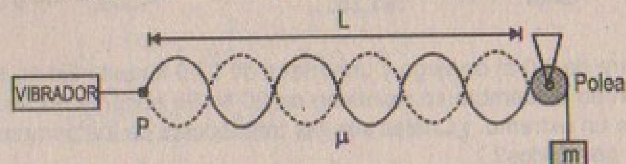


Figura P18.26

Resolución:

Datos: $\mu = 0{,}0020$ kg/m
$L = 2{,}0$ m

Parte (a)

Si: m = 16 kg entonces el n.° de antinodos es máximo e igual a 1.

Luego:



$\therefore \quad T = (16)(9{,}8) = 156{,}8$ N

Luego: $f_1 = \dfrac{1}{2(2)} \times \sqrt{\dfrac{156{,}8}{0{,}0020}} \quad \therefore \quad f_1 = 70$ Hz

Si: m = 25 kg entonces el # de antinodos es mínimo e igual a 1.

Luego:



$\therefore \quad T = (25)(9{,}8) = 245$ N

Entonces: $f_1 = \dfrac{1}{2(2)} \times \sqrt{\dfrac{245}{0{,}0020}} \quad \therefore \quad f_1 = 87{,}5$ Hz

27. Una cuerda de guitarra de 60 cm bajo una tensión de 50 N tiene una masa por unidad de longitud de 0,10 g/cm. ¿Cuál es la frecuencia resonante más alta que puede escuchar una persona capaz de oír frecuencias hasta de 20 000 Hz?

Resolución:

Datos: $f_{\text{más alta}} \leq 2 \times 10^4$ Hz ; $T_{\text{cuerda}} = 50$ N
$L_{\text{cuerda}} = 0{,}6$ m ; $\mu = 0{,}01$ kg/m

$$f_1 = \frac{1}{2(0{,}6)} \times \sqrt{\frac{50}{(0{,}01)}} \quad \therefore \quad f_1 = 58{,}9 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{2}{2(0{,}6)} \times \sqrt{\frac{50}{(0{,}01)}} \quad \therefore \quad f_2 = 117{,}3 \text{ Hz}$$

Entonces: $f_{339} = 339 \times f_1 = 339 \times (58{,}9) = 19\,967{,}1$ Hz

$\therefore$ La frecuencia resonante más alta será: f(339) = 19,97 kHz

28. Un alambre estirado vibra en su modo fundamental a una frecuencia de 400 vibraciones/s. ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si el alambre tuviera la mitad de largo, con el doble de diámetro y con una tensión cuatro veces superior?

Resolución:

Datos: sea: $f_1 = 400$ Hz
Longitud del alambre = L
Tensión en el alambre = T

Sabemos que: $4 \times 10^2 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ ... (1)

Entonces: si: $L_{\text{final}} = \dfrac{L}{2} \qquad T_{\text{final}} = 4T$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2\left(\frac{L}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{4T}{M} \times \left(\frac{L}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{2}{2L} \times \sqrt{2 \times \frac{T}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = 2\sqrt{2} \times 400 \quad \therefore \quad f_1 = 1\,131{,}4 \text{ Hz}$$

29. Un Do menor ($f = 65$ Hz) se toca en un piano. Si la longitud de la cuerda del piano es de 2,0 m y su densidad de masa lineal es igual a 5,0 g/m, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

Resolución:

Datos: Do menor: ($f_1 = 65$ Hz)
Longitud de la cuerda = 2,0 m

Densidad lineal = $5\times10^{-3}\,\frac{g}{m}$

T = ?

Por dato: $f_1 = 65\text{ Hz} = \frac{1}{2(2)}\times\sqrt{\frac{T}{5\times10^{-3}}}$

$\Rightarrow \quad (65)^2(4)^2\times5\times10^{-3} = T \quad \therefore \quad T_{cuerda} = 338\text{ N}$

30. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0,35 m y se afina para un concierto en Sol, $f_{Sol} = 392$ Hz. ¿Dónde debe poner el dedo la violinista para tocar un concierto en La, $f_{La} = 440$ Hz? Si esta posición va a permanecer correcta hasta un ancho de medio dedo (es decir, dentro de 0,60 cm), ¿en qué fracción es posible dejar que la tensión de la cuerda disminuya?

Resolución:

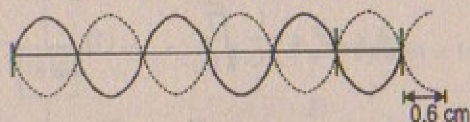
Datos: $L_{cuerda} = 0{,}35$ m ; $f_{sol} = 392$ Hz

Sabemos que: $f_{(5)} = f_{sol} = 5\times f_1 = 392$

Además: $f_{La} = f_{(6)} = 6\,f_1 = 440$ Hz

Entonces: 6 = n.° de antinodos

$\Rightarrow \quad 7\frac{\lambda}{2} = 0{,}35 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}1\text{ m} = 10\text{ cm}$



$\Rightarrow \quad 6\frac{\lambda}{2} = 34{,}4 \quad \Rightarrow \quad \frac{68{,}8}{6} = \lambda \quad \therefore \quad \lambda = 11{,}46\text{ cm}$

En consecuencia:

El violinista debe de colocar el dedo a 34,4 cm.

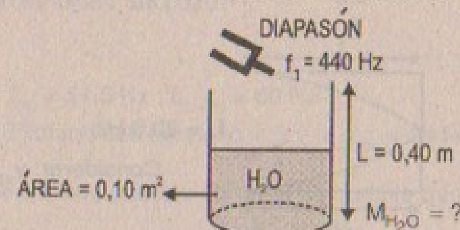
ONDAS ESTACIONARIAS EN COLUMNAS DE AIRE

(En esta sección, a menos que se indique de otro modo, suponemos que la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.)

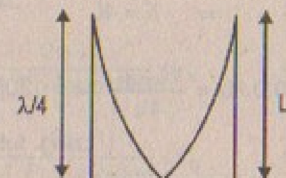
31. Un tubo abierto de 0,40 m de largo se coloca verticalmente en una cubeta cilíndrica que tiene un área en el fondo de 0,10 m². Se vierte agua dentro de la cubeta hasta que un diapasón vibrando de 440 Hz de frecuencia, situado sobre el tubo, produce resonancia. Encuentre la masa del agua en la cubeta en este momento.

31A. Un tubo abierto de longitud *L* se coloca verticalmente en una cubeta cilíndrica que tiene un área A en el fondo. Se vierte agua dentro de la cubeta hasta que un diapasón vibrando de frecuencia *f*, situado sobre el tubo, produce resonancia. Encuentre la masa del agua en la cubeta en este momento.

Resolución:



Estamos en el caso de un tubo(abierto-cerrado)



Como está en resonancia, entonces:

$f_1 = 440\text{ Hz} = \frac{1.\,v_{sonido}}{4L'}$

$\Rightarrow \quad 440 = \frac{1}{4L'}(34{,}4) \quad \therefore \quad L' = 0{,}195\text{ m}$

Luego: sabemos que:

$A\times\text{longitud} = \text{Volumen} = \frac{M_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}$

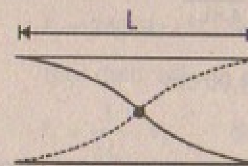
$\Rightarrow \quad (0{,}10)(0{,}4-0{,}195) = \frac{M_{H_2O}}{10^3\text{ kg/m}^3}$

$\therefore \quad M_{H_2O} = 20{,}45\text{ kg}$

32. Si un tubo de órgano resuena a 20,0 Hz, ¿cuál es la longitud requerida si está a) abierto en ambos extremos, y b) cerrado en un extremo?

Resolución:

Parte (a)



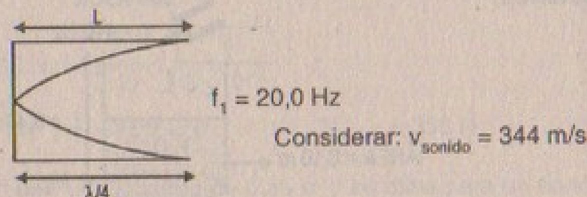
$f_1 = 20{,}0$ Hz

Considerar: $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow \quad \frac{2\lambda}{4} = L \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2L$

Luego: $f_1 = \frac{v_s}{2L} \Rightarrow 20 = \frac{344}{2L} \therefore L_{tubo} = 8,6$ m

Parte (b)



$f_1 = 20,0$ Hz

Considerar: $v_{sonido} = 344$ m/s

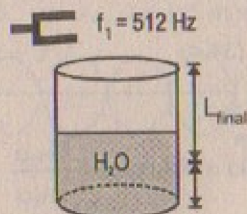
Entonces: $L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L$

Luego: $f_1 = 20,0 \text{ Hz} = \frac{v_{sonido}}{4L} \Rightarrow 20(4)L = 344$

$\therefore$ Long. tubo = 4,3 m

33. Un diapasón de 512 Hz de frecuencia se coloca cerca de la parte superior del tubo mostrado en la figura 18.13a. El nivel del agua se reduce de modo que la longitud *L* aumenta lentamente desde un valor inicial de 20,0 cm. Determine los dos siguientes valores de *L* que corresponden a modos resonantes.

Resolución:



Para un tubo (abierto-cerrado se cumple que)

$f_{n+1} = \frac{2n+1}{4L} \times v_s$ Donde: $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow f_{(3)} = 512 = \frac{2(2)+1}{4\,Lg} \cdot (344) \quad \therefore L_3 = 84,0$ cm

Para $f_2 = 512 \Rightarrow 512 = \frac{3 \cdot V_s}{4 \times L_2}$

$\Rightarrow L_2 = \frac{3\,(344)}{4\,(512)} \quad \therefore L_2 = 54,00$ cm

34. Un estudiante mide la profundidad de un pozo de agua con un oscilador de audio de frecuencia ajustable. Se oyen dos frecuencias resonantes sucesivas a 51,5 Hz y 60,0 Hz. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

34A. Un estudiante mide la profundidad de un pozo de agua con un oscilador de audio de frecuencia ajustable. Se oyen dos frecuencias resonantes sucesivas a f_1 y f_2. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

Resolución:

Por dato: $f_{(n)} = 51,5 \text{ Hz} ; f_{(n+1)} = 60$ Hz

Profundidad del pozo = ? ; $v_{sonido} = 344$ m/s

Como se trata de un tubo (abierto-cerrado) se cumple que:

$$f_{(n+1)} = (2n+1)\frac{V_s}{4L}$$

$$\Rightarrow f_{(n+1)} = 60 \text{ Hz} = \frac{2n+1}{4 \text{ Profundidad}} \times v_s \quad ...(1)$$

$$f_{(n)} = 51,5 \text{ Hz} = \frac{(2n-1)}{4 \text{ Profundidad}} \times v_s \quad ...(2)$$

(1) − (2):

$$60 - 51,5 = \frac{v_s}{4 \text{ profundidad}}\left[(2n+1)-(2n-1)\right] \Rightarrow 8,5 = \frac{v_s}{4 \text{ profundidad}} (2)$$

Reemplazando: $8,5 = \frac{1}{2} \times \frac{344}{\text{profundidad}} \Rightarrow \text{Profundidad} = \frac{344}{2(8,5)}$

$\therefore$ Profundidad del pozo = 20,2 m

35. Calcule la longitud de una tubería que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz si está a) cerrada en un extremo, y b) abierta en ambos extremos.

Resolución:

Parte (a) $f_1 = 240$ Hz ; Profundidad = P = ?

(por dato: cerrada en un extremo)

Entonces se cumple que: $f_1 = \frac{1}{4P} \times v_s$ donde $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow 240 = \frac{1}{4P} \times (344) \quad \therefore$ Profundidad de la tubería = 0,358 m <> 35,8 cm

Parte (b) $f_1 = 240$ Hz Profundidad: P = ?

(por dato: abierta en ambos extremos)

Entonces: $f_1 = \frac{1}{2L} \cdot v_s$ donde $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow 240 = \frac{344}{2P} \quad \therefore$ Profundidad de la tubería = 0,72 m <> 72 cm

36. Un túnel debajo de un río mide aproximadamente 2,0 km de largo. ¿A qué frecuencias puede resonar este túnel?

Resolución :

Dato: profundidad túnel = 2×10^3 m

$f_1 = ?$; $v_s = 344$ m/s

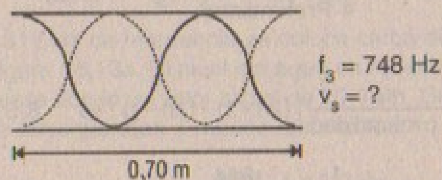
Como se trata de un túnel abierto en ambos extremos se cumple que:

$$f_1 = \frac{1}{2\ long} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{(2\times10^3)\times2} \times (344)$$

$$\therefore \quad f_1 = 0{,}086 \text{ Hz}$$

37. Un tubo de órgano abierto en ambos extremos está vibrando en su tercer armónico con una frecuencia de 748 Hz. La longitud de la tubería es de 0,70 m. Determine la velocidad del sonido en el aire dentro del tubo.

Resolución :



$f_3 = 748$ Hz
$v_s = ?$

Sabemos que: $f_3 = 3f_1 = 3 \times \frac{v_{sonido}}{2L} \quad \Rightarrow \quad 748 = \frac{3 \times v_{sonido}}{2\,(0{,}7)}$

$$\therefore \quad v_{sonido} = 349 \text{ m/s}$$

38. En general, el tubo más largo en un órgano que tiene registro de pedal mide 4,88 m. ¿Cuál es la frecuencia fundamental (a 0,0° C) si el extremo que no se acciona del tubo está a) cerrado y b) abierto? c) ¿Cuáles serán las frecuencias a 20,0°C?

Resolución :

Parte (a) Long. tubo = 4,88 m ; $f_1 = ?$ (a 0°C)
(tubo abierto - cerrado)

Entonces v_s (0°C) = 331 m/s

Luego: $f_1 = \frac{1}{4L} \times v_s \qquad f_1 = \frac{1}{4(4{,}88)} \times 331 \qquad \therefore \quad f_1 = 16{,}96$ Hz

Parte (b)
(tubo abierto en ambos extremos)
Entonces: v_s (0°C) = 331 m/s

Luego: $f_1 = \frac{1}{2L} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2(4{,}88)} \times 331$

$$\therefore \quad f_1 = 34 \text{ Hz}$$

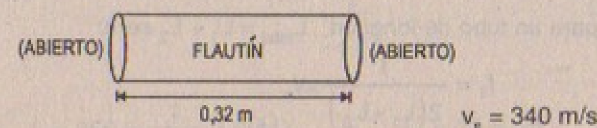
Parte (c)
A: 20°C la velocidad del sonido será = 343 m/s

Entonces: $f_1 = \frac{343}{4(4{,}88)} = 17{,}6$ Hz (tubo: abierto - cerrado)

$f_1 = \frac{343}{2(4{,}88)} = 35{,}1$ Hz (tubo: abierto en ambos extremos)

39. La longitud total de un flautín es 32 cm. La columna de aire resonante vibra como un tubo abierto en ambos extremos. a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que se puede tocar en un flautín, suponiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. b) Los agujeros abiertos laterales acortan de manera efectiva la longitud de la columna resonante. Si la nota más alta que puede tocarse en un flautín es de 4 000 Hz, encuentre la distancia entre nodos adyacentes para este modo de vibración.

Resolución :



$v_s = 340$ m/s

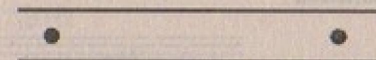
Parte (a)
Nos piden la frecuencia en la nota Do es decir f_1.

Entonces: $f_1 = \frac{1}{2L} \times v_s$

$f_1 = \frac{1}{2(0{,}32)} \times 340 \qquad \therefore \quad f_1 = 531{,}25$ Hz

Parte (b)

Por dato: $f_n = 4\,000$ Hz



Entonces: $f_n = \frac{n}{2L} \times v_s$ Donde $v_s = 340$ m/s

$\Rightarrow \quad 4\,000 = \frac{n}{2(0{,}32)} \times 340 \qquad \therefore \quad n \approx 8$ nodos

Luego: $7\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 32$ cm $\qquad \Rightarrow \quad \lambda = 8{,}51$ cm

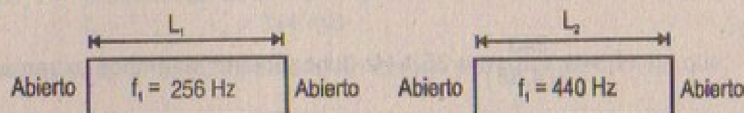
En consecuencia: Distancia (nodo-nodo) = $\frac{\lambda}{2} = 4{,}25$ cm

40. Un pedazo de tubo de metal tiene exactamente la longitud adecuada para que cuando se corte en dos pedazos (desiguales), una pieza resuene a 256 Hz y la otra a 440 Hz.

a) ¿Qué frecuencia resonante habría sido producida por la longitud original del tubo, y b) qué longitud tenía el pedazo original?

Resolución :

Parte (a)



Considerar: $v_s = 344$ m/s

Sabemos que: $f_1 = 256 = \frac{1}{2L_1} \times v_s \quad \therefore \quad L_1 = 0{,}672$ m

$f_1 = 440 = \frac{1}{2L_2} \times v_s \quad \therefore \quad L_2 = 0{,}390$ m

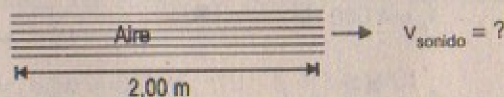
Luego: para un tubo de longitud $L_{total} = L_1 + L_2$ será:

$$f_1 = \frac{1}{2(L_1 + L_2)} \times v_s$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{344}{2(0{,}390 + 0{,}672)} \quad \therefore \quad f_1 = 162 \text{ Hz}$$

41. Una columna de aire de 2,00 m de largo está abierta en ambos extremos. La frecuencia de cierto armónico es de 410 Hz, en tanto que la del siguiente armónico más alto corresponde a 492 Hz. Determine la velocidad del sonido en la columna de aire.

Resolución :



Por dato: $f_n = 410$

$f_{(n+1)} = 492$

Por condición de tubos abiertos en ambos extremos:

$$f_{(n)} = 410 = \frac{n}{2L} \times v_s$$

$$\text{y} \quad f_{(n+1)} = 492 = \frac{n+1}{2L} \times v_s$$

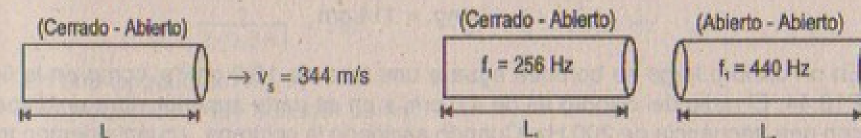
$$\frac{492}{410} = \frac{n+1}{n} \quad \therefore \quad n = 5 \quad \text{n.° de nodos}$$

Luego: $410 = \frac{5}{2(2{,}00 \text{ m})} \times v_s \quad \therefore \quad v_{\text{sonido en el aire}} = 328$ m/s

42. Un pedazo de tubo de cartón grueso, cerrado en un extremo, tiene exactamente la longitud adecuada para que cuando se corte en dos pedazos (desiguales), el pedazo con el extremo cerrado resuene a 256 Hz y el pedazo con ambos extremos abiertos resuene a 440 Hz. a) ¿Qué frecuencia resonante habría sido producida por el tubo de cartón original, y b) ¿qué longitud tenía el pedazo original?

Resolución :

Inicialmente: Finalmente:



Parte (a)

Sabemos que: $f_1 = 256 = \frac{1}{4L_1} \times (344) \quad \therefore \quad L_1 = 33{,}6$ cm

Además: $f_1 = 440 = \frac{1}{2L_2} \times (344) \quad \therefore \quad L_2 = 39{,}1$ cm

En consecuencia: $L = L_1 + L_2 = 39{,}1 + 33{,}6 = 72{,}7 <> 0{,}73$ m (parte b)

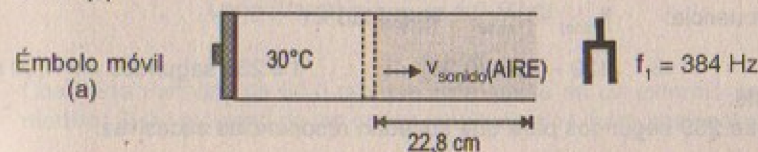
Por lo tanto: $f_{1(\text{tubo original})} = \frac{1}{4(0{,}73)} \times (344)$

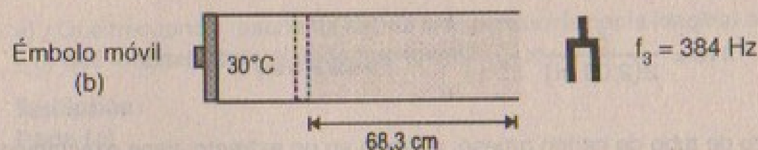
$\therefore \quad f_{1(\text{tubo original})} = 117{,}8$ Hz

43. Un tubo de vidrio está abierto en un extremo y cerrado en el otro (mediante un émbolo móvil). El tubo se llena con aire a 30,0°C, y un diapasón de 384 Hz se sostiene en el extremo abierto. Se escucha la resonancia cuando el émbolo está a 22,8 cm del extremo abierto y cuando se encuentra a 68,3 cm de dicho extremo. a) Por estos datos ¿qué velocidad del sonido está implicada? b) ¿Dónde estaría el émbolo en la siguiente resonancia?

Resolución :

Parte (a)





De (a) $f_1 = \frac{1}{4(L)} \times v_s \Rightarrow 384 = \frac{1}{4(0{,}228)} \times v_s$

$\therefore v_{\text{sonido en el aire}}(30°C) = 350{,}00$ m/s

Parte (b) $f_3 = \frac{5}{4\ \text{long.}} v_s \Rightarrow f_3 = 384 = \frac{5(350)}{4 \times \text{long}}$

$\therefore$ Long. = 114 cm

44. En un cilindro largo se bombea agua a una tasa de 18,0 cm³/s, como en la figura P18.44. El radio del cilindro es de 4,0 cm, y en su parte superior vibra un diapasón con una frecuencia de 200 Hz. Cuando asciende la columna, ¿cuánto tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

44A. En un cilindro largo se bombea agua a una tasa R (cm³/s), como en la figura P18.44. El radio del cilindro es r (cm), y en su parte superior vibra un diapasón con una frecuencia f. Cuando asciende la columna, ¿cuánto tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

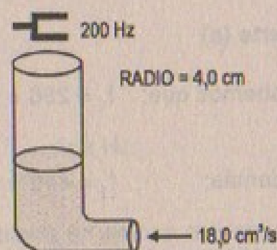


Figura P18.44

Resolución:
Radio = 4,0 cm
Considerar: $v_s = 344$ m/s

Sabemos que: $f_1 = 200 = \frac{1}{4L_{\text{inicial}}} \times v_s \quad \therefore \quad L_{\text{inicial}} = 0{,}43$ m

Además: $f_2 = 200 = \frac{3}{4L_{\text{final}}} \times v_s \quad \therefore \quad L_{\text{final}} = 1{,}29$ m

Luego:

Por continuidad: $A.v = \frac{\text{Vol.}}{t}$

$\Rightarrow \pi(0{,}04)^2 \times v = 18 \quad \therefore$ Velocidad = 0,36 cm/s

En consecuencia: $|L_{\text{final}} - L_{\text{inicial}}|$ = velocidad × t

$\Rightarrow 129 - 43 = (0{,}36) \times t \quad \therefore \quad t = 239$ segundos < > 4,00 min

Por lo tanto:
Transcurrirá 239 segundos para que sucedan resonancias sucesivas.

45. Un cuarto de baño mide 86 cm × 86 cm × 210 cm. Cuando usted canta en la regadera, ¿qué frecuencias sonarán con más riqueza (resonarán), suponiendo que la regadera actúa como un tubo cerrado en ambos extremos (nodos en ambos lados)? Suponga también que la voz humana varía entre 130 Hz y 2 000 Hz (no necesariamente la voz de una persona). Considere que la velocidad del sonido en la regadera caliente es de 355 m/s.

Resolución:
Datos: 130 Hz < f voz humana < 2 000 Hz ; $v_{\text{sonido}} = 355$ m/s
Volumen (cuarto de baño) = 86 cm × 86 cm × 210 cm

En una longitud de: 0,86 m
Las frecuencias que sonarán serán:

$f_n = \frac{n}{2(0{,}86)} \times 355 \quad \therefore \quad f_n = 206n$ Hz ; $\forall n = 1; 2; 3...$

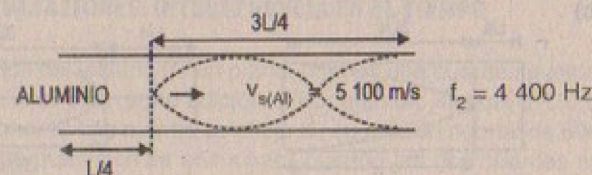
En una longitud de: 2,1 m
Las frecuencias que sonarán serán:

$f_n = \frac{n \times 355}{2(2{,}1)} \quad \therefore \quad f_n = n(84{,}5)$ Hz ; $\forall n = 1; 2; 3...$

ONDAS ESTACIONARIAS EN BARRAS Y PLACAS

46. Una barra de aluminio se sujeta en un punto ubicado a un cuarto de su distancia desde un extremo y se establece una vibración longitudinal mediante una fuerza de excitación de frecuencia variable. La frecuencia más baja que produce resonancia es de 4 400 Hz. La velocidad del sonido en el aluminio es de 5 100 m/s. Determine la longitud de la barra.

Resolución:



Sabemos que: $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3L}{4} \quad \therefore \quad \lambda = L$

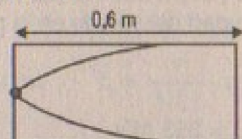
$\Rightarrow f_2 = 4\ 400 = \frac{v_s}{L}$

$\therefore$ Long (barra) $= \frac{4\ 500}{4\ 400} = 1{,}02$ m

47. Una barra metálica de 60,0 cm que está sujeta en un extremo se golpea con un martillo. Si la velocidad de las ondas longitudinales (compresionales) en la barra es

de 4 500 m/s, ¿cuál es la frecuencia más baja con la cual resonará la barra golpeada?

Resolución :



$\longrightarrow$ $v_s = 4\,500$ m/s

Sabemos que: $\dfrac{\lambda}{4} = 0{,}6 \Rightarrow \lambda = 2{,}4$ m

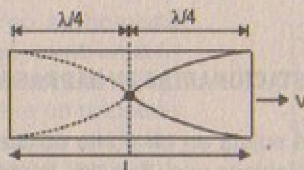
Luego: $f_1 = \dfrac{v_{sonido}}{\lambda} \Rightarrow f_1 = \dfrac{4\,500}{2{,}4}$

$\therefore$ $f_1 = 1{,}8$ kHz

48. Se mueven ondas longitudinales con una velocidad v en una barra de longitud L. Escriba una expresión para las frecuencias de las vibraciones longitudinales de una barra metálica que está a) sujeta en su centro, como se muestra en la figura 18.14a, y b) sujeta a un cuarto de la longitud de la barra a partir de un extremo, como se muestra en la figura 18.14b.

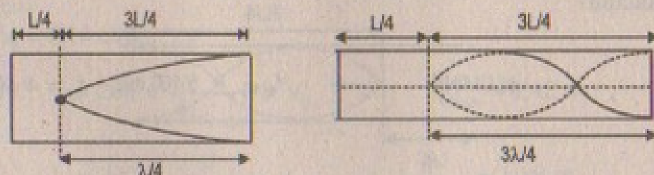
Resolución :

Parte (a)



Luego: $f_1 = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{2L} \Rightarrow f_2 = \dfrac{3}{2L} \cdot v \quad \therefore \; f_{n+1} = \dfrac{(2n+1)v}{2L}$ (caso general.)

Parte (b)



Entonces: $f_1 = \dfrac{v}{3L}$ $\qquad f_2 = \dfrac{v}{L} = \dfrac{3v}{3L}$

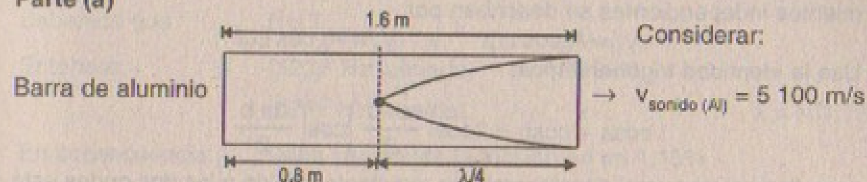
$\Rightarrow \; f_3 = \dfrac{5v}{3L}$ $\qquad \therefore \; f_{(n+1)} = (2n+1)\,\dfrac{v}{3L}$ (caso general)

49. Una barra de aluminio de 1,6 m de largo se sostiene en su centro. Se golpea con un paño cubierto de resina para generar vibraciones longitudinales en el modo fundamental. a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas establecidas en la barra? b) ¿Qué armónicos se generan en la barra sostenida de este modo? c) ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si la barra fuera de cobre?

Resolución :

Parte (a)

Barra de aluminio



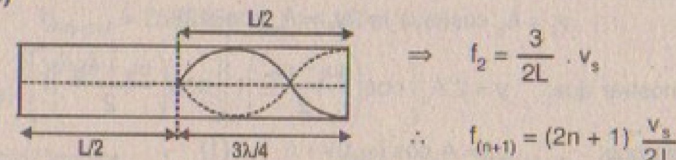
Considerar:

$\rightarrow \; v_{sonido\,(Al)} = 5\,100$ m/s

Entonces: $0{,}8 = \dfrac{\lambda}{4} \quad \therefore \quad \lambda = 3{,}2$ m

Luego: $f_1 = \dfrac{v_{s\,(Al)}}{\lambda} = \dfrac{5\,100}{3{,}2} \quad \therefore \quad f_1 = 1\,594$ Hz

Parte (b)



$\Rightarrow \; f_2 = \dfrac{3}{2L} \cdot v_s$

$\therefore \; f_{(n+1)} = (2n+1)\,\dfrac{v_s}{2L}$

En consecuencia

Se generan armónicos impares

Parte (c) $f_1 = \dfrac{v_{sonido\,(cobre)}}{2\ long._{(Barra)}} \Rightarrow f_1 = \dfrac{3\,560}{2(1{,}6)} \quad \therefore \quad f_1 = 1{,}11$ kHz

PULSACIONES: INTERFERENCIA EN EL TIEMPO

50. En ciertos intervalos del teclado de un piano, más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar intensidad adicional. Por ejemplo, la nota a 110 Hz tiene dos cuerdas en este tono. Si una cuerda se afloja de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de pulsación se escuchará cuando las dos cuerdas se toquen simultáneamente?

Resolución :

Por dato: $f_{(afinamiento)} = 110$ Hz

Como: $f^2 \,\alpha\, T_{cuerda}$

Entonces: cuando: $T_{cuerda} = 600$ N —— $f^2_{inicial} = (110)^2$

$\Rightarrow \; T_{cuerda} = 540$ N —— $f^2_{final} = x$

Aplicando una regla de tres simple:

Resulta que: $f_{final} = 104{,}4$ Hz

Luego: $f_{pulsación} = |f_{final} - f_{inicial}| = |110 - 104{,}4| = 5{,}6$ Hz

51. Dos ondas con igual amplitud pero con frecuencias ligeramente diferentes viajan en la misma dirección a través de un medio. En un punto determinado los desplazamientos independientes se describen por

$$y_1 = A_0 \cos \omega_1 t \quad y \quad y_2 = A_0 \cos \omega_2 t$$

Use la identidad trigonométrica:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

para demostrar que el desplazamiento resultante debido a las dos ondas está dado por:

$$y = 2A_0\left[\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$$

Resolución:

Datos: $y_1 = A_0 \cos(\omega_1 t)$ y $y_2 = A_0 \cos(\omega_2 t)$

Por demostrar que: $y = 2A_0\left[\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$

Sabemos que: $y_1 = A_0 \cos(\omega_1 t)$ ... (1)

$y_2 = A_0 \cos(\omega_2 t)$ ... (2)

Entonces: sumando (1) y (2)

$$y_1 + y_2 = y = A_0[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

Recordando: $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Entonces: $y = A_0\left[2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$

Por lo tanto: $y_1 + y_2 = y = \left[2A_0\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$ l.q.q.d.

52. Mientras intenta afinar una nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha tres pulsaciones por segundo entre el oscilador y la cuerda. a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? b) ¿En qué porcentaje debe cambiarse la tensión en la cuerda para afinarla?

Resolución:

Por dato: $f_{(afinador)} = 523$ Hz

Además: $|f_{osc.} - f_{cuerda}| = 3$ Hz

Parte (a)

Según dato: $f_{afin} - f_{cuerda} = 3$ Hz ó $f_{cuerda} - f_{afín} = 3$ Hz

En consecuencia: $f_{cuerda} = 3 + 523$ ó $f_{cuerda} = 520$ Hz

Parte (b)

Sabemos que: $f^2 \alpha\, T_{cuerda}$

Entonces: $(523)^2$ Hz (afinada) ---- 100%

$(526)^2$ Hz (cuerda) ---- x $\therefore$ x = 101,15%

En consecuencia: Debe cambiarse la tensión en un 1,15%

53. Un estudiante sostiene un diapasón que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared a una velocidad constante de 1,33 m/s. a) ¿Qué frecuencia de pulsación observa entre el diapasón y su eco? b) ¿A qué velocidad debe alejarse de la pared caminando para observar una frecuencia de pulsación de 5 Hz?

Resolución:

Datos: $f_{diapasón} = 256$ Hz ; $v_{obs.} = 1,33$ m/s

$f_{puls.} = ?$

Parte (a)

Por efecto Doppler: $f_{obs} = f_{diap.}\left(\frac{c + v_{obs.}}{c - v_{diap.}}\right)$, donde: c = 344 m/s

$$\Rightarrow \quad f_{obs.} = 256\left[\frac{344 + 1,33}{344 - 1,33}\right] \quad \therefore \quad f_{obs.} = 257,98 \text{ Hz}$$

En consecuencia:

de pulsaciones entre el diapasón y su eco es: |257,98 – 256| = 1,99 Hz

Parte (b) $f_{diapasón} = 256$ Hz

Además: $|f_{obs.} - f_{diap}| = 5 \Rightarrow f_{obs.} = 261$ Hz ó $f_{obs.} = 251$ Hz

Como:

La frecuencia del eco del observador se aleja de la fuente (diapasón).

Entonces: (por efecto Doppler)

$$f_{obs.} = 251 = 256\left[\frac{c - V_{obs}}{c + V_{obs}}\right] \quad \text{donde } c = 344 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad 251c + 251\, v_{obs.} = 256c - 256\, v_{obs.}$$

$$\Rightarrow \quad 507\, v_{obs.} = 5c = 5 \times 344$$

$$\therefore \quad v_{obs.} = 3,38 \text{ m/s}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

54. a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de una cuerda de piano de acero de $5,00 \times 10^{-3}$ kg y de 1,00 m de largo, bajo una tensión de 1 350 N? b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 1,00 m de largo, cerrado en el fondo y abierto en la parte superior?

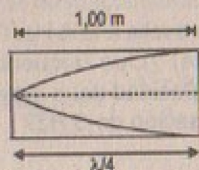
Resolución :

Parte (a) $M_{acero} = 5{,}00 \times 10^{-3}$ kg ; $T = 1\,350$ N

$L_{acero} = 1{,}00$ m $f_1 = ?$

Entonces: $f_1 = \dfrac{1}{2\,(1{,}00)} \times \sqrt{\dfrac{1\,350}{5{,}00 \times 10^{-3}} \times 1{,}00}$ $\therefore$ $f_1 = 260$ Hz

Parte (b)



Donde: $v_s = 344$ m/s

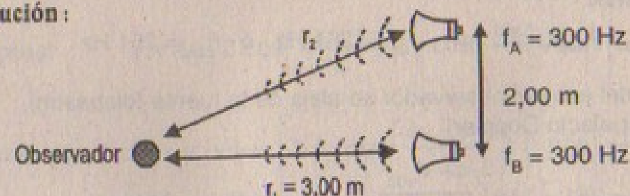
$\Rightarrow \quad \dfrac{\lambda}{4} = 1{,}00 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4{,}00$ m

$\therefore \quad f_1 = \dfrac{v_s}{4\,(1{,}00)} = \dfrac{344}{4\,(1{,}00)}$ $\therefore$ $f_1 = 86$ Hz

55. Dos altavoces se colocan sobre una pared a 2,00 m de distancia. Un escucha está parado enfrente de uno de los altavoces, a 3,00 m de la pared. Los altavoces se excitan por medio de un solo oscilador a una frecuencia de 300 Hz. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? b) ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador puede ajustarse de manera que el observador escuche el mínimo sonido?

Resolución :

Sea:



Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

Sabemos que por Pitágoras: $r_2 = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ m

Además: $|r_2 - r_1| = \Delta r = \dfrac{\lambda}{2\pi} . \phi$

Entonces: como $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{343}{300}$ $\therefore$ $\lambda = 1{,}143$ m

Por lo tanto: $|3{,}6 - 3{,}0| = \dfrac{1{,}143}{2(3{,}1416)} . \phi$ $\therefore$ $\phi = 3{,}330$ rad

Parte (b)

Nos dicen que: $|r_2 - r_1| = n\,\dfrac{\lambda}{2}$ para n = 1; 3; 5 ...

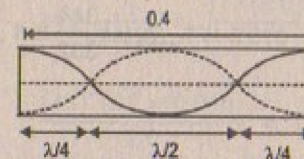
Entonces: $f(3) = \dfrac{2v_s}{3\lambda} = \dfrac{2(343)}{3\,(1{,}143)}$

$\therefore$ $f_3 = 200$ Hz (cercana a 300 Hz)

56. En una marimba, la barra de madera que reproduce un tono cuando se golpea vibra como una onda estacionaria transversal con tres antinodos y dos nodos. La nota de frecuencia más baja es de 87 Hz, producida por una barra de 40 cm de largo. a) Encuentre la velocidad de ondas transversales en la barra. b) La intensidad y duración del sonido emitido se incrementan por medio de un tubo resonante suspendido verticalmente debajo del centro de la barra. Si el tubo está abierto en el extremo superior únicamente y la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿qué longitud del tubo se requiere para resonar con la barra en el inciso a)?

Resolución :

Parte (a)

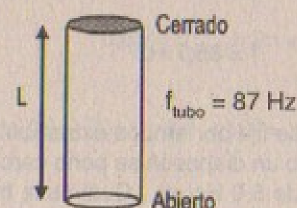


$\Rightarrow \quad \dfrac{3\lambda}{4} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{1{,}6}{3}$

Por dato: $f = 87 = \dfrac{v_{ondas}}{\lambda}$

$\Rightarrow \quad 87 = \dfrac{v_{ondas}}{\frac{1{,}6}{3}}$ $\therefore$ $v_{ondas} = 46{,}4$ m/s

Parte (b)



Como: $v_{sonido} = \lambda f$

$\Rightarrow \quad 340 = 87\lambda$

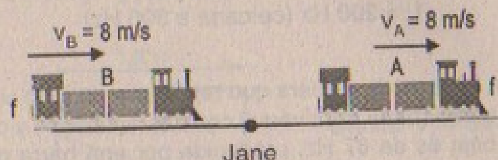
$\therefore \quad \lambda = 3{,}90$ m

Pero: $\dfrac{3\lambda}{4}$ = Longitud del tubo

$\therefore$ Longitud del tubo $= \dfrac{3}{4}(3{,}90) = 2{,}93$ m

57. Jane espera en un andén de ferrocarril, mientras dos trenes se aproximan desde la misma dirección a iguales velocidades de 8,0 m/s. Los dos trenes suenan sus silbatos (los cuales tienen la misma frecuencia), y un tren está a cierta distancia detrás del otro. Después de que el primer tren pasa frente a Jane, pero antes de que el segundo tren lo haga también, ella escucha pulsaciones de 4,0 Hz de frecuencia. ¿Cuál es la frecuencia de los silbatos de los trenes?

Resolución:



Por dato: $v_{sonido} = 344$ m/s

$$|f_{Jane/B} - f_{Jane/A}| = 4\ \frac{\text{Puls.}}{s} = 4\ \text{Hz}$$

Por efecto Doppler:
Cuando el tren «A» (fuente) se aleja del observador en reposo (Jane) entonces se cumple:

$$f_{Jane/A} = f\left(\frac{1}{1+\frac{v_A}{v_s}}\right) \quad \therefore \quad f_{Jane/A} = \frac{344}{352} \times f \ldots (1)$$

Por otro lado
Por efecto Doppler: cuando el tren «B» (fuente) se aproxima al observador en reposo (Jane), entonces se cumple:

$$f_{Jane/B} = f\left(\frac{1}{1-\frac{v_B}{v_s}}\right) \quad \therefore \quad f_{Jane/B} = \frac{344}{336} \times f \ldots (2)$$

Como: $|f_{Jane/B} - f_{Jane/A}| = 4 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{344}{336}f - \frac{344}{352}f\right| = 4$

$$\Rightarrow \frac{344 \times 16 \times f}{(336)(352)} = 4 \quad \therefore \quad f = 85{,}7\ \text{Hz}$$

58. Un alambre de 0,010 kg y 2,0 m de largo se fija por ambos extremos. Al principio la tensión en el alambre es de 200 N. Cuando un diapasón se pone cerca del alambre, se escucha una frecuencia de pulsación de 5,0 Hz. a) ¿Cuál es la frecuencia (frecuencias) del diapasón? b) ¿Cuál debe ser la tensión en el alambre para que desaparezca la pulsación?

Resolución:

Datos: $M_{alambre} = 0{,}010$ kg
$L_{alambre} = 2{,}0$ m

Parte (a) $T = 200$ N ; $f_{pulsación} = 5{,}0$ Hz ; $f_{diapasón} = ?$

Sabemos que: $|f_{diapasón} - f_{alambre}| = 5$ Hz ... (1)

Además: $f_{alambre} = \frac{1}{2(2{,}0)} \times \sqrt{\frac{200 \times (2{,}0)}{0{,}010}} \quad \therefore \quad f_{alambre} = 50$ Hz

De (1): $f_{diapasón} - 50 = 5$ Hz ó $50 - f_{diapasón} = 5$ Hz

En consecuencia: $f_{diapasón} = 55$ Hz ó $f_{diapasón} = 45$ Hz

Parte (b) $T = ?$; $f_{pulsación} = 0$

Si: $f_{diapasón} = 55$ Hz $\Rightarrow$ $f_{alambre} = 55$ Hz

Luego: $55 = \frac{1}{2(2{,}0)} \times \sqrt{\frac{T \times (2{,}0)}{0{,}010}} \quad \therefore \quad T = 242$ N

Por otro lado:
Si: $f_{diapasón} = 45$ Hz $\Rightarrow$ $f_{alambre} = 45$ Hz

Luego: $45 = \frac{1}{2(2{,}0)} \times \sqrt{\frac{T \times (2{,}0)}{0{,}010}}$

$$\Rightarrow \frac{(45)^2 (4)^2 \times (0{,}010)}{2{,}0} = T \quad \therefore \quad T = 162\ \text{N}$$

59. Si se determina que dos frecuencias naturales adyacentes de un tubo de órgano son 0,55 kHz y 0,65 kHz, calcule la frecuencia fundamental y la longitud de este tubo. (Tome v = 340 m/s.)

Resolución:

Datos: $0{,}55 = f_{(n)} = 2n - 1 \times \frac{v_s}{4L}$ ... (1) Donde: $v_s = 340$ m/s

$0{,}65 = f_{(n+1)} = 2n + 1 \times \frac{v_s}{4L}$ ... (2)

Restando (2) − (1): $0{,}1 \times 10^3 = \frac{v_s}{4L}$ (2)

$$\Rightarrow \text{Long. tubo} = \frac{2(340)}{4(0{,}1) \times 10^3} = 1{,}7\ \text{m}$$

Luego: $f_1 = \frac{1}{4L} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{340}{4(1{,}70)}$

$\therefore \quad f_1 = 50$ Hz

60. Dos altavoces se montan en los extremos de una vara horizontal de 2,0 m y se hacen rotar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de manera tal que la vara efectúa una rotación completa cada 5,0 s. Un oyente está situado a más de medio metro del eje de rotación entre los altavoces, como se ilustra en la figura P18.60. Si los dos altavoces producen un tono Do menor de 262 Hz, ¿cuál es la frecuencia de pulsación escuchada por el oyente? Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

60A. Dos altavoces se montan en los extremos de una vara horizontal de longitud *L* y se hacen rotar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de manera tal que la vara efectúa una rotación completa cada *t* segundos. Un oyente está situado a más de *L*/4 del eje de rotación entre los altavoces, como se ilustra en la figura P18.60. Si los dos altavoces producen una frecuencia *f*, ¿cuál es la frecuencia de pulsación escuchada por el oyente? Considere la velocidad del sonido igual a v.

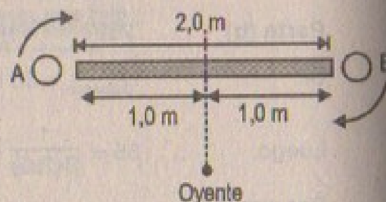


Figura P18.60

Resolución:

Datos: $v_{sonido} = 343$ m/s ; $f_1 = f_A = 262$ Hz

$T = 5{,}0$ s ; $f_B = f_1 = 262$ Hz

Por M.C.U. $\omega \times T = 2\pi \Rightarrow \omega(1{,}0) = v_f = \frac{2\pi}{5} \times (1{,}0)$

$\therefore v_f = 1{,}26$ m/s

Entonces:

Por efecto Doppler: $f_{obs.} = f_1 \left[\frac{1}{1-\frac{v_f}{v_s}}\right] \Rightarrow f_{obs.} = 262 \left[\frac{1}{1-\frac{1{,}26}{343}}\right]$

$\therefore f_{obs.} = 263$ Hz

En consecuencia: $f_{pulsación} = |f_{obs.} - f_{altavoz}|$

$\therefore f_{pulsación} = |263 - 262| = 1{,}00$ Hz

61. Una masa de 12 kg cuelga en equilibrio de una cuerda de longitud total *L* = 5,0 m y densidad de masa lineal μ = 0,0010 kg/m. La cuerda pasa por dos poleas ligeras sin fricción que están separadas por una distancia d = 2,0 m (Fig. P18.61a). a) Determine la tensión en la cuerda. b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria mostrado en la figura P18.61b?

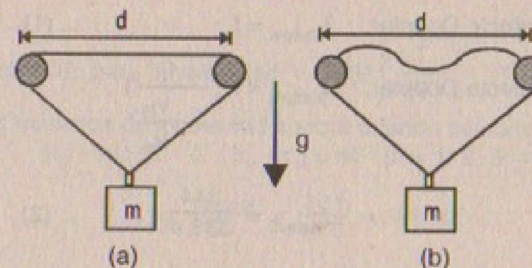


Figura P18.61

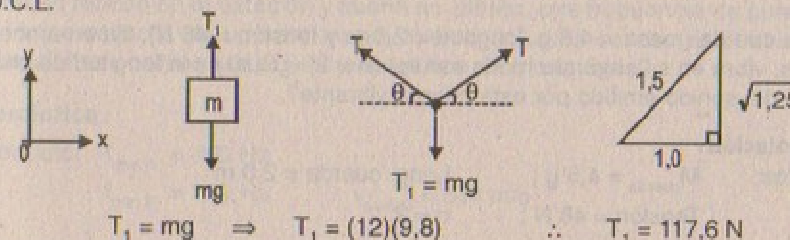
Resolución:

Datos: m = 12 kg; $L_{cuerda} = 5{,}0$ m ; $\mu_{cuerda} = 0{,}0010$ kg/m

d = 2,00 m

Parte (a)

D.C.L.



$T_1 = mg \Rightarrow T_1 = (12)(9{,}8) \quad \therefore T_1 = 117{,}6$ N

Entonces: $2T\text{sen}\theta - T_1 = 0 \quad \therefore T = \frac{117{,}6}{2(\sqrt{1{,}25})} \times 1{,}5$

$\therefore T_{cuerda} = 78{,}9$ N

Parte (b)

En la figura: el n.° de antinodos = 3 (onda estacionaria)

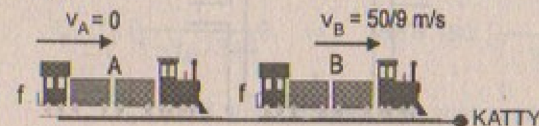
Entonces: $f_{(3)} = \frac{3}{2d} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow f_3 = \frac{3}{2\,(2{,}0)} \times \sqrt{\frac{78{,}9}{0{,}0010}}$

$\therefore f_3 = 211$ Hz

62. Mientras espera que llegue Stan Speedy en el último tren de pasajeros, Kathy Kool advierte pulsaciones producidas por dos trenes que suenan simultáneamente sus silbatos. Un tren está en reposo y el otro se aproxima a ella a una velocidad de 20 km/h. Suponga que ambos silbatos tienen la misma frecuencia y que la velocidad del sonido es 344 m/s. Si Kathy escucha cuatro pulsaciones por segundo, ¿cuál es la frecuencia de los silbatos?

Resolución:

Sea:



Considerar:

$v_{sonido} = 344$ m/s

Entonces: Por efecto Doppler: $f_{Katty/A} = f$ ... (1)

Además: Por efecto Doppler: $f_{Katty/B} = f\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{v_B}{v_s}}\right)$

$$\therefore \quad f_{Katty/B} = \frac{344}{338,4} f \quad ... (2)$$

Como: (por dato)

$$\left|\frac{344\,f}{338,4} - f\right| = 4 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \frac{5,55f}{338,4} = 4$$

∴ f = frecuencia de los silbatos = 243,6 Hz

63. Una cuerda (masa = 4,8 g, longitud = 2,0 m y tensión = 48 N), fija en ambos extremos, vibra en su segundo modo natural (n = 2). ¿Cuál es la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante?

Resolución:

Datos: $M_{cuerda} = 4,8$ g ; Long. cuerda = 2,0 m

Tensión = 48 N ; n = 2

$$f_2 = \frac{2}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{2}{2\,(2)} \times \sqrt{\frac{48 \times 2}{4,8 \times 10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad f_2 = 70,7 \text{ Hz}$$

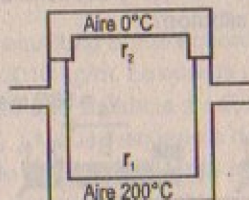
Luego: $v_{sonido} = f_2 \times \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{v_{sonido}}{f_2} = \dfrac{70,7}{344}$

$$\therefore \quad \lambda_{onda} = 4,86 \text{ m}$$

64. En un arreglo similar al que se muestra en la figura 18.2, las trayectorias r_1 y r_2 miden cada una 1,75 m de longitud. La parte superior del tubo (correspondiente a r_2) se llena con aire a 0°C (273 K). El aire en la parte inferior se calienta rápidamente a 200°C (473 K). ¿Cuál es la frecuencia más baja del altavoz que producirá una intensidad máxima en el receptor? (Es posible que usted determine la velocidad del sonido en el aire en diferentes temperaturas usando la expresión v = 331(T/273)$^{1/2}$ m/s, donde *T* está en K.)

Resolución:

$r_1 = r_2 = 1,75$ m



Usando la expresión para la velocidad: $v = 331\left[\dfrac{T}{273}\right]^{1/2}$ (T en Kelvin)

Se esperarán máximos de intensidad sonora cuando se cumpla que:

$$|r_2 - r_1| = 0 \quad ó \quad |r_2 - r_1| = n\lambda \quad (n = 1;\ 2;\ 3;\ 4...)$$

Entonces: $f_{(0°C)} = \dfrac{v_{sonido}}{\lambda} = \dfrac{331}{1,75} = 189$ Hz

$$f_{(200°C)} = \frac{v_{sonido}}{\lambda} = \frac{479,5}{1,75} = 274 \text{ Hz}$$

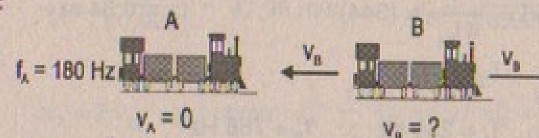
En consecuencia:
La frecuencia más baja será: 231,5 Hz

65. Los silbatos de dos trenes tienen frecuencias idénticas de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y suena su silbato, una frecuencia de pulsación de 2 Hz se escucha de un tren en movimiento. ¿Cuáles son las dos velocidades y direcciones posibles que puede tener el tren en movimiento?

Resolución:

Por dato: $f_{tren\,A} = 180$ Hz
$f_{tren\,B} = 180$ Hz $\quad v_{sonido} = 344$ m/s

Además:



$$|f_B - 180| = 2 \quad \therefore \quad f_B = 182 \text{ Hz. ó } f_B = 178 \text{ Hz}$$

Casos:

Si el tren «B» se aleja del tren «A» entonces se considera $f_B = 178$ Hz, entonces por efecto Doppler:

$$f_B = f_A\left[\frac{1}{1+\frac{v_B}{v_s}}\right] \quad \Rightarrow \quad 178 = 180\left[\frac{1}{1+v_B/344}\right]$$

$$\therefore \quad v_B = 3,87 \text{ m/s} \quad \text{(velocidad de alejamiento)}$$

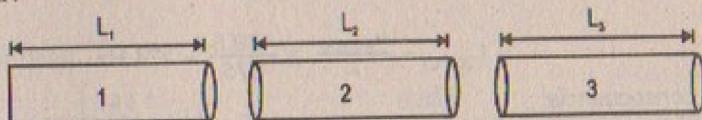
Si el tren «B» se acerca al tren «A», entonces se considera $f_B = 182$ Hz.
Luego por efecto Doppler:

$$f_B = f_A\left[\frac{1}{1-v_B/344}\right] \quad \Rightarrow \quad 182 = 180\left[\frac{1}{1-v_B/344}\right]$$

$$\therefore \quad v_B = 3,78 \text{ m/s} \quad \text{(velocidad de acercamiento)}$$

66. En un acorde mayor sobre la escala musical de tonos físicos, las frecuencias están en las proporciones 4:5:6:8. Un conjunto de tubos, cerrados en un extremo, se cortan de manera que cuando suenen en su modo fundamental, lo harán de manera diferente al del acorde mayor. a) ¿Cuál es la proporción de las longitudes de los tubos? b) ¿Qué longitud de tubos se necesita si la frecuencia más baja del acorde es 256 Hz? c) ¿Cuáles son las frecuencias de este acorde?

Resolución:



Parte (a)

En el tubo 1: $f_1 = \dfrac{1}{4L_1} \times v_s$ $\qquad \therefore \quad \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1}{2}$

En el tubo 2: $f_1 = \dfrac{1}{2L_2'} \times v_s$

Parte (b)

Si $f_1 = 256$ Hz

Entonces: $256 = \dfrac{1}{4L_1} \times (344) \qquad \therefore \quad L_1 = 0{,}34$ m

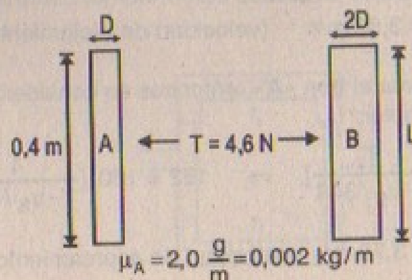
En consecuencia: $L_2 = 0{,}68$ m

Parte (c) $f_1 = 256$ Hz ; $f_2 = 768$ Hz

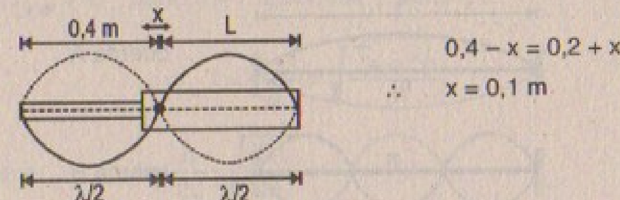
Para el otro tubo: $f_1 = 256$ Hz ; $f_2 = 512$ Hz

67. Dos alambres se sueldan entre sí. Son del mismo material, pero uno tiene el doble de diámetro que el otro. Se someten a una tensión de 4,6 N. El alambre delgado tiene una longitud de 40 cm y una densidad de masa lineal de 2,0 g/m. La combinación se fija en ambos extremos y se hace vibrar de manera tal que se presentan dos antinodos con el nodo central ubicado a la derecha de la unión. a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración? b) ¿Cuál es la longitud del alambre grueso?

Resolución:



Parte (a)



$0{,}4 - x = 0{,}2 + x$

$\therefore \quad x = 0{,}1$ m

Sabemos que: $\rho_A = \rho_B = \dfrac{M_A}{Vol_A} = \dfrac{M_B}{Vol_B}$

$$\Rightarrow \quad M_B = \frac{M_A \times Vol_B}{Vol_A} = \frac{(0{,}002)(0{,}4)\times(L_B)(\pi).D^2}{(0{,}4)(\pi)(0{,}5D)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{M_B}{L_B} = \mu_B = 0{,}008 \text{ kg/m}$$

como $\mu_B > \mu_A$ entonces la longitud de «B» es menor que la longitud de «A».
Luego:

$$v_A = \sqrt{\frac{4{,}6}{0{,}002}} \approx 47{,}96 \text{ m/s} \quad y \quad v_B = \sqrt{\frac{4{,}6}{0{,}008}} \approx 23{,}98 \text{ m/s}$$

Como: $v_A = 2\,v_B$ y como: $v_A^2 \dfrac{1}{\alpha} L_A \Rightarrow v_B^2 \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{L_A}{2} = L_B$

En consecuencia: Longitud de B $= \dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}2$ m

Por lo tanto: $f_{total} = f_{1A} + f_{1B} = \dfrac{1}{(0{,}4+0{,}2)} \times \sqrt{\dfrac{(4{,}6)\,(0{,}4+0{,}2)}{(0{,}002)(0{,}4)+(0{,}008)(0{,}2)}}$

$\therefore \quad f_{\text{total de vibración}} = 56{,}5$ Hz

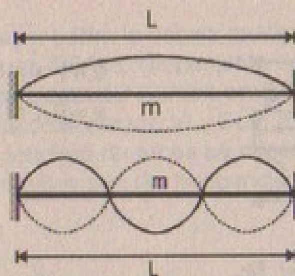
Parte (b)

La longitud del alambre grueso (B) $= \dfrac{\text{Longitud de A}}{2} = \dfrac{0{,}4}{2}$

$\therefore$ Long B = 0,2 m <> 20,00 cm

68. Dos cuerdas idénticas, cada una fija en ambos extremos, se arreglan una cerca de la otra. Si la cuerda normal A empieza a oscilar en su modo fundamental, se observa que la cuerda B empezará a vibrar en su tercer modo natural ($n = 3$). Determine la proporción entre la tensión de la cuerda B y la tensión de la cuerda A.

Resolución :
Sea:



Entonces: $f_A = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{m}\times L} \Rightarrow \frac{f_A^2\times 4L^2\times m}{L} = T_A$ ... (1)

Por otro lado: $f_B = \frac{3}{2L}\times\sqrt{\frac{T_B\times L}{m}} \Rightarrow \frac{f_B^2\times 4L^2\times m}{9\times L} = T_B$ ... (2)

Dividiendo (2) por (1): $\frac{T_B}{T_A} = \frac{\frac{f_B^2\times 4L^2\times m}{9L}}{\frac{f_A^2\times 4L^2\times m}{L}}$; pero: $f_B = f_A$

$$\therefore \quad \frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{9}$$

69. Con un vibrador de frecuencia variable se genera en una cuerda una onda estacionaria de longitud y tensión variables. Cuando el vibrador tiene una frecuencia *f* en una cuerda de longitud *L* y tensión *F* hay *n* antinodos formados en la cuerda. a) Si se duplica la longitud de la cuerda, ¿en qué factor debe cambiar la frecuencia para obtener el mismo número de antinodos? b) Si la frecuencia y la longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá *n* + 1 antinodos? c) Si la frecuencia se triplica y la longitud se reduce a la mitad, ¿en qué factor debe cambiarse la tensión para obtener el doble de antinodos?

Resolución :

Datos: cuando: f ; L ; F ; hay «n» antinodos en la cuerda.

$$\Rightarrow \quad f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{F}{m}\times L}$$

Parte (a)

Para: $L_{final} = 2L$; n antinodos ; $f_{final} = ?$ $\quad\therefore\quad m_f = 2\,m$

Luego: $f_{final} = \frac{n}{2(2L)}\times\sqrt{\frac{F}{2m}\times(2L)} \quad\therefore\quad f_{final} = \frac{1}{2}\times f = 0{,}5\,f$

Parte (b) $T_{final} = ?$; para: n + 1 antinodos y para: f, L

$$\Rightarrow \quad f = \frac{n+1}{2L}\times\sqrt{\frac{T_{final}\times L}{m}}$$

Sabemos que: $f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{T.L}{m}}$

Entonces: $\frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T} = \frac{n+1}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T_{final}}$

$$\Rightarrow \quad n\sqrt{T} = (n+1)\sqrt{T_{final}} \quad\therefore\quad T_{final} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times T$$

Parte (c)

Si: $f_{final} = 3\,f$; $L_{final} = \frac{L}{2}$; $T_{final} = ?$; $n_{final} = 2n$

$$\Rightarrow \quad f_{final} = \frac{2n}{2\left(\frac{L}{2}\right)}\times\sqrt{\frac{T_{final}\times L}{2m}} = 3\,f \quad ...(1)$$

Pero: $f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{T\times L}{m}}$ ... (2)

Entonces: (2) en (1)

$$3\left[\frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T}\right] = \frac{4n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\frac{\sqrt{T_{Final}}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 9T = \frac{16}{2}\times T_{final} \quad\therefore\quad T_{final} = \frac{9}{8}\,T$$

Capítulo 19

TEMPERATURA

EL TERMÓMETRO DE GAS A VOLUMEN CONSTANTE Y LA ESCALA KELVIN

(*Nota:* Una presión de 1,00 atm = 1,01 × 10^5 Pa = 101 kPa)

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (que es dióxido de carbono en estado sólido y tiene una temperatura de –80,0°C) y en el punto de ebullición del alcohol etílico (78,0°C). Las dos presiones son 0,900 atm y 1,635 atm. a) ¿Qué valor de cero absoluto produce la calibración? ¿Cuál es la presión en a) el punto de congelación del agua, y b) el punto de ebullición del agua?

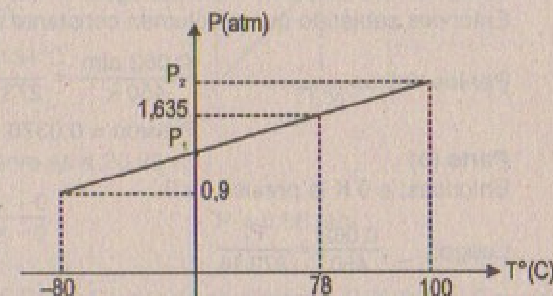
Resolución:

Parte (a)

De la gráfica de la recta:

$$\frac{0{,}9-0}{-80-T}=\frac{1{,}635-0{,}9}{78+80}$$

$\therefore \quad T°C = -273{,}5 = 0{,}00\ K$



Parte (b)

En el punto de congelación: $\dfrac{P_1-0{,}9}{80}=\dfrac{1{,}635-0{,}9}{78+80}$ $\quad\therefore\quad P_1 = 1{,}27$ atm

En el punto de ebullición: $\dfrac{P_2-1{,}635}{100-78}=\dfrac{1{,}635-0{,}9}{78+80}$ $\quad\therefore\quad P_2 = 1{,}74$ atm

2. Suponga que la temperatura (en kelvin) y la presión en un termómetro de gas ideal se relacionan por medio de una ecuación *cuadrática*, $T = aP^2 + bP$. Si la temperatura y presión en el punto triple del agua son T_3 y P_3, respectivamente, y si la temperatura y la presión en el punto de ebullición del agua son T_B y P_B, respectivamente, determine a y b en función de T_3, P_3, T_B y P_B.

Resolución:

Sabemos que: $T = aP^2 + bP$ (formando trinomio cuadrado perfecto)

$$\Rightarrow \quad T = a\left[P+\frac{bP}{2a}\right]^2-\frac{(bP)^2}{4a} \qquad \Rightarrow \quad T = aP^2\left[1+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2}{4a}P^2$$

$$\Rightarrow \quad T = P^2\left[a\left(\frac{2a+b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right] \quad \Rightarrow \quad T = P^2\left[\frac{(2a+b-b)(2a+b+b)}{4a}\right]$$

$$\therefore \quad T = P^2 (a + b)$$

Si $T = T_3 \Rightarrow P = P_3$
Si $T = T_B \Rightarrow P = P_B$

Luego: $T_3 = P_3^2 \ (a + b)$ ... (1)

$T_B = P_B^2 \ (a + b)$ ... (2) Desarrollando $T_3 \cdot P_B^2 = T_B \cdot P_3^2$

En consecuencia: $a + b = T_3 + T_B / P_3^2 + P_B^2$

3. Un termómetro de gas a volumen constante registra una presión de 0,062 atm cuando está a una temperatura de 450 K. a) ¿Cuál es la presión en el punto triple del agua? b) ¿Cuál es la temperatura cuando el valor de la presión es 0,015 atm?

Resolución :

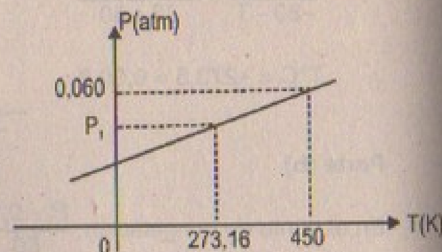
Sabemos que en punto triple del agua: T = 273,16 K
Entonces sabiendo que a volumen constante se cumple que:

Por los datos: $\dfrac{0{,}062 \text{ atm}}{450 \text{ k}} = \dfrac{P}{273{,}16 \text{ K}}$

$\therefore$ Presión = 0,0376 atm

Parte (b)

Entonces: a 0 K la presión es 0.



Luego: $\dfrac{0{,}062}{450} = \dfrac{P_1}{273{,}16}$

$\therefore \quad P_1 = 0{,}0376 \text{ atm} \equiv 30{,}4 \text{ mmhg}$

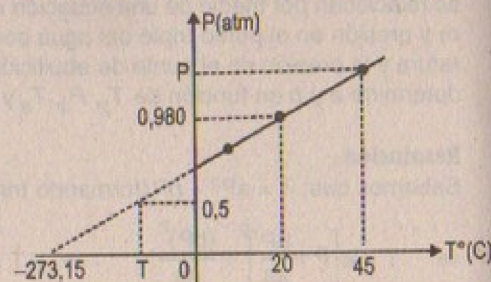
Por otro lado: $\dfrac{0{,}062}{450} = \dfrac{0{,}015}{T}$

$\therefore$ T = 108 K

4. En un termómetro de gas a volumen constante, la presión a 20°C es 0,980 atm. a) ¿Cuál es la presión a 45°C? b) ¿Cuál es la temperatura si la presión es 0,500 atm?

Resolución :

Parte (a)



Sabemos que:

$$\frac{P}{45+273{,}15} = \frac{0{,}980}{20+273{,}15}$$

$\therefore \quad P = 1{,}064$ atm

Parte (b) $\dfrac{1{,}064-0{,}980}{45-20} = \dfrac{0{,}980-0{,}5}{20-T}$

$\therefore \quad T = -123° \text{ C}$

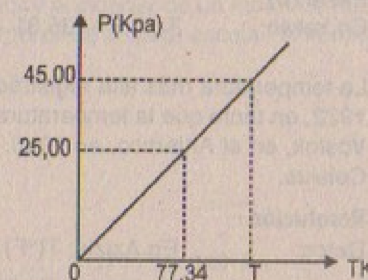
5. Un termómetro de gas a volumen constante se llena con helio. Cuando se sumerge en nitrógeno líquido hirviendo (77,34 K), la presión absoluta es de 25,00 kPa. a) ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius y kelvin cuando la presión es de 45,00 kPa? b) ¿Cuál es la presión cuando el termómetro se sumerge en hidrógeno líquido hirviendo?

Resolución :

Parte (a)

De la relación: $\dfrac{25{,}00-0}{77{,}34-0} = \dfrac{45{,}00-0}{T-0}$

$\therefore \quad T = 139{,}2 \text{ K}$



Entonces en grados celsius será:

$T°C = 139{,}2 - 273{,}15 = -134°C$

Parte (b)

Cuando el líquido hidrógeno hierve es a 20,28 K.

Entonces: $\dfrac{P-0}{20{,}28} = \dfrac{25{,}00-0}{77{,}34-0} \quad \therefore \quad P = 6{,}56 \text{ kPa}$

6. El punto de fusión del oro es 1 064°C y el punto de ebullición es 2 660°C. a) Exprese estas temperaturas en kelvin. b) Calcule la diferencia entre estas temperaturas en grados Celsius y en kelvin.

Resolución :

Datos: Punto de fusión del oro = 1 064°C
Punto de ebullición del oro = 2 660°C

Parte (a) Punto de fusión en kelvin = 1 064° + 273 = 1 337 K
Punto de ebullición en kelvin = 2 660 + 273 = 2 933 K

Parte (b)

Pto. de ebullición – Pto. fusión (en Celsius) = 2 660°C – 1 064°C

$\therefore \quad \Delta T°C = 1\,596°C$

Pto. de ebullición – Pto. de fusión (en kelvin):

2 933 K – 1 337 K = 1 596 K

$\therefore \quad \Delta T \text{ K} = 1\,596 \text{ K}$

7. El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de −195,81°C a presión atmosférica. Exprese esta temperatura en a) grados Fahrenheit, y b) kelvin.

Resolución:
Datos: puntos de ebullición (nitrógeno) = −195,81°C

Parte (a)

$$F = \frac{5C}{9} + 32$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{9}{5}(-195,81) + 32 \qquad \therefore \quad F = \text{temperatura en Fahrenheit} = +322,0°F$$

Parte (b)
En kelvin: $T(K) = -195,81 + 273,15 \quad \therefore \quad T(K) = 77,30\ K$

8. La temperatura más alta registrada sobre la Tierra es de 136°F, en Azizia, Libia, en 1922, en tanto que la temperatura más baja registrada es de −127°F, en la estación Vostok, en el Antártico, en 1960. Exprese estas temperaturas extremas en grados Celsius.

Resolución:
Datos: En Azizia: T(°F) = 136°F
En Vostok: T(°F) = −127°F

En Azizia: $T°(C) = \frac{5}{9}\,[(136) - 32] = 57,8°C$

En Vostok: $T°(C) = \frac{5}{9}\,[(-127) - 32] = 88,3°C$

9. El oxígeno se condensa en un líquido a aproximadamente 90 K. ¿A qué temperatura, en grados Fahrenheit, corresponde este valor?

Resolución:
Datos: condensación del oxígeno = 90 K

De la conversión: $T(K) = °C + 273,15$

$$\Rightarrow \quad 90\ K = °C + 273,15 \quad \therefore \quad T(°C) = -183,15°C$$

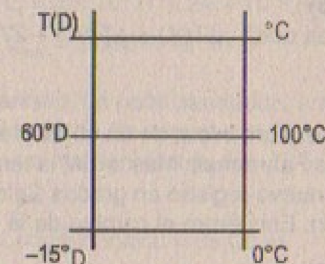
Luego a Fahrenheit:

Sabemos que: $T(°F) = \frac{9}{5}(°C) + 32 \quad \Rightarrow \quad T(°F) = \frac{9}{5}(-183,15) + 32$

$$\therefore \quad T(°F) = -297,67°F$$

10. En una escala de temperatura desconocida, el punto de congelación del agua es −15°D y el punto de ebullición es +60°D. Obtenga una ecuación de conversión *lineal* entre esta escala de temperatura y la escala Celsius.

Resolución:
Por Thales:



$$\frac{T(D) - 60}{60 + 15} = \frac{C - 100}{100}$$

$$\Rightarrow \quad T(D) - 60 = \frac{75}{100}(C - 100)$$

$$\therefore \quad T(D) = \frac{3}{4}°C - 15$$

11. Una diferencia de temperatura entre el interior y el exterior de un motor de automóvil es de 450°C. Exprese esa diferencia de temperatura en la a) escala Fahrenheit, y b) la escala kelvin.

Resolución:

Sabemos que: $\Delta T°C = \frac{5}{9}\Delta T°F$

$$\Rightarrow \quad 450°C = \frac{5}{9}\Delta T°F \qquad \therefore \quad \Delta T(°F) = 810°F$$

Parte (b) $\Delta T°C = \Delta T(K) - 273,15 \quad \Rightarrow \quad 450°C = \Delta T\,(K) - 273,15$

$$\therefore \quad \Delta T\,(K) = 723,15\ K$$

12. La temperatura normal del cuerpo humano es 98,6°F. Una persona con fiebre puede registrar 102°F. Expresa estas temperaturas en grados Celsius.

Resolución:

Datos: Temperatura del cuerpo humano = 98,6°F
Fiebre de una persona = 102°F

Sabemos que: $T(°F) = \frac{9}{5}C + 32 \quad \Rightarrow \quad 102°F = \frac{9}{5}°C + 32$

$$\therefore \quad T(C°) = 38,9°C$$

13. Una sustancia se calienta de −12°F a 150°F. ¿Cuál es su cambio en temperatura en a) la escala Celsius, y b) la escala kelvin?

Resolución:
Datos: $T_{inicial}(°F) = -12°F$
$T_{final}(°F) = 150°F$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta T(°C) = \frac{5}{9}\Delta T(°F) \quad \Rightarrow \quad (150 + 12)\,\frac{5}{9} = \Delta T\,(°C)$

$$\therefore \quad \Delta T(°C) = 90°C$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta T(K) = \Delta T(°C) + 273$ $\Rightarrow$ $\Delta T(K) = 90°C + 273$

$\therefore$ $\Delta T(K) = 363\ K$

14. La temperatura inicial de un objeto tiene el mismo valor numérico en grados Celsius y grados Fahrenheit. Más tarde, la temperatura cambia, de modo que el valor numérico del nuevo registro en grados Celsius es un tercio tan grande o tan pequeño que en kelvin. Encuentre el cambio de la temperatura en kelvin.

Resolución :

Datos: $T_{final}(°C) = \frac{1}{3} T_{final}(K)$

si $T_{final}(K) = x \Rightarrow T_{final}(°C) = x - 273 = \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow x - \frac{1}{3}x = 273 \quad \therefore \quad x = 409{,}5\ K$

Luego el cambio de la temperatura en kelvin será: 409,5 K

15. ¿A qué temperatura son iguales las lecturas de un termómetro Fahrenheit y de uno Celsius?

Resolución :

Si $T°(C) = x$ y $T(°F) = x$

Entonces: (por la conversión) $T(°F) = \frac{9}{5}(°C) + 32 \Rightarrow x = \frac{9}{5}(x) + 32$

$\therefore \quad x = -40$

En consecuencia: a $-40°C$ es equivalente un termómetro en grados Fahrenheit.

EXPANSIÓN TÉRMICA DE SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

16. Un tubo de aluminio mide 30 000 de largo a 20,0°C. ¿Cuál es su longitud a a) 100,0°C y b) 0,0°C?

Resolución :



$\alpha_{Alum.} = 24 \times 10^{-6}\ C°^{-1}$

Parte (a)

$L_f = ?$ $T_f = 100°C$

Sabemos que: $L_f = L_0(1 + \alpha\,\Delta T) \Rightarrow L_f = 3 \times 10^4 (1 + 24 \times 10^{-6}(80))$

$\therefore \quad L_{final} = 3{,}006 \times 10^4\ m$

Parte (b)

$L_f = ?$ $T_f = 0°C$

$\Rightarrow \quad L_f = L_0(1 + \alpha\,\Delta T) \quad \Rightarrow \quad L_f = 3 \times 10^4 [1 + 24 \times 10^{-6}(-20)]$

$\therefore \quad L_{final} = 2{,}998 \times 10^4\ m$

17. Un alambre telefónico de cobre está amarrado, un poco pandeado, entre dos postes que están a 35,0 m de distancia. Durante un día de verano con $T_C = 35{,}0°C$, ¿qué longitud es más largo el alambre que en un día de invierno con $T_C = -20{,}0°C$?

Resolución :

Datos: $\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; Longitud inicial = 35,00 m

con $T_C = 35°C$ $\quad \Delta L_1 = 35\,(17 \times 10^{-6})(35)$

$\therefore \quad \Delta L_1 = 0{,}0208\ m = 2{,}08\ cm$

Con $T_0 = -20°C$ $\quad \Delta L_2 = L \cdot \alpha_{cobre}\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta L_2 = (35)(17 \times 10^{-6})(20)$

$\therefore \quad \Delta L_2 = 0{,}0119\ m = 1{,}19\ cm$

En consecuencia: $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 2{,}08\ cm + 1{,}19\ cm = 3{,}27\ cm$

18. Una acera de concreto se vacía un día en que la temperatura es de 20°C de modo tal que los extremos no tienen posibilidad de moverse. a) ¿Cuál es el esfuerzo en el cemento en un día caluroso a 50°C? b) ¿Se fractura el concreto? Considere el módulo de Young para el concreto igual a $7{,}0 \times 10^9\ N/m^2$ y la resistencia a la tensión como $2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$.

Resolución :

Datos: $Y_{concreto} = 7{,}0 \times 10^9\ N/m^2$

$S_{tensión(20°C)} = 2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$

$a_{concreto} = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Sabemos que: $\quad Esfuerzo = Y\frac{\Delta L}{L}$ ... (1)

Por otro lado: $\quad \frac{\Delta L}{L} = \alpha_{concreto} \cdot \Delta T = (12 \times 10^{-6})(50 - 20)$

Reemplazando en (1)

Resulta que: $\quad Esfuerzo = (7{,}0 \times 10^9\ N/m^2)(12 \times 10^{-6})(30)$

$\therefore \quad Esfuerzo = 2{,}52 \times 10^6\ N/m^2$

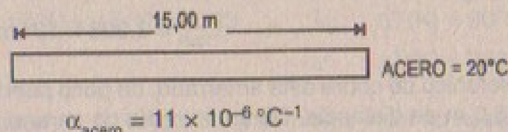
Parte (b)

Como la resistencia a la tensión = $2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$, entonces no se fractura el concreto, debido a que el esfuerzo es menor.

19. Una viga de acero estructural mide 15,0 m de largo cuando se monta a 20,0°C. ¿Cuánto cambia esta longitud en las temperaturas externas de −30,0°C a 50,0°C?

Resolución :

Datos:



$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

A $T_f = -30°C$; $L_f = ?$

Entonces: $L_f = 15(1 + 11 \times 10^{-6}(-30 - 20))$

$\therefore$ $L_{final\,(-30°C)} = 14{,}99175$ m

Por otro lado: A $T_f = 50°C$; $L_f = ?$

Entonces: $L_f = 15[1 + 11 \times 10^{-6}(50 - 20)]$

$\therefore$ $L_{final\,(50°C)} = 15{,}00495$ m

Finalmente:

A −30°C la longitud final ha cambiado en: 15 − 14,99175 = 0,00825 m

A 50°C la longitud final ha cambiado en: 15,00495 − 15 = 0,00495 m

En total ha cambiado: 0,00825 + 0,00495 = 0,00132 m <> 1,32 cm

20. El puente de New Riber George en Virginia Occidental es un arco de acero de 518 m de largo. ¿Cuánto cambia esta longitud entre temperaturas extremas de −20,0°C y 35,0°C?

Resolución :

Datos: Long. (arco de acero) = 518 m

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

$T_{inicial} = 20°C$

a $T_{final} = -20°C$; $L_{final} = ?$

Entonces: $L_{final} = L_o(1 + \alpha\Delta T)$ $\Rightarrow$ $L_{final} = (518\text{ m})[1 - (11 \times 10^{-6})(40)]$

$\therefore$ $L_{final}(-20°C) = 517{,}77208$ m

Por otro lado: A $T_{final} = 35°C$ $L_{final} = ?$

Entonces: $L_{final} = L_o(1 + \alpha\,\Delta T)$ $\Rightarrow L_{final} = (518\text{ m})[1 + 11 \times 10^{-6}(35 - 20)]$

$\therefore$ $L_{final}(35°C) = 518{,}08547$ m

En consecuencia:

A (−20°C) : La longitud ha cambiado en: 518 − 517,77208 = 0,22792 m

A (35°C) : La longitud ha cambiado en: 518,08547 − 518 = 0,08547 m

21. El coeficiente promedio de expansión volumétrica del tetracloruro de carbono es $5{,}81 \times 10^{-4}\,(°C)^{-1}$. Si un recipiente de acero de 50,0 gal se llena completamente con

tetracloruro de carbono cuando la temperatura es de 10,0°C, ¿cuánto se derramará cuando la temperatura ascienda a 30,0°C?

Resolución :

Datos: $\beta = 5{,}81 \times 10^{-4}\,°C^{-1}$ (tetracloruro de carbono); $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

Volumen inicial = 50,0 gal. ; $T_{inicial} = 10°C$

En primer lugar hallamos el ΔV del tetracloruro de carbono: a $T_{final} = 30°C$

$\Delta V = V\beta\Delta T$ $\Rightarrow$ $\Delta V = (50{,}00)(5{,}81 \times 10^{-4})(30 - 10)$

$\therefore$ $\Delta V = 0{,}581$ gal

Luego hallamos el "ΔV" del recipiente de acero a $T_{final} = 30°C$.

Entonces: $\Delta V_{acero} = V_{inicial}(3\alpha)(\Delta T)$ $\Rightarrow$ $\Delta V = (50{,}00)(3)(11 \times 10^{-6})(20)$

$\therefore$ $\Delta V_{acero} = 0{,}033$ gal.

En consecuencia:

Se derramará la diferencia; es decir:

$\Delta V_{total} = (0{,}581) - (0{,}033) = 0{,}548$ gal.

22. Una barra de acero se somete a una fuerza de estiramiento de 500 N. Su área de sección transversal es de 2,00 cm². Encuentre el cambio en la temperatura que alargaría la barra en la misma cantidad que lo hace la fuerza de 500 N. (*Sugerencia*: Consúltense las tablas 12.1 y 19.2).

Resolución :

Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$; $Y_{acero} = 20 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$

$F_{estir.} = 500$ N ; Área transversal = 2,00 cm²

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\Delta T$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\Delta T$ ... (1)

Por otro lado: $\dfrac{F}{A} = Y \cdot \dfrac{\Delta L}{L}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{AY}$ ... (2)

Igualando: (2) = (1)

Resulta que: $\dfrac{F}{AY} = \alpha\Delta T \therefore$ $\Delta T = \dfrac{F}{AY\alpha}$

Reemplazando datos:

$$\Delta T = \frac{500\text{N}}{(20\times10^{10})(11\times10^{-6})(2\times10^{-4})} \quad \therefore \quad \Delta T = 1{,}136°C$$

23. Una barra de acero de 4,0 cm de diámetro se calienta de modo que su temperatura aumenta en 70°C, y después se fija entre dos soportes rígidos. Se deja que la barra se enfríe hasta su temperatura original. Suponiendo que el módulo de Young para el

acero es $20{,}6 \times 10^{10}\ N/m^2$ y que su coeficiente promedio de expansión lineal es $11 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$, calcule la tensión en la barra.

Resolución :

Datos: $Y_{acero} = 20{,}6 \times 10^{10}\ N/m^2$; $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$T_{final} = T_{inicial} + 70°C$; Tensión = ?

Sabemos que diámetro de la barra = 4,0 cm

Entonces: Área transversal $= \frac{\pi}{4}(4{,}0)^2 = 12{,}6\ cm^2 \equiv 12{,}6 \times 10^{-4}\ m^2$

Por otro lado: $\Delta L = L\alpha\,\Delta T \Rightarrow \Delta L/L = \alpha\Delta T$ ... (1)

Además: $\frac{T}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L/L = T/AY$ ... (2)

Igualando: $\frac{T}{AY} = \alpha\Delta T \Rightarrow T = A\,Y\alpha\Delta T$

Reemplazando:

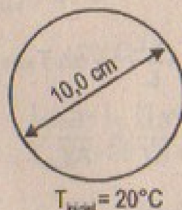
$$\text{Tensión} = (12{,}6 \times 10^{-4})\,.\,(20{,}6 \times 10^{10})\,(11 \times 10^{-6})(T_{inicial} + 70°C - T_{inicial})$$

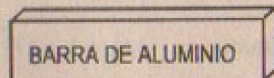
$$\therefore\ \text{Tensión} = 200\ kN$$

24. Un anillo de latón de 10,0 cm de diámetro a 20,0°C se calienta y se hace deslizar sobre una barra de aluminio de 10,01 cm a 20,0°C. Suponiendo que los coeficientes promedio de expansión lineal son constantes, a) ¿a qué temperatura debe enfriarse esta combinación para separarla? ¿Esto puede lograrse? b) ¿Qué ocurre si la barra de aluminio tuviera 10,02 cm de diámetro?

Resolución :

Anillo de latón





Diámetro de aluminio = 10,01 cm

$T_{inicial} = 20°C$

Considerar: $\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Tenemos que: Long. barra – Long. anillo = Long. anillo . α_{Al} (T – 20°)

$$\Rightarrow\ \pi\,(10{,}01 - 10{,}00) = \pi(10{,}00)\ 24 \times 10^{-6}\ (T - 20)$$

$$\therefore\ T_{final} = 61{,}7°C$$

Entonces si a 61,7°C el anillo de latón se desliza sobre la barra de aluminio, en consecuencia a –61,7°C ambos se separarán.

Parte (b)

Si la barra de aluminio tuviera más diámetro la temperatura de deslizamiento del anillo sobre la barra se incrementaría, en consecuencia la temperatura de enfriamiento para separarlas sería más negativa.

25. Las secciones de concreto de cierta autopista se diseñan para tener una longitud de 25 m. Las secciones se vacían y fraguan a 10°C. ¿Qué espaciamiento mínimo debe dejar el ingeniero entre las secciones para eliminar el pandeo si el concreto va a alcanzar una temperatura de 50°C?

Resolución :

Datos: $\alpha_{concreto} = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $T_{inicial} = 10°C$

$L_{inicial} = 25{,}00\ m$; $T_{final} = 50°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T \Rightarrow \Delta L = (25{,}00)(50 - 10)(12 \times 10^{-6})$

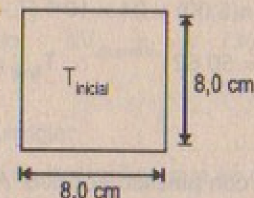
$\therefore\ \Delta L = 0{,}012\ m$

Por lo tanto: Se debe dejar como mínimo 1,2 cm entre las dos secciones.

26. Un hoyo cuadrado de 8,0 cm de cada lado se corta en una lámina de cobre. Calcule el cambio en el área de este hoyo si la temperatura de la lámina aumenta en 50 K.

Resolución :

Inicialmente



Finalmente

LÁMINA DE COBRE

$T_{final} = T_{inicial} + 50\ K$

$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Sabemos que: $A_{inicial} = (8{,}0)^2 = 64\ cm^2 \equiv 64 \times 10^{-4}\ m^2$

Entonces: $\Delta\,\text{Área} = A_{inicial}\,(2\alpha)(\Delta T)$

$$\Rightarrow\ \Delta\,\text{Área} = (64 \times 10^{-4})(2 \times 17 \times 10^{-6})(T_{inicial} + 50\ K - T_{inicial})$$

$$\Rightarrow\ \Delta\,\text{Área} = (64 \times 10^{-4})(34 \times 10^{-6})(50\ K)\ \frac{100°C}{373\ K}$$

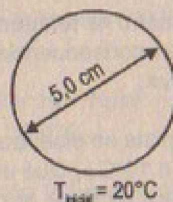
$$\therefore\ \Delta\,\text{Área} = |{+0{,}092}\ cm^2| = 0{,}092\ cm^2$$

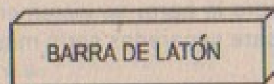
27. A 20°C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5,000 cm, y una barra de latón tiene un diámetro de 5,050 cm. a) ¿Hasta qué temperatura debe calentarse el anillo de modo que se deslice apenas sobre la barra? b) ¿A qué temperatura deben calentarse ambos de manera que el anillo apenas se deslice sobre la barra? ¿El último proceso funcionaría?

Resolución :

Parte (a)

Anillo de aluminio





Diámetro del latón = 5,05 cm

T_{final} = ?

Considerar: $\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$$\text{Long. del latón} - \text{Long. anillo} = \text{Long. anillo} \times \alpha_{Al}\ [T_{final} - 20°C]$$

$$\Rightarrow \quad \pi\ (5{,}05\text{ cm} - 5{,}00) = \pi(5{,}00\text{ cm})\ (24 \times 10^{-6})[T_{final} - 20]$$

$$\therefore \quad T_{final} = 437°C$$

Parte (b)

$$\Delta_{barra\ de\ latón} = L_{barra\ de\ latón} \times \alpha_{latón}\ (T - 20°C)$$

$$\Delta_{anillo\ de\ Al} = \Delta_{barra\ de\ latón} = L_{inicial\ anillo} \times \alpha_{Al}\ (T - 437°C)$$

$$\pi\ (5{,}05) \times 19 \times 10^{-6}\ (T - 20) = \pi(5{,}00) \times 24 \times 10^{-6}\ (T - 437)$$

$$\Rightarrow \quad 24{,}05T = 50\ 521 \qquad \therefore\ T_{final} = 2\ 100°C$$

No funcionará

28. Las armazones para anteojos se fabrican con plástico epóxico. A temperatura ambiente (suponga 20,0°C), las armazones tienen hoyos para lentes circulares de 2,2 cm de radio. ¿A qué temperatura deben calentarse las armazones para insertar lentes de 2,21 cm de radio? El coeficiente promedio de expansión lineal del material epóxico es $1{,}3 \times 10^{-4}\ (°C)^{-1}$.

Resolución :

Datos: $T_{inicial} = 20°C$ $\qquad \alpha_{epóxico} = 1{,}3 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$T_{final} = ?$ $\qquad R_{armazones} = 2{,}20$ cm

$R_{lentes} = 2{,}21$ cm

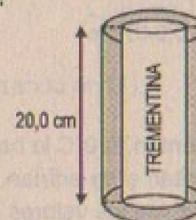
Por condición: $\pi(2{,}21 - 2{,}20)(2{,}21 + 2{,}20) = \pi(2{,}20)^2(2\alpha)(\Delta T)$

$$\Rightarrow \quad (0{,}01)(4{,}41) = (2{,}20)^2(2)(1{,}3 \times 10^{-4})(T_{final} - 20)$$

$$\therefore \quad T_{final} = 55°C$$

29. Un cilindro hueco de aluminio de 20,0 cm de fondo tiene una capacidad interna de 2,000 L a 20,0°C. Está lleno completamente con trementina, y luego se calienta hasta 80,0°C. a) ¿Qué cantidad de trementina se derrama? b) Si ésta se enfría después hasta 20,0°C, ¿a qué distancia debajo de la superficie del borde del cilindro estará la superficie de la trementina?

Resolución :



$\alpha_{cilindro\ hueco} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$V_{interno}\ (20°C) = 2{,}000$ L (trementina)

$\beta_{trementina} = 9 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$T_{final} = 80°C$

$T_{inicial} = 20°C$

Parte (a)

$$\Delta V_{trementina} = V\beta\Delta T = (2 \times 10^3\text{ cm}^3)(9 \times 10^{-4})(80 - 20)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{trementina} = 108\text{ cm}^3$$

Por otro lado: $\Delta V_{aluminio} = V\ .\ (3\alpha)(\Delta T) = (2 \times 10^3)(3)(24 \times 10^{-6})(80 - 20)$

$$\therefore \quad \Delta V_{aluminio} = 8{,}64\text{ cm}^3$$

En consecuencia:

La cantidad de trementina que se derramará será: $\Delta V_{trementina} - \Delta V_{aluminio}$

$$\therefore \quad \Delta V_{(que\ se\ derrama)} = 108 - 8{,}64 = 99{,}4\text{ cm}^3$$

Parte (b):

Sabemos que: $V_{final\ aluminio} = 2\ 000 + 8{,}64 = 2\ 008{,}64\text{ cm}^3$

Entonces cuando se enfría:

$$\Delta V_{aluminio} = -(2\ 008{,}64)(3)(24 \times 10^{-6})\ (60) = -8{,}6773248\text{ cm}^3$$

Entonces: $V_{final\ aluminio} = 2\ 008{,}64 - 8{,}6773248 = 1\ 999{,}962675\text{ cm}^3$

Además: $V_{final\ trementina} = 2\ 008{,}64\text{ cm}^3$

Entonces cuando se enfría:

$$\Delta V_{trementina} = -(2\ 008{,}64)(9 \times 10^{-4})(60) = -108{,}46656\ \text{ cm}^2$$

Entonces: $V_{final\ trementina} = 1\ 900{,}17344\ cm^3$

Luego; considerando constante la altura del cilindro, entonces:

$$A_{final} = 99{,}99813375\ cm^2\ ; \quad h_{final\ trementina} = 19{,}056\ cm$$

En consecuencia:

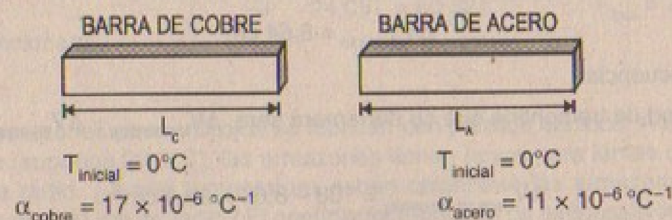
$$\Delta h_{(trementina)} = 20 - 19{,}056 = 0{,}943\ cm$$

30. Una barra de cobre y una barra de acero se calientan. A 0°C la barra de cobre tiene una longitud de L_C. Cuando las barras se calientan o se enfrían, se mantiene una diferencia de 5,0 cm entre sus longitudes. Determine los valores de L_C y L_A.

30A. Una barra de cobre y una barra de acero se calientan. A T(°C) la barra de cobre tiene una longitud de L_C y la de acero una longitud de L_A. Cuando las barras se calientan o se enfrían se mantiene una diferencia de ΔL entre sus longitudes. Determine los valores de L_C y L_A.

Resolución :

Datos:



$T_{inicial} = 0°C$ $\qquad$ $T_{inicial} = 0°C$

$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ $\qquad$ $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Por razonamiento: Inicialmente: $|L_C - L_A| = 5{,}00\ cm$ ... (1)

Finalmente cuando se calientan o se enfrían a la misma temperatura resulta que:

$$|L_{final\ C} - L_{final\ A}| = 5{,}00\ cm$$

Entonces: sabemos que:

$$L_{final\ cobre} = L_C\,(1 + \alpha_C\,\Delta T)$$

$$(-) \quad L_{final\ acero} = L_A\,(1 + \alpha_A\,\Delta T)$$

$$\Rightarrow \quad L_{final\ cobre} - L_{final\ acero} = L_C - L_A + \Delta T\,(L_C\,\alpha_C - L_A\,\alpha_A)$$

$$\Rightarrow \quad 5{,}00\ cm = 5{,}00\ cm + \Delta T\,(L_C\,\alpha_C - L_A\,\alpha_A)$$

$$\Rightarrow \quad L_C\,\alpha_C = L_A \cdot \alpha_A$$

Reemplazando: $L_C\,(17 \times 10^{-6}) = L_A\,(11 \times 10^{-6})$

$$\therefore \quad L_C = \frac{11}{17}\,L_A$$

Reemplazando en (1): $\quad |L_A \times \frac{11}{17} - L_A| = 5{,}00\ cm$

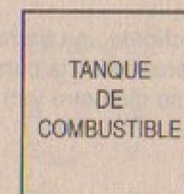
$\therefore$ Long. acero = 14,2 cm

En consecuencia: $\quad$ Long. cobre $= \frac{11}{17}\,(14{,}2) = 9{,}2\ cm$

31. El tanque de combustible de un automóvil se llena hasta el tope con 45 L de gasolina a 10°C. Inmediatamente después, el vehículo se estaciona en un sitio donde el sol cae de lleno y la temperatura es de 35°C. ¿Cuánto se derrama de gasolina del tanque como consecuencia de la expansión? (Ignore la expansión del tanque).

Resolución :

Datos:



Volumen inicial = 45 L

$T_{inicial} = 10°C$

$T_{final} = 35°C$

$\beta_{gasolina} = 9{,}6 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$$\Delta V_{gasolina} = V_{inicial}\,\beta\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{gasolina} = (45{,}00\ L)(9{,}6 \times 10^{-4})(35° - 10°)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{gasolina} = 1{,}08\ L$$

32. Un matraz volumétrico de vidrio hecho de Pirex se calibra a 20,0°C. Se llena hasta la marca de 100 mL con acetona a 35,0°C. a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando ésta se enfría a 20,0°C? b) ¿Qué tan significativo es el cambio de volumen del matraz?

Resolución :

MATRAZ DE VIDRIO



$T_{inicial} = 20°C$ (matraz)
$V_{inicial} = 100$ mL (acetona)
$T_{inicial} = 35°C$ (acetona)
$\alpha_{vidrio} = 3,2 \times 10^{-6}$ °C^{-1}
$\beta_{acetona} = 1,5 \times 10^{-4}$ °C^{-1}

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = V\beta\Delta T$

$\Rightarrow V_{final} = V(1 + \beta\Delta T)$

$\Rightarrow V_{final\ de\ la\ acetona} = 100\ mL\ (1 - 1,5 \times 10^{-4}(35 - 20))$

$\therefore V_{final\ (acetona)} = 99,775\ mL$

Por otro lado: $V_{final\ (matraz)} = V_{inicial}(3\alpha_{vidrio})(35 - 20)$

$\Rightarrow V_{final} = 100\ mL\ [(3)(3,2 \times 10^{-6})(20) + 1]$

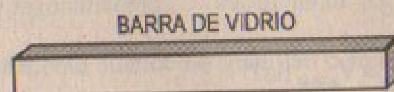
$\therefore V_{final\ (matraz)} = 100,0192\ mL$

Parte (b)

Como el volumen final del matraz es: 100,0192 mL esto quiere decir que el ΔV = 100,0192 − 100,00 = 0,0192 mL es una cantidad bastante despreciable.

33. El elemento activo de cierto láser está hecho de una barra de vidrio de 30,0 cm de largo por 1,5 cm de diámetro. Si la temperatura de la barra aumenta en 65°C, encuentre el aumento en a) su longitud, b) su diámetro y c) su volumen. (Considere $\alpha = 9,0 \times 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$).

Resolución :



Long. Inicial barra = 0,3 m
Diametro de la barra = 1,5 cm
$\Delta T = 65°C$
$\alpha_{vidrio} = 9 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta L = L\alpha\Delta T$

$\Rightarrow \Delta L = (0,3\ m)(9 \times 10^{-6})(65°C)$

$\therefore \Delta L_{(barra)} = 175,5 \times 10^{-6}\ m \cong 0,01755\ cm \cong 0,176\ mm$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta A = A(2\alpha)\Delta T$

$\Rightarrow A_{final} = A(2\alpha\Delta T + 1)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4}(\text{diámetro})^2 = \frac{\pi}{4}(\text{diámetro inicial})^2(1 + 2(9 \times 10^{-6})(65°))$

$\therefore$ Diámetro final = 1,5008772 cm = 15,008772 mm

En consecuencia:

Δ diámetro = 1,5008772 − 1,5000 = 0,0008772 cm ≅ 8,78 μm

Parte (c)

$\Delta V = V\beta\Delta T = V(3\alpha)(\Delta T)$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{(30)}{4}(\pi)(1,5)^2\ [3(9 \times 10^{-6})(65°)$

$\therefore \Delta V_{(barra)} = 0,093\ cm^3 \cong 93\ mm$

DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE UN GAS IDEAL

34. Un gas ideal se mantiene en un recipiente a volumen constante. Al principio, su temperatura es de 10,0°C y su presión de 2,50 atm. ¿Cuál es la presión cuando la temperatura es de 80,0°C?

Resolución :

Datos: V = constante

$T_{inicial} = 10°C$; $T_{final} = 80,0°C$

$P_{inicial} = 2,50$ atm ; $P_{final} = ?$

Sabemos que: $\frac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{nR}{V}$ ... (1)

Además: $\frac{P_{final}}{T_{final}} = \frac{nR}{V}$ ... (2)

Como (2) = (1) $\Rightarrow \frac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}}{T_{final}}$

$\Rightarrow \frac{2,50\ atm}{(10+273)K} = \frac{P_{final}}{(80+273)K} \therefore P_{final} = 3,12\ atm$

35. Un globo lleno de helio tiene un volumen de 1,00 m^3. A medida que asciende por la atmósfera de la Tierra su volumen se expande. ¿Cuál es su nuevo volumen (en metros cúbicos) si su temperatura y presión originales son 20,0°C y 1,00 atm, y su temperatura y presión finales son −40,0°C y 0,10 atm?

Resolución :

Datos: $V_{inicial} = 1,00\ m^3$; $V_{final} = ?$

$T_{inicial} = 20°C$; $T_{final} = -40°C$

$P_{inicial} = 1,00$ atm ; $P_{final} = 0,10$ atm

Entonces decimos que: $\dfrac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1{,}00\ atm)(1{,}00\ m^3)}{(20+273)K} = \frac{(0{,}10)atm \times V_{final}}{(-40+273)\ K}$$

$$\therefore \quad V_{final} = 7{,}95\ m^3$$

36. Un auditorio tiene dimensiones de 10,0 m × 20,0 m × 30,0 m. ¿Cuántas moléculas de aire se necesitan para llenar el auditorio a 20°C y 101 kPa de presión?

Resolución:

Datos: $V = (10{,}0\ m) \times (20{,}0\ m) \times (30{,}0\ m) = 6 \times 10^3\ m^3$

$P = 101\ kPa$; $T = 20°C$; $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$

$n = ?$; $R = 8{,}31\ J/mol.K$

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad \frac{(101\times10^3\ N/m^2)(6{,}00\times10^3\ m^3)}{(20+273)(8{,}31\ N.m/mol.K)} = n$$

$$\therefore \quad n = 2{,}5 \times 10^5\ moles$$

En consecuencia:

$$n.° \text{ moléculas} = n \times N_A = (2{,}5 \times 10^5)(6{,}023 \times 10^{23}) = 15 \times 10^{28} \text{ moléculas}$$

37. Un tanque lleno de oxígeno (O_2) contiene 12,0 kg de oxígeno bajo una presión manométrica de 40,0 atm. Determine la masa del oxígeno que se ha extraído del tanque cuando la lectura de presión es de 25,0 atm. Suponga que la temperatura del tanque permanece constante.

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{atm} + P_{man} = 1{,}00\ atm + 40{,}00\ atm = 41{,}00\ atm$

$P_{final} = P_{atm} + P_{man} = 1{,}00\ atm + 25{,}00\ atm = 26{,}00\ atm$

$M_{O_2\ inicial} = 12{,}00\ kg$

$T_{inicial} = T_{final}$

Sabemos que: $n_{moles} = \dfrac{12\times10^3\ g}{32\ g/mol}$ $\therefore$ $n_{moles\ inicial} = 375$

Entonces: En 375 moles —— 41,00 atm
x moles —— 26,00 atm

$$\therefore \quad x_{moles} = \frac{375\times26}{41{,}00}$$

En consecuencia: $M_{O_2} = (32\ g/mol)\ (375 \times 26/41{,}00)\ mol = 7{,}609\ kg$

Luego se ha extraído = 12,00 kg − 7,609 kg = 4,39 kg

38. Con un medidor de presión de las llantas de un automóvil se llena una llanta a una presión manométrica de 32 lb/pulg² en una mañana fría, cuando la temperatura es de −10°C. ¿Cuál sería la lectura de presión de la llanta cuando ésta se caliente hasta 35°C?

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{atm} + P_{man} = 1\ atm + 32\ lb/pulg^2$

$P_{inicial} = -10°C <> 263\ K$

$T_{final} = 35\ °C <> 308\ K$

$P_{final} = ?$

Sabemos que: $P_{man} = 32\ \dfrac{lb}{pulg^2} \times \dfrac{0{,}445\ kg}{1\ lb} \times \dfrac{1\ pulg^2}{(2{,}54)^2 \times 10^{-4} m^2} \times (9{,}8)\ m/s^2$

$$\therefore \quad P_{man} = 21{,}63 \times 10^4\ N/m^2 \equiv 2{,}16 \times 10^5\ Pa$$

Pero: $1\ atm <> 101 \times 10^3\ Pa \Rightarrow 1\ Pa = \dfrac{1}{101} \times 10^{-3}\ atm$

Luego: $P_{manométrica} = 1\ atm + 2{,}14\ atm = 3{,}14\ atm$

Por otro lado:

Por dilatación: a mayor temperatura mayor volumen ∴ menor presión

Entonces: si: 263 K —— 3,14 atm
308 K —— x atm (Regla de tres inverso)

$$\therefore \quad x = \frac{263\times3{,}14}{308} = 2{,}68\ atm$$

39. La masa de un globo aerostático y su cargamento (sin incluir el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior está a 10,0°C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m³. ¿A qué temperatura debe calentarse el aire en el globo antes de que éste empiece a ascender? (La densidad del aire a 10,0°C es de 1,25 kg/m³).

Resolución:

Datos: $M_{globo\ (sin\ aire)} = 200\ kg$; Volumen del globo $= 400\ m^3$

$T_{aire\ exterior} = 10°C$; $\rho_{aire}\ (10°C) = 1{,}25\ kg/m^3$

$P_{aire\ exterior} = (10°C) = 101\ kPa$; $T_{final} = ?$

Sabemos que Volumen final $= 400\ m^3 = \dfrac{M_{total}}{\rho_{aire}} = \dfrac{M_{total}}{1{,}25}$

$$\therefore \quad M_{total} = 500\ kg \Rightarrow M_{aire} = 300\ kg$$

Luego: Volumen inicial $= \frac{M_{aire}}{\rho_{aire}} = \frac{300}{1,25} = 240\ m^3$

Entonces:

Por el principio de los gases: $\frac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{V_{final}}{T_{final}}$

Entonces: $\frac{240\ m^3}{(10+273)K} = \frac{400\ m^3}{T_{final}} \Rightarrow T_{final} = \frac{(400)\ (283)}{240}$

$\therefore\ T_{final} = 472\ K$

40. Un tanque que tiene un volumen de 0,10 m³ contiene gas helio a 150 atm. ¿Cuántos globos puede inflar el tanque si cada globo lleno es una esfera de 0,30 m de diámetro a una presión absoluta de 1,2 atm?

Resolución:

Datos: Volumen del tanque = 0,10 m³ ; $P_{gas\ hielo} = 150$ atm
Diámetro de cada globo = 0,30 m; $P_{abs\ c/g} = 1,2$ atm
n.° de globos = ?

Volumen de cada globo $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{0,3}{2}\right)^3$

$\therefore$ Volumen de cada globo = 0,0141 m³

Por otro lado:

$P_{vol.\ tanque} \times V_{tanque} = \#\ n \times Vol./globo \times nP_{abs/globo}$ (ley de Dalton)

$\Rightarrow$ (150 atm)(0,10) m³ = n² × (0,0141 m³)(1,2 atm)

$\therefore\ n^2 = \frac{(150)(0,10)}{(0,0141)(1,2)} = \sqrt{884}$ globos ≈ 30 globos

41. Un cuarto de 80,0 m³ de volumen contiene aire cuya masa molar promedio es de 29,0 g/mol. Si la temperatura del cuarto se eleva de 18,0°C a 25°C, ¿qué masa de aire (en kg) saldrá del cuarto? Suponga que la presión del aire en el cuarto se mantiene en 101 kPa.

41A. Un cuarto de volumen *V* contiene aire cuya masa molar promedio es *M*. Si la temperatura del cuarto se eleva de T_1 a T_2, ¿qué masa de aire (en kg) saldrá del cuarto? Suponga que la presión del aire en el cuarto se mantiene en P_0.

Resolución:

Datos: Volumen del cuarto = 80,00 m³
$M_{prom.aire} = 29,0$ g/mol ; R = 8,31 J/mol.K
$T_{inicial} = 18°C$; $T_{final} = 25°C$
$P_{constante} = 101$ kPa

Inicialmente: $P \times V_{inicial} = \frac{m_{aire\ inicial}}{M} \times R \times T_{inicial}$

$\Rightarrow\ m_{aire\ inicial} = \frac{PVM}{RT_{inicial}} = \frac{(101\times10^3\ N/m^2)(80\ m^3)(29,0\times10^{-3}\ kg/mol)}{(8,31\ J/mol.K)(18+273)}$

$\therefore\ m_{aire\ inicial} = 96,89$ kg

Finalmente: $P \times V_{final} = \frac{m_{aire\ final}}{M} \times R \times T_{final}$

$\Rightarrow\ M_{aire\ final} = \frac{P\times V\times M}{R\times T_{final}} = \frac{(101\times10^3 N/m^2)(80 m^3)(29\times10^{-3} kg/mol)}{(8,31 J/mol.K)\ (25+273)}$

$\therefore\ M_{aire\ final} = 94,62$ kg

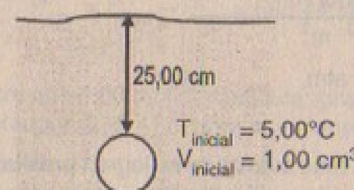
En consecuencia:
La cantidad de masa de aire que saldrá será: 96,89 – 94,62 = 2,28 kg

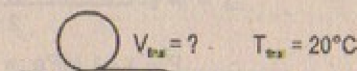
42. A 25,0 m debajo de la superficie del mar (densidad = 1 025 kg/m³), donde la temperatura es 5,00°C, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de 1,00 cm³. Si la temperatura de la superficie del mar es igual a 20,0°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de que se rompa en la superficie?

42A. A una profundidad *h* debajo de la superficie del mar (densidad = ρ), donde la temperatura es T_c, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen V_0. Si la temperatura de la superficie del mar es T_h, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de que se rompa en la superficie?

Resolución:

Al inicio: Al final





$\rho_{agua\ de\ mar\ (5°C)} = 1\ 025\ kg/m^3$

Sabemos que a 25,00 m de profundidad la presión $= P_{atm} + \rho gh$

Entonces: $P_{total} = 101\ kPa + (1\ 025)(9,8)(25) = 352,1\ kPa$

Además en la superficie la presión $= P_{atm} = 101$ kPa

Luego:

Por la ley de los gases: PV = nRT

Entonces: $\frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}}$

$\Rightarrow \frac{(352{,}1 \times N/m^2)(10^{-6} m^3)}{278 K} = \frac{(101\ kN/m^2)(V_{final})}{293\ K}$

$\therefore V_{final} = \frac{(352{,}1\ kPa)(10)^{-6}(293\ K)}{(101\ kPa)(278\ K)} <> 3{,}67\ cm^3$

43. Si 9,0 g de agua se ponen dentro de una olla de presión de 2,0 L y se calientan hasta 500°C, ¿cuál es la presión dentro del recipiente?

Resolución:

Datos: Masa de agua = 9,0 g
Volumen de la olla = 2,0 L <> $2 \times 10^3\ cm^3$ <> $2 \times 10^{-3}\ m^3$
T = 500°C <> 773 K ; R = 8,31 J/mol.K
P = ?

Sabemos que: PV = nRT

Por otro lado: M_{H_2O} = 18 g/mol

Entonces: $PV = \frac{m_{H_2O}}{M} RT$

$\Rightarrow P(2 \times 10^{-3}\ m^3) = \frac{9{,}0\ g}{18\ g/mol} \times (8{,}31\ J/mol.K)(773\ K)$

$\Rightarrow P = \frac{(0{,}5\ mol)\left(8{,}31\ \frac{N.m}{mol.K}\right)(773K)}{2 \times 10^{-3}\ m^3}$

$\therefore P = 1{,}61\ MPa \equiv 16{,}1\ atm$

44. En sistemas de vacío con la tecnología más avanzada se logran presiones tan bajas como $1{,}00 \times 10^{-9}$ Pa. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1,00 m^3 a esta presión si la temperatura es de 27°C.

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00 \times 10^{-9}\ N/m^2$
Volumen = 1,00 m^3 ; $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$
T = 27°C ≡ 300 K ; R = 8,31 J/mol.K
$N_{moléculas}$ = ?

Aplicando: PV = nRT $\Rightarrow PV = \frac{N_{moléculas}}{N_A} \times R\ .\ T$

$\Rightarrow (1{,}00 \times 10^{-9})(1{,}00) = \frac{N_{moléculas}}{6{,}023 \times 10^{23}} \times (8{,}31)(300\ K)$

$\therefore N_{moléculas} = 2{,}416 \times 10^{11}$ moléculas

45. La llanta de una bicicleta se llena con aire a una presión manométrica de 550 kPa y 20°C. ¿Cuál es la presión manométrica de la llanta después de un paseo en un día caluroso cuando la temperatura del aire de la llanta es de 40°C? (Suponga volumen constante y presión atmosférica constante de 101 kPa).

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{man} + P_{atm}$ = 550 kPa + 101 kPa = 651 kPa
$T_{inicial}$ = 20°C <> 293 K
Volumen = cte
T_{final} = 40°C <> 313 K
$P_{man\ final}$ = ?

Por dato: $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$ = cte

$\Rightarrow \frac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \frac{651\ kPa}{293\ K} = \frac{P_{final}}{313\ K}$

$\therefore P_{final}$ = 695,44 kPa

Como: $P_{final} = P_{atm} + P_{man\ final}$

$\Rightarrow P_{man} = P_{final} - P_{atm}$ = 695,44 kPa − 101 kPa = 594 kPa

46. Demuestre que 1,00 mol de cualquier gas a presión atmosférica (101 kPa) y temperatura estándar (273 K) ocupa un volumen de 22,4 L.

Resolución:

Datos:

Por demostrar que:

En un mol (1,00 mol) de cualquier gas a presión atmosférica (101 kPa) y temperatura estándar (273 K) ocupa un volumen de 22,4 L.

Sabemos por la ecuación de estado que: PV = nRT

Entonces: $(101 \times 10^3\ Pa)\ V = (1{,}00\ mol)\left(8{,}31\ \frac{J}{mol.K}\right)(273\ K)$

$\therefore V = 22{,}4 \times 10^{-3}\ m^3$

Haciendo la conversión:

$$V = 22{,}4 \times 10^{-3}\ m^3 \times \frac{10^6\ mL}{1\ m^3} = 22{,}4 \times 10^3\ mL = 22{,}4\ \text{litros} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

47. La llanta de un automóvil se infla usando aire originalmente a 10°C y presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime hasta 28% de su volumen original y la temperatura aumenta a 40°C. ¿Cuál es la presión de la llanta? Después de que la llanta se maneja a alta velocidad, la temperatura del aire dentro de la misma se eleva a 85°C y su volumen interior aumenta 2%. ¿Cuál es la nueva presión (absoluta) de la llanta en pascales?

Resolución:

Datos: $T_{inicial} = 10°C <> 283\ K$
$P_{inicial} = P_{atm} = 101\ kPa$

Parte (a) $T_{final} = 40°C <> 313\ K$
$P_{final} = ?$

Sea: $V_{inicial} = V \Rightarrow V_{final} = \frac{28}{100} V$

Luego:

Aplicando: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \frac{(101\times10^3 Pa)\ V}{283\ K} = \frac{P_{final} \times 28V}{(313\ K)(100)}$$

$$\therefore \quad P_{final} = 3{,}99 \times 10^5\ Pa = 400\ kPa$$

Parte (b)

$T'_{final} = 85°C <> 358\ K$

$$\text{Volumen final}' = 2\%\ V_f = \frac{2}{100}\left(\frac{28}{100}\right)V = 56 \times 10^{-4}\ V$$

Entonces aplicando: $PV = nRT$

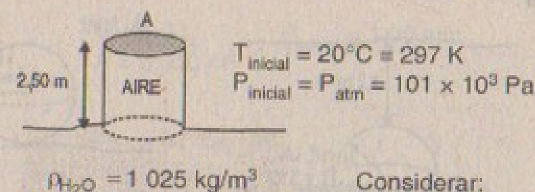
$$\Rightarrow \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}} = \frac{P_{final}' \cdot V_{final}'}{T_{final}'} \Rightarrow \frac{(101\times10^3 Pa)(28)V}{(313K)(100)} = \frac{P_{final} \times (56V)}{(358K)(100)(100)}$$

$$\therefore \quad P'_{final} = 448\ kPa$$

48. Una campana de buzo en forma de cilindro, con altura de 2,50 m, está cerrada en el extremo superior y abierta en el extremo inferior. La campana desciende del aire al interior del agua del mar (ρ = 1,025 g/cm³). Al principio el aire en la campana está a 20,0°C. La campana baja a una profundidad (medida hasta el fondo de la campana) de 45,0 brazas u 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es 4,0°C, y la campana está en equilibrio térmico con el agua. a) ¿A qué altura el agua de mar asciende en la campana? b) ¿A qué presión mínima debe elevarse el aire en la campana para expulsar el agua que ha entrado?

Resolución:

Al inicio:

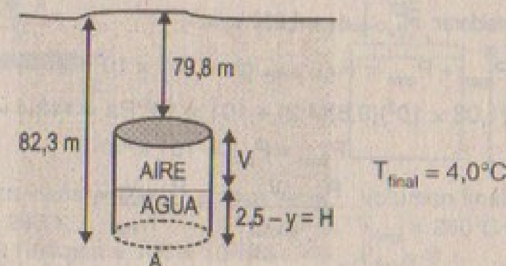


$T_{inicial} = 20°C = 297\ K$
$P_{inicial} = P_{atm} = 101 \times 10^3\ Pa$

$\rho_{H_2O} = 1\ 025\ kg/m^3$

Considerar: $g = 9{,}8\ m/s^2$

Al final:



$T_{final} = 4{,}0°C$

Parte (a)

Por ley universal de los gases:

$$\frac{P_{inicial} V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{atm} \cdot A(2{,}5\ m)}{293\ K} = \frac{[P_{atm} + \rho_{H_2O}\, g(79{,}8)]\, Ay}{277\ K}$$

$$\Rightarrow \frac{(101\times10^3 N/m^2)(2{,}5\ m)}{293\ K} = \frac{[101\times10^3 N/m^2 + (1025)(9{,}8)(79{,}8 m)]}{277\ K} \cdot y$$

$$\therefore \quad y = 0{,}2645 <> 26{,}45\ cm$$

En consecuencia: $H = 2{,}5\ m - 0{,}2645\ m \approx 2{,}236\ m$ (asciende el agua de mar)

Parte (b)

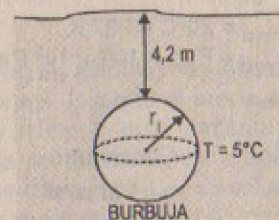
El aire en la campana debe elevarse a una presión mínima $= \frac{F_{agua}}{A} = \frac{W_{agua\ (dentro)}}{A}$

$$\therefore \quad P_{mínima} = \frac{\rho_{H_2O} gAH}{A} = (1\ 025)(9{,}8)(2{,}236\ m) \approx 22{,}5\ kPa$$

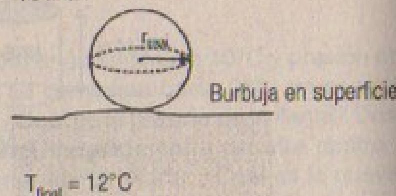
49. Una burbuja de gas de los pantanos se eleva desde el fondo de un lago de agua dulce, a una profundidad de 4,2 m y una temperatura de 5,0°C, hasta la superficie, donde la temperatura del agua es de 12°C. ¿Cuál es la proporción de los diámetros de la burbuja en los dos puntos? (Suponga que el gas de la burbuja está en equilibrio térmico con el agua en cada posición).

Resolución :

Al inicio:



Al final:



$T_{final} = 12°C$

Considerar: $\rho_{H_2O\ dulce} = 1\,030\ kg/m^3$

$$P_{inicial} = P_{man} + P_{atm} = \rho_{H_2O\ dulce}\,gh + 101\times10^3\ Pa$$

$$\Rightarrow\quad P_{inicial} = (1{,}03\times10^3)(9{,}8)(4{,}2) + 101\times10^3\ Pa = 143{,}4\times10^3\ Pa$$

Por otro lado: $P_{final} = P_{atm} = 101\ kPa$

Luego: $$\frac{P_{inicial}V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(143{,}4\times10^3)\left[\frac{4}{3}\pi r_{inicial}^3\right]}{278\ K} = \frac{(101\times10^3)\left[\frac{4}{3}\pi r_{final}^3\right]}{285\ K}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{143{,}4\times10^3}{278}\times\frac{(\text{Diámetro inicial})^3}{8} = \frac{(101\times10^3)}{285}\times\frac{(\text{Diámetro final})^3}{8}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\text{Diámetro final}}{\text{Diámetro inicial}} = \sqrt[3]{\frac{(143{,}4)(285)\times10^3}{(101)(278)\times10^3}}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{Diámetro final}}{\text{Diámetro inicial}} = 1{,}13$$

50. Un cilindro expansible tiene su parte superior conectada a un resorte de $2{,}0\times10^3$ N/m de constante de fuerza (Fig. P19.50). El cilindro está lleno con 5,0 L de gas con el resorte sin estirar a 1,0 atm y 20°C. a) Si la tapa tiene un área de sección transversal de 0,010 m² y masa despreciable, ¿qué tan alto sube la tapa cuando la temperatura aumenta a 250°C? b) ¿Cuál es la presión del gas a 250°C?

50A. Un cilindro expansible tiene su parte superior conectada a un resorte de constante de fuerza *k* (Fig. P19.50). El cilindro está lleno con V litros de gas con el resorte sin alargar a presión atmosférica P_0 y temperatura T_0. a) Si la tapa tiene un área de sección transversal A y masa despreciable, ¿qué tan alto sube cuando la temperatura aumenta a *T* ? b) ¿Cuál es la presión del gas a esta temperatura más alta?

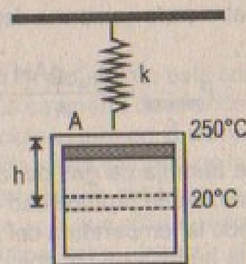


Figura P19.50

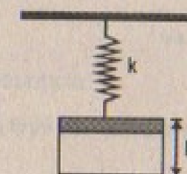
Resolución :

$k = 2{,}0\times10^3$ N/m ; $V = 5{,}0$ L ; $P_{inicial} = 1{,}00$ atm

$T_{inicial} = 20°C \equiv 293$ K ; $A = 0{,}010$ m²

Parte (a)

Al inicio:

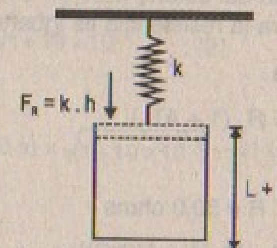


Volumen inicial = 5,0 L

$T_{inicial} = 293$ K

$P_{inicial} = 1{,}00$ atm $\equiv 101\times10^3$ Pa

Al final:



Volumen final = ?

$T_{final} = 250°C \equiv 523$ K

$P_{final} = ?$

Sabemos que: $V_{inicial} = 5\times10^3\ cm^3 = A.L = (0{,}010\times10^4\ cm^2)\,L$

$$\therefore\quad L = 50{,}0\ cm \equiv 0{,}5\ m$$

Por otro lado: $P_{final} = -P_{atm} + \frac{F_R}{A}\quad\Rightarrow\quad P_{final} = -P_{atm} + \frac{kh}{A}$ ... (1)

Además: por la ley de los gases:

$$\frac{P_{inicial}V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(101\times10^3 N/m^2)(5\times10^{-3}m^3)}{293\ K} = \frac{(-A).\,101\times10^3 N/m^2 + kh}{A}\ \frac{A\ (h+t)}{523\ K}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(101)(5)(523)}{293} = \left[-1010 + 2{,}0\times10^3(h)\right](h+0{,}5)$$

Resolviendo la ecuación resulta que:

$$h = 0{,}84\ m \equiv 84\ cm$$

Parte (b)

De (1): $$P_{final} = \frac{kh}{A} - P_{atm}$$

$$\Rightarrow\quad P_{final} = \frac{(2{,}0\times10^3)(0{,}84)}{0{,}010} - 101\times10^3$$

$$\therefore\quad P_{final} = 67\times10^3\ Pa$$

PROBLEMAS ADICIONALES

51. Con frecuencia se hacen mediciones de temperatura precisas utilizando el cambio en la resistencia eléctrica de un metal con la temperatura. La resistencia varía de acuerdo con la expresión $R = R_0(1 + AT_C)$, donde R_0 y A son constantes. Cierto elemento tiene una resistencia de 50,0 ohms a 0°C y 71,5 ohms en el punto de congelación del estaño (231,97°C). a) Determine las constantes A y R_0. b) ¿A qué temperatura la resistencia es igual a 89,0 ohms?

Resolución :

Datos: $R = R_0(1 + AT_C)$

Parte (a)

a 0°C ⇒ R = 50,0 ohms

$\Rightarrow \quad 50\ \Omega = R_0[1 + A(0°C)] \qquad \therefore \quad R_0 = 50\ \Omega$

a 231,97°C ⇒ R = 71,5 ohms

$\Rightarrow \quad 71{,}5\ \Omega = 50\ \Omega\,[1 + A(231{,}97°C)] \qquad \therefore \quad A = 1{,}85 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Parte (b)

a T°C ⇒ R = 89 ohms

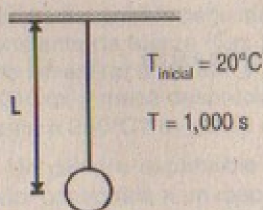
$\Rightarrow \quad 89\ \Omega = 50\ \Omega\,[1 + 1{,}85 \times 10^{-3}(T)]$

$\therefore \quad T = 421°C$

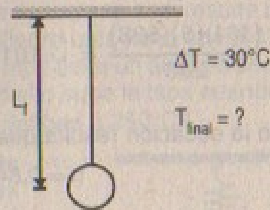
52. Un reloj de péndulo con un sistema de suspensión de latón tiene un período de 1,000 s a 20,0°C. Si la temperatura aumenta a 30,0°C, a) ¿en qué medida cambia el período, y b) ¿cuánto tiempo se atrasa o adelanta el reloj en una semana?

Resolución :

Inicialmente:



Finalmente:



Considerar: $g = 9{,}8\ m^2/s^2$

Sabemos que: $\quad T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Entonces: $\quad 1{,}000\ s = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}} \qquad ...(1)$

Al final: $\quad T_{final} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L_f}{g}}$

Pero: $\quad L_f = L(1 + \alpha\Delta T) \quad$ donde $\quad \alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\Rightarrow \quad L_f = L(1 + 19 \times 10^{-6}[30 - 20]) = L(1 + 19 \times 10^{-5})$

Luego: $\quad T_{final} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}} \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} \quad ...(2)$

En consecuencia:

El período final aumentará en $\Delta T_{final} = (1\,000\ s) \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} - (1\,000\ s) = 0{,}0949\ s$

Parte (b)

En 1 semana < > 7 días, se realiza 14 revoluciones.

1 rev se realiza en: $T_{inicial} \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}}\ s$

Entonces 14 rev se realizará en: $T_{inicial} \times 14 \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}}\ s$

Luego: el reloj se adelantará: $\quad T_{final} - T_{inicial}$

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} - 1\right) 14\,(1\,000\ s) = 1{,}3286 \times 10^{-3}\ s$

53. La placa rectangular que se muestra en la figura P19.53 tiene un área $A = lw$. Si la temperatura aumenta en ΔT, muestre que el incremento del área es $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$, donde α es el coeficiente promedio de expansión lineal. ¿Qué aproximación supone esta expresión? (*Sugerencia*: Advierta que cada dimensión aumenta de acuerdo con $\Delta l = \alpha l \Delta T$).

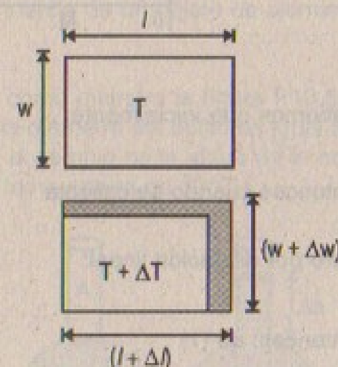


Figura P19.53

Resolución :

Por demostrar que: $\quad \Delta A = 2\alpha A \Delta T$

Sabemos que: $\quad A_{inicial} = w.l$

$A_{final} = (l + \Delta l)(w + \Delta w)$

Entonces: $\quad \Delta A = (l + \Delta l)(w + \Delta w) - wl \qquad ...(1)$

Por otro lado: $\Delta l = l\alpha\Delta T \Rightarrow \Delta l + l = l(1 + \alpha\Delta T)$ ... (2)

$\Delta w = w\alpha\Delta T \Rightarrow \Delta w + w = w(1 + \alpha\Delta T)$ ... (3)

Multiplicando (2) y (3)

$$(\Delta l + l)(\Delta w + w) = lw(1 + \alpha\Delta T)^2$$

$$\Rightarrow (\Delta l + l)(\Delta w + w) - wl = wl(1 + \alpha\Delta T)^2 - wl$$

$$\Rightarrow \Delta A = wl[(1 + \alpha\Delta T - 1)(1 + \alpha T + 1)]$$

$$\Rightarrow \Delta A = wl[(\alpha\Delta T)(2 + \alpha\Delta T)]$$

$$\Rightarrow \Delta A = wl[(2\alpha\Delta T) + (\alpha\Delta T)^2]$$

Nota: Si aproximamos: $\alpha\Delta T << 1 \Rightarrow \therefore (\alpha\Delta T)^2 \approx 0$

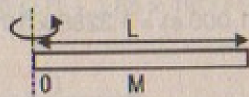
$\therefore \Delta A = w.l(2\alpha\Delta T) = A\,2\alpha\Delta T$ l.q.q.d.

54. Considere un objeto con cualquiera de las formas presentadas en la tabla 10.2. ¿Cuál es el aumento porcentual en el momento de inercia del objeto cuando se calienta de 0°C a 100°C, si está compuesto por a) cobre o b) aluminio? (Vea la tabla 19.2. Suponga que los coeficientes promedio de expansión lineal no varían entre 0°C y 100°C).

Resolución :

Parte (a)

Sea:



$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\Delta T = 100°C$

Sabemos que inicialmente: $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ a 0°C

Entonces cuando se calienta $I_0 = \frac{1}{3}M(L_1)^2$ ... (1)

Pero por dilatación lineal: $L_1 = L(1 + 17 \times 10^{-6}(10)^2)$

$\therefore L_1 = L(1 + 10^{-4} \times 17)$

Entonces: de (1)

$$I_0 = \frac{1}{3}M[L(1 + 10^{-4} \times 17)]^2 = \frac{1}{3}ML^2(1 + 10^{-4} \times 17)^2$$

En consecuencia: si: en $\frac{1}{3}ML^2$ ———— 100%

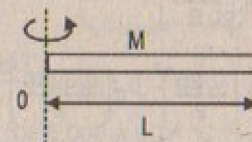
$\frac{1}{3}ML^2(1+10^{-4} \times 17)^2$ ———— x

$\therefore$ x = 100,34%

Luego el aumento porcentual en el momento de inercia de un objeto cuando se calienta a 100°C es del 0,34%

Parte (b)

Sea:



$\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Sabemos que inicialmente: $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ a 0°C

Entonces cuando se calienta a 100°C: $I_0 = \frac{1}{3}M\,L_1^2$ ... (1)

Pero por dilatación lineal: $L_1 = L(1 + 240 \times 10^{-6}(10^2))$

$\therefore L_1 = L(1 + 24 \times 10^{-4})$

Entonces de (1): $I_0 = \frac{1}{3}ML^2(1 + 24 \times 10^{-4})^2$

Como: $\frac{1}{3}ML^2$ ———— 100%

$\Rightarrow \frac{1}{3}ML^2(1+24\times10^{-4})^2$ ——— x $\therefore$ x = 100,48%

En consecuencia:

El aumento porcentual en el momento de inercia de un objeto de aluminio cuando se calienta a 100°C es de 0,48%.

55. Un termómetro de mercurio se construye como muestra la figura P19.55. El tubo capilar tiene un diámetro de 0,0040 cm, y el diámetro del bulbo es igual a 0,25 cm. Ignore la expansión del vidrio y encuentre el cambio de la altura de la columna de mercurio correspondiente a un cambio de temperatura de 30°C.

55A. Un termómetro de mercurio se construye como muestra la figura P19.55. El tubo capilar tiene un diámetro d_1, y el diámetro del bulbo es d_2. Ignore la expansión del vidrio y encuentre el cambio de la altura de la columna de mercurio correspondiente a un cambio de temperatura ΔT.

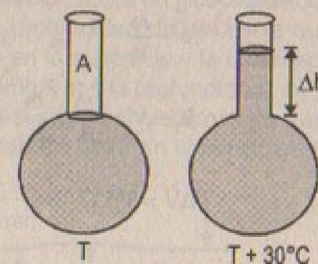


Figura P19.55

Resolución :

Datos: Diámetro del tubo capilar = 0,004 cm

Diámetro del bulbo = 0,25 cm

Sabemos que: $\beta_{mercurio} = 1{,}82 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

Además: $V_{inicial} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3$

$$V_{final} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3 + \pi\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2 \Delta h$$

$$\therefore \quad \Delta V = \pi\Delta h\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2$$

Pero: $\Delta V = V\beta\Delta T$

$$\Rightarrow \quad \pi.\Delta h\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2 = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3(1{,}82 \times 10^{-4})(T + 30°C - T)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{4}(0{,}0040)^2 = \frac{4}{3}\frac{(0{,}25)^3}{8}(1{,}82 \times 10^{-4})(30)$$

$$\therefore \quad \Delta h = 3{,}55 \text{ cm}$$

56. Un líquido tiene una densidad ρ. a) Muestre que el cambio fraccional en la densidad para un cambio de temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$. ¿Cuál es el significado del signo negativo? b) El agua dulce tiene una densidad máxima de 1,000 g/cm³ a 4,0°C. a 10,0°C, su densidad es 0,9997 g/cm³. ¿Cuál es el valor de β para el agua a lo largo de este intervalo de temperatura?

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta\Delta T$

Por dato: densidad del líquido: ρ

Sea: $\rho = \frac{m}{V_i} \quad \Rightarrow \quad \rho_f = \frac{m}{V_f}$

$$\Rightarrow \quad V_f - V_i = \frac{m}{\rho_f} - \frac{m}{\rho_i} = -\frac{m \cdot \Delta\rho}{\rho_f \cdot \rho_i} = \Delta V$$

Como: $\Delta V = V\beta\Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{-m \cdot \Delta\rho}{\rho_f \cdot \rho_i} = \frac{m}{\rho_i}\beta\Delta T$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta\Delta T \qquad \text{l.q.q.d.}$$

El signo negativo indica que el volumen final es menor que el volumen inicial, esto quiere decir $\rho_{final} < \rho_{inicial}$ (densidad varía y disminuye o aumenta con la temperatura).

Parte (b)

a 4,0°C $\rho_{H_2O\ dulce} = 1{,}000$ g/cc (final)

a 10°C $\rho_{H_2O\ dulce} = 0{,}997$ g/cc (inicial)

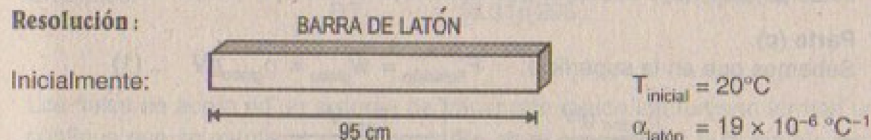
Entonces $\frac{1{,}000 - 0{,}997}{1{,}000} = -\beta(4{,}0 - 10)$

$$\therefore \quad \beta = 5{,}000 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$$

57. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a 20°C. La medida es de 95,00 cm. ¿Cuál será la indicación de la cinta correspondiente a la longitud de la barra cuando ésta y la primera estén a a) −15°C, y b) 55°C?

Resolución:

Inicialmente:



$T_{inicial} = 20°C$

$\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a) $T_{final} = -15°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad L_{final} - L_{inicial} = L_{inicial} \cdot \alpha_{latón}(T_{final} - T_{inicial})$$

$$\Rightarrow \quad L_{final} = 95{,}00 \text{ cm}[1 - 19 \times 10^{-6}(15 + 20)]$$

$$\therefore \quad L_{final\ (latón)} = 94{,}94 \text{ cm}$$

Parte (b) $T_{final} = 55°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

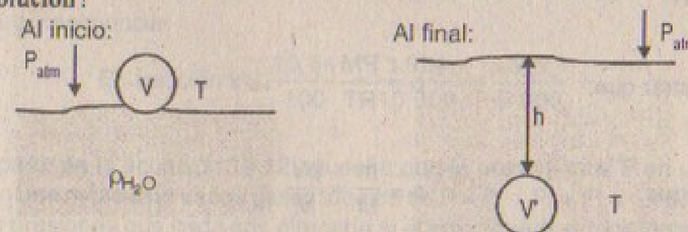
$$\Rightarrow \quad L_{final} - L_{inicial} = L_{inicial}\,\alpha_{latón}(T_{final} - T_{inicial})$$

$$\Rightarrow \quad L_{final} = 95{,}00 \text{ cm}[1 + 19 \times 10^{-6}(55 - 20)]$$

$$\therefore \quad L_{final\ latón} = 95{,}06 \text{ cm}$$

58. a) Obtenga una expresión para la fuerza de flotación sobre un globo esférico que se ha sumergido en agua como una función de la profundidad debajo de la superficie, el volumen del globo en la superficie, la presión en la superficie y la densidad del agua. (Suponga que la temperatura del agua no cambia con la profundidad). b) ¿La fuerza de flotación aumenta o disminuye cuando se sumerge el globo? b) ¿A qué profundidad la fuerza de flotación disminuye a la mitad del valor en la superficie?

Resolución:



Sabemos que: $F_{flotación} = \text{Empuje} = \rho_{H_2O}\, gV'$ ... (1)

Por otro lado: $P_{atm} V = (P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh)V'$

$\therefore \quad V' = P_{atm} V / P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

Resulta que: $$\text{Empuje} = \rho_{H_2O}\, g\left[\frac{P_{atm} V}{P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh}\right]$$

Parte (b)

Como la fuerza de flotación es proporcional con el volumen, entonces la fuerza de flotación disminuye debido a que disminuye el volumen ya que aumenta la presión.

Parte (c)

Sabemos que en la superficie: $F_{flotación} = w_{globo} = \rho_{globo} gV$ ... (1)

Por condición: $$\frac{\rho_{globo}\, g V}{2} = \rho_{H_2O}\, g\left[\frac{P_{atm} V}{P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\rho_{H_2O} \cdot P_{atm} = \rho_{globo} \cdot P_{atm} + \rho_{globo} \cdot \rho_{H_2O}\, gh$$

$$\Rightarrow \quad P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{globo}\right) = \rho_{globo}\, \rho_{H_2O}\, gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{globo}\right)}{\rho_{globo}\, \rho_{H_2O}\, g}$$

Pero a una cierta profundidad: $\rho_{globo}\, gV' = \rho_{H_2O}\, gV'$

$$\Rightarrow \quad \rho_{globo} = \rho_{H_2O}$$

En consecuencia: $$h = \frac{P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{H_2O}\right)}{\rho_{H_2O}\, \rho_{H_2O}\, g} = \frac{P_{atm}}{\rho_{H_2O}\, g}$$

59. a) Demuestre que la densidad de un gas ideal que ocupa un volumen V está dada por $\rho = PM/RT$, donde M es la masa molar. b) Determine la densidad del gas oxígeno a presión atmosférica y 20,0°C.

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $$\rho = \frac{PM}{RT}$$

Sabemos que: $$n = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$$

Entonces por la ley de los gases: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad PV = \frac{\rho . V}{M}(R.T)$$

$$\therefore \quad P = \frac{\rho M}{RT} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Presión $= P_{atm} = 101 \times 10^3\ N/m^2$; $T = 20°C \equiv 293\ K$

$R = 8{,}31\ N.m/mol.K$; $M_{O_2} = 32\ g/mol \equiv 0{,}032\ kg/mol$

Entonces: $$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{(101\times10^3)(32)\times10^{-3}}{(8{,}31)(293)} = 1{,}33\ kg/m^3$$

60. Los rieles de acero de un sistema de transporte rápido interurbano forman una vía continua que se mantiene rígidamente fija en el concreto. a) Si la vía fue instalada cuando la temperatura era de 0°C, ¿cuál es el esfuerzo en los rieles en un día caluroso cuando la temperatura es de 25°C? b) ¿Qué fracción de la resistencia producida de $52{,}2 \times 10^7\ N/m^2$ representa este esfuerzo?

Resolución:

Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$T_{inicial} = 0°C$; $Y_{acero} = 20 \times 10^{10}\ N/m^2$

$T_{final} = 25°C$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta L = L\, \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = 11 \times 10^{-6}(25 - 0) = 275 \times 10^{-6} \quad ... (1)$$

Por otro lado: $$S = Y . \frac{\Delta L}{L}$$

$\Rightarrow$ Esfuerzo $= (20 \times 10^{10})(275 \times 10^{-6})$

$\therefore$ Esfuerzo $= 5{,}50 \times 10^7\ N/m^2$

Parte (b)

Si: $52{,}2 \times 10^7$ —— 100%

$5{,}50 \times 10^7$ —— x $\quad \therefore \quad x = 10{,}54\%$

En consecuencia:

$$\text{En fracción } x = \frac{10{,}54}{100} = \frac{1\,054}{10\,000} = \frac{527}{5\,000}$$

61. A partir de la ecuación 19.12, muestre que la presión total P en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$, donde $P_1, P_2, ...$ son las presiones que cada gas ejercería si él solo llenara el recipiente (estas presiones

individuales se denominan las *presiones parciales* de los gases respectivos). Lo anterior se conoce como la *ley de Dalton de presiones parciales.*

Resolución:

Demostrar que: $P_{total} = P_1 + P_2 + P_3 + ...$

Sabemos que de la Ec. 19.12: $PV = N\left(\frac{R}{N_A}\right)T$

Por otro lado:

$P_1\,V = N\,K_B\,T$ (para un gas cualquiera)

Sumando

$P_2\,V = N\,K_B\,T$ (para otro gas cualquiera)

$\vdots$

$$P_1 + P_2 + P_3 + ... = \left(\frac{K_B \cdot T}{V}\right) N_{total}$$

$\therefore \quad P_{total} = P_1 + P_2 + P_3 + ...$ l.q.q.d.

62. Al analizar una muestra de aire que tiene una masa de 100,00 g, obtenida a nivel del mar, se encontró que se compone de los siguientes gases:

nitrógeno (N_2) = 75,52 g
oxígeno (O_2) = 23,15 g
argón (Ar) = 1,28 g
dióxido de carbono (CO_2) = 0,05 g

más restos de neón, helio, metano y otros gases. a) Calcule la presión parcial (vea el problema 61) de cada gas cuando la presión es $1,013 \times 10^5$ Pa. b) Determine el volumen ocupado por la muestra de 100 g a una temperatura de 15,00°C y una presión de $1,013 \times 10^5$ Pa. ¿Cuál es la densidad del aire en estas condiciones? c) ¿Cuál es la masa molar efectiva de la muestra de aire?

Resolución:

Datos: $M_{total\ del\ aire} = 100,00$ g $\qquad P_{total} = 1,013 \times 10^5$ Pa

Nitrógeno (N_2) = 75,52 g
Oxígeno (O_2) = 23,15 g
Argón (Ar) = 1,28 g
Dióxido de carbono (CO_2) = 0,05 g

Parte (a)

Sabemos que: $P_{total} = N_{total} \cdot cte$

$P_1 = N_1 \cdot cte \quad \Rightarrow \quad 1,013 \times 10^5 = n_{totales} \times cte$

Además: $P_1\,(N_2) = n_{N_2} \times cte$

Por lo tanto: $\boxed{\frac{P_{1(H_2)}}{T_{total}} = \frac{n_{H_2}}{n_{totales}}}$ ... (α)

Hallando la presión parcial de cada gas:

Previamente: $n_{totales} = \frac{M_{total}}{M_{total(molar)}} = \frac{100\ g}{28\ g/mol + 32\ g/mol + 40\ g/mol}$

$\therefore \quad n_{totales} = 3,453$ moles

Además: $n_{N_2} = 75,52\ g/28\ g/mol = 2,697$ moles

$n_{O_2} = \frac{23,15\ g}{30\ g/mol} = 0,723$ moles

$n_{Ar} = \frac{1,28\ g}{40\ g/mol} = 0,032$ moles

$n_{CO_2} = \frac{0,05\ g}{48\ g/mol} = 0,001$ moles

En consecuencia: $n_{totales} = 3,453$ moles

Luego: $P_{N_2} = \frac{(1,013 \times 10^5)(2,697)}{3,453} = 0,79 \times 10^5$ Pa

$P_{O_2} = \frac{(1,013 \times 10^5)(0,723)}{3,453} = 0,21 \times 10^5$ Pa

$P_{Ar} = \frac{(1,013 \times 10^5)(0,032)}{3,453} = 0,0094 \times 10^5$ Pa

$P_{CO_2} = \frac{(1,013 \times 10^5)(0,001)}{3,453} = 0,00029 \times 10^5$ Pa

Parte (b)

$P = 1,013 \times 10^5 \qquad T = 15,00°C \cong 288$ K $\qquad V = ?$

$n_{totales} = 3,453 \qquad R = 0,082$ atm.L/mol.K $\cong 8,31$ J/mol.K

Entonces: $PV = nRT$

$\Rightarrow \quad (1,013 \times 10^5\ Pa)V = (3,453\ mol)(8,31)(288\ K)$

$\therefore \quad$ Volumen = 0,082 m^3

Parte (c)

Sabemos que: $n_{total} = \frac{\text{Masa total}}{M_{aire}} \quad \Rightarrow \quad 3,453 = \frac{100,00}{M_{aire}}$

Masa molar efectiva del aire $= \frac{100,00}{3,453} = 28,96$ g/mol

63. Dos tramos de concreto de un puente de 250 m de largo se colocan extremo con extremo para que no haya posibilidad de expansión (Fig. P19.63a). Si hay un aumento de temperatura de 20,0°C, encuentre la altura, *y*, a la cual estos tramos se pandean (Fig. P19.63b).

63A. Dos tramos de concreto de un puente de longitud *L* se colocan extremo con extremo para que no haya posibilidad de expansión (Fig. P19.63a). Si hay un aumento de temperatura de ΔT, encuentre la altura, *y*, a la cual estos tramos se pandean (Fig. P19.63b).

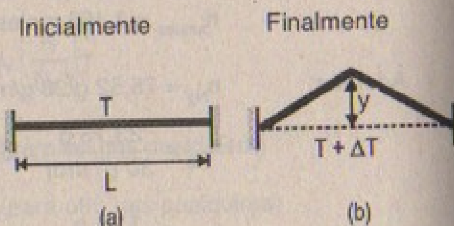
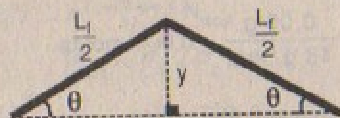


Figura P19.63

Resolución :

Sea:



Tenemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

$\Rightarrow\ L + \Delta L = L\,(1 + \alpha\,\Delta T)$

$\Rightarrow\ L_f = L\,(1 + \alpha\,\Delta T)$ ... (1)

Por otro lado:

De la figura: $2\left(\dfrac{L_f}{2}\right)\cos\theta = L \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{L}{L_f}$ ... (2)

Además: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2y}{L_f}$ ... (3)

Entonces: $(3)^2 + (2)^2$ resulta que:

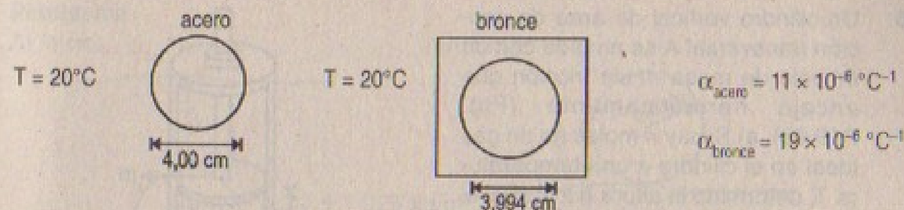
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{(L_f - L)(L_f + L)} = \frac{1}{2}\sqrt{(L\alpha\,\Delta T)(2L + L\alpha\Delta T)}$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2} \times \sqrt{(L\alpha\Delta T + L)^2 - L^2}$$

64. Un cojinete de bola de acero mide 4,000 cm de diámetro a 20,0°C. Una placa de bronce tiene un agujero de 3,994 cm de diámetro a 20,0°C. ¿Qué temperatura común deben tener ambas piezas para que la bola atraviese exactamente el agujero?

Resolución :

Datos:



Para que la bola de acero atraviese exactamente el agujero de bronce se tiene que cumplir:

$$A_{\text{final del bronce}} = A_{\text{inicial del acero}} + \Delta A_{\text{acero}}$$

Entonces:

$$A_{\text{final del bronce}} = A_{\text{inicial}}\,(1 + 2\alpha_B \Delta T)$$

$$A_{\text{inicial del acero}} + \Delta A_{\text{acero}} = A_{\text{inicial del acero}}\,(1 + 2\alpha_A\,\Delta T)$$

Entonces:

$$\frac{\pi}{4}(3{,}994)^2\,[1 + 2 \times 19 \times 10^{-6}\,(T - 20)] = \frac{\pi}{4}(4{,}00)^2\,[1 + 2 \times 11 \times 10^{-6}\,(T - 20)]$$

$$\Rightarrow\ (4{,}00)^2 - (3{,}994)^2 = [(3{,}994)^2\,(38 \times 10^{-6}) - (4{,}00)^2(22 \times 10^{-6})]\,[T - 20]$$

$$\therefore\ T = 208{,}7°C$$

65. El péndulo de latón de un reloj se ajusta para que tenga un período de 1,000 s a 20°C. ¿Cuál es la temperatura de un cuarto en el que el reloj se atrasa exactamente 1 minuto cada semana?

Resolución :

Sabemos que: $T = 2\pi\,.\sqrt{\dfrac{\text{longitud}}{g}}$ ...(periodo de un péndulo)

Entonces: $1{,}000\ s = \dfrac{4\pi^2}{g}$. longitud inicial $\therefore$ Long.inicial $= \dfrac{g}{4\pi^2}$

Por otro lado:

Por dato se sabe que; en una semana el reloj se atrasa un minuto, entonces en un segundo se atrasará:

$$\frac{1}{7 \times 24 \times 60} = 0{,}0000992\ s$$

Luego: $T_{\text{final}} = 1{,}00\ s + 0{,}0000992\ s = 2\pi.\sqrt{\dfrac{L_{\text{inicial}}\,(1 + \alpha_{\text{latón}}\Delta T)}{g}}$

$$\Rightarrow\ 1{,}000198423 = \frac{4\pi^2}{g} \times \left(\frac{g}{4\pi^2}\right)(1 + 19 \times 10^{-6}\,[T_{\text{final}} - 20°C])$$

$$\Rightarrow\ 1{,}9842254 \times 10^{-4} = 19 \times 10^{-6}\,(T_{\text{final}} - 20°C)$$

$$\therefore\ T_{\text{final}} = 30{,}4°C$$

66. Un cilindro vertical de área de sección transversal A se amolda con un émbolo de masa *m* sin fricción que encaja herméticamente (Fig. P19.66). a) Si hay *n* moles de un gas ideal en el cilindro a una temperatura *T*, determine la altura *h* a la cual el émbolo está en equilibrio bajo su propio peso. b) ¿Cuál es el valor de *h* si *n*=0,20 mol, *T* = 400 K, A = 0,0080 m², y m= 20,0 kg?

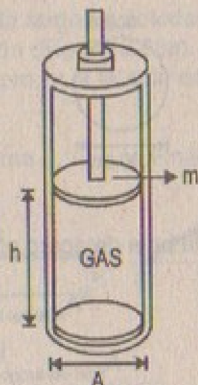


Figura P19.66

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $P_{gas} = \frac{W_{émbolo}}{A} + \frac{W_{aire}}{A}$

$\Rightarrow P_{gas} = \frac{m_{émbolo}}{A} \cdot g + P_{atmosférica}$

Por la ley de los gases: $P_{gas}V = nRT$

$\Rightarrow \left(\frac{mg}{A} + P_{atm}\right)(Ah) = nRT$

$\therefore \quad h = \frac{nRT}{mg + P_{atm}A}$

Parte (b)

Si: n = 0,20 mol ; R = 8,31 J/mol.K ; A = 0,0080 m²

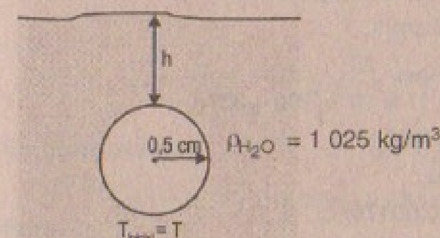
T = 400 K ; m_{embolo} = 20,00 kg ; g = 9,8 m/s²

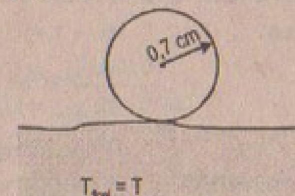
$$\Rightarrow \quad h = \frac{(0{,}20)(8{,}31)(400)}{(20)(9{,}8)+(101\times10^3)(0{,}0080)} \qquad \therefore \quad h = 0{,}662 \text{ m} \cong 66{,}2 \text{ cm}$$

67. Una burbuja de aire originada por un buzo dentro del mar tiene un radio de 5,0 mm a cierta profundidad *h*. Cuando la burbuja llega a la superficie del agua, su radio es de 7,0 mm. Suponiendo que la temperatura del aire en la burbuja permanece constante, determine a) la profundidad *h* a la que se encuentre el buzo, y b) la presión absoluta a esta profundidad.

Resolución:

Al inicio: Al final:





Parte (a)

Sabemos que: $PV = nRT$

$\Rightarrow P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$

$$\Rightarrow (101 \times 10^3 + (1\,025)(9{,}8)\,h)\,\frac{4}{3}\pi(0{,}5)^3 = (101 \times 10^3)\,\frac{4}{3}\pi(0{,}7)^3$$

$\therefore \quad h = 17{,}53 \approx 18{,}00$ m

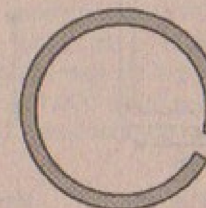
Parte (b)

$P_{total} = P_{atm} + \rho_{H_2O}\,gh$

$\Rightarrow P_{total} = 101 \times 10^3 \text{ N/m}^2 + (1\,025)(9{,}8)(17{,}53)$

$\therefore \quad P_{total} = 277 \times 10^3 \text{ Pa} \cong 277 \text{ kPa}$

68. La figura P19.68 muestra una pieza circular de acero con una abertura. Si se calienta la pieza, a) ¿aumenta o disminuye el ancho de la abertura? b) El ancho de la abertura es de 1,600 cm cuando la temperatura es de 30,0°C. Determine el ancho de la abertura cuando la temperatura es de 190°C.


Figura P19.68

Resolución:

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Sabemos que cuando una pieza se calienta o incrementa su temperatura su longitud inicial aumenta y como:

$L_{inicial} = 2\pi R_{inicial}$

$\Rightarrow L_{final} = 2\pi R_{final} = L_{inicial}(1 + \alpha\Delta T)$

En consecuencia: $L_{final} > L_{inicial}$

$\therefore$ El ancho de la abertura disminuirá.

Parte (b)

Sea x: el ancho de la abertura cuando la temperatura es de 190°C

Entonces: $\Delta L + x = (1{,}6\ \text{cm})\ L$

Luego: $\Delta L_{acero} = L\ \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta L_{acero} = L \times 11 \times 10^{-6}\ (190 - 30)$

$\therefore \quad \Delta L_{acero} = 0{,}00176\ L$

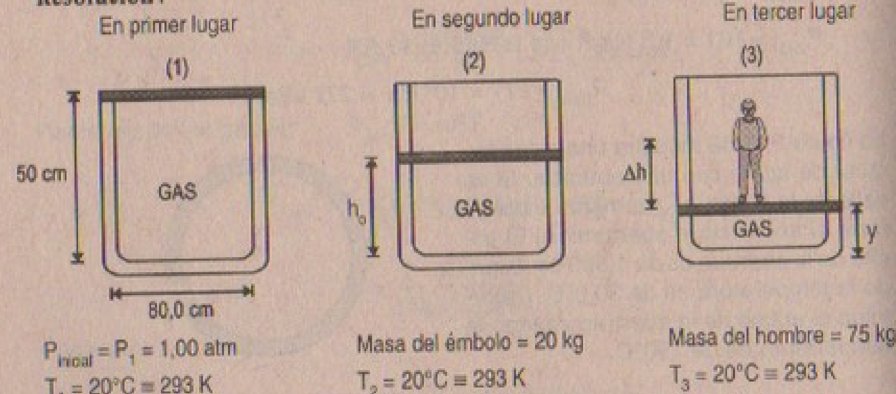
En consecuencia: $x = 1{,}6\ L - \Delta L$

$\Rightarrow \quad x = 1{,}6\ L - (0{,}00176)\ L$

$\therefore \quad x = 1{,}59824\ \text{cm}$

69. Un cilindro que tiene un radio de 40,0 cm y 50,0 cm de profundidad se llena con aire a 20,0°C y 1,00 atm (Fig. P19.69a). Un émbolo de 20,0 kg desciende luego en el cilindro y comprime el aire atrapado en el interior (Fig. P19.69b). Por último, un hombre de 75,0 kg parado sobre el émbolo comprime aun más el aire que permanece a 20°C (Fig. P19.69c). a) ¿Qué distancia (Δh) se mueve el émbolo cuando el hombre está parado sobre él? b) ¿A qué temperatura debe calentarse el gas para elevar el émbolo y al hombre de regreso a h_0?

Resolución:



$P_{inicial} = P_1 = 1{,}00\ \text{atm}$ — Masa del émbolo = 20 kg — Masa del hombre = 75 kg

$T_1 = 20°C \equiv 293\ K$ — $T_2 = 20°C \equiv 293\ K$ — $T_3 = 20°C \equiv 293\ K$

Parte (a)

Sabemos que: PV = cte

$\Rightarrow \quad P_1V_1 = P_2V_2$

$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)\ A\ (0{,}5) = (101 \times 10^3 + \frac{W_{émbolo}}{A})\ Ah_o$

$\Rightarrow \quad (101)(0{,}5) \times 10^3 = \left[101\times10^3 + \frac{(20)(9{,}8)}{\pi\ (0{,}4)^2}\right] h_o$

$\therefore \quad h_o = 0{,}498\ \text{m}$

Por otro lado: $P_1\ V_1 = P_3\ V_3$

$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)\ A\ (0{,}5) = \left(101\times10^3 + \frac{W_H + W_E}{A}\right) Ay$

$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)(0{,}5) = \left[101\times10^3 + \frac{(95)(9{,}8)}{\pi\ (0{,}4)^2}\right] y$

En consecuencia: $\therefore \quad y = 0{,}491\ \text{m}$

$\Delta h = h_o - y = 0{,}498 - 0{,}491 = 0{,}007\ \text{m} \equiv 7{,}06\ \text{mm}$

Parte (b)

Tenemos que: $\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3}$

$\Rightarrow \quad \left[101\times10^3 + \frac{(20)(9{,}8)}{\pi(0{,}4)^2}\right] \frac{A\ (0{,}498)}{293\ K} = \left[101\times10^3 + \frac{(95)(9{,}8)}{\pi(0{,}4)^2}\right] \frac{A\ (0{,}491)}{T_3}$

Entonces: $\frac{(101{,}389\times10^3)(0{,}498)}{293\ K} = \frac{(102{,}852\times10^3)(0{,}491)}{T_3}$

$\therefore \quad T_3 = 297\ K$

70. Una olla de aluminio que tiene la forma de un cilindro, está inicialmente a 4,0°C, temperatura a la cual su diámetro interior es de 28,00 cm. La olla contiene 3,000 gal de agua a 4,0°C. a) ¿Cuál es la profundidad del agua en el recipiente? (1 gal = 3 785 cm³). b) La olla y el agua dentro se calientan hasta 90°C. Considerando la expansión del agua pero ignorando la de la olla, ¿cuál es el cambio en la profundidad del agua? Exprese el cambio como un porcentaje de la profundidad original así como en milímetros. (La densidad del agua es 1,000 g/cm³ a 4,0°C y 0,965 g/cm³ a 90,0°C) c) Modifique su solución del inciso b) considerando la expansión de la olla. (Véase la tabla 19.2).

Resolución:

Datos: $T_{inicial} = 4{,}0°C$

Diámetro interior = 28,00 cm

$V_{inicial} = 3{,}000\ \text{gal}$

(1 gal = 3 785 cm³)

Parte (a) $\quad V_{inicial} = Ah = \pi\left(\frac{\text{diámetro}}{2}\right)^2 h$

$\Rightarrow \quad 3(3\ 785\ \text{cm}^3) = \frac{\pi}{4}\ (28{,}00)^2\ \text{cm}^2\ h$

$\therefore \quad h = 18{,}44\ \text{cm}$

Parte (b) Considerando presión constante

Entonces: $\dfrac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{V_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \dfrac{3(3785)\ cm^3}{277\ K} = \dfrac{V_{final}}{(90+273)k}$

$\therefore\ V_{final} = 14\ 880{,}4\ cm^3$

Pero: $V_{final} = \dfrac{\pi}{4}\ (28{,}00)^2\ y$

$\Rightarrow\ 14\ 880{,}4 = \dfrac{\pi}{4}(28{,}00)^2 y \qquad \therefore\ y = 24{,}17\ cm$

Luego el cambio en la profundidad será: 24,17 – 18,44 = 5,73 cm

En porcentaje será:

Si: (24,17) × 10 mm ———— 100%

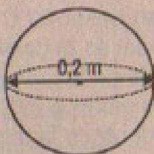
(18,44) × 10 mm ———— x $\qquad \therefore\ x = 76{,}29\%$

por lo tanto el cambio será: 100% – 76,29% = 23,71%

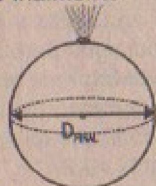
71. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a 1,00 atm y 20,0°C. conforme la esfera se calienta hasta alcanzar 100,0°C, se deja que el gas escape. La válvula se cierra y la esfera se pone en un baño de agua congelada. a) ¿Cuántas moléculas de gas escapan de la esfera a medida que ésta se calienta? b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando ésta está en el agua congelada?

Resolución:

Inicialmente:



Finalmente:



$P_{inicial} = 1{,}00\ atm \equiv 101 \times 10^3\ Pa$;

$T_{inicial} = 20°C = 293\ K$

$V_{inicial} = \dfrac{4}{3}\pi\,(0{,}1)^3$

$P_{final} =$

$T_{final} = 100°C = 373\ K$

$V_{final} =$

Parte (a) $n_{iniciales} = \dfrac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{R.T_{inicial}}$

$\Rightarrow\ n_{iniciales} = \dfrac{(101\times10^3)(4/3\ \pi\ (0{,}1)^3)}{(8{,}31)\ (373\ K)} = 0{,}174\ moles$

Entonces: $n_{finales} = \dfrac{P_{final} \cdot V_{final}}{R.T_{final}}$

$\Rightarrow\ n_{finales} = \dfrac{(101\times10^3)(4/3\pi\ (0.1)^3)}{(8{,}31)(373\ K)} = 0{,}1365\ moles$

En consecuencia:

$n_{que\ escapan} = n_{iniciales} - n_{finales} = 0{,}0374\ moles$

Parte (b)

$\dfrac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{P_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \dfrac{1{,}00\ atm}{373\ K} = \dfrac{P_{final}}{273\ K}$

$\therefore\ P_{final} = 0{,}732\ atm$

72. La relación $L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$ es una aproximación que funciona cuando el coeficiente de expansión promedio es pequeño. Si α es considerable, la relación $dL/dT = \alpha L$ debe integrarse para determinar la longitud final. a) Suponga que el coeficiente de expansión lineal es constante y determine la expresión general para la longitud final. b) Dada una barra de 1,00 m de longitud y un cambio de temperatura de 100,0°C, determine el error causado por la aproximación cuando $\alpha = 2{,}00 \times 10^{-5}\ (°C)^{-1}$ (el valor normal para metales comunes), y cuando $\alpha = 0{,}020\ (°C)^{-1}$ (un valor irreal grande utilizado con fines comparativos).

Resolución:

Parte (a)

De la ecuación diferencial: $\dfrac{dL}{dT} = \alpha L$

$\Rightarrow\ \left(\dfrac{1}{L}\right)dL = \alpha dT \qquad \Rightarrow\ \int_{L_i}^{L_f}\left(\dfrac{1}{L}\right)dt = \alpha \,.\int_{T_i}^{T_f} dT$

$\Rightarrow\ ln\,(L)\Big|_{L_i}^{L_f} = \alpha T\Big|_{T_i}^{T_f} \qquad \Rightarrow\ ln\left[\dfrac{L_f}{L_i}\right] = \alpha\ \Delta T$

$\therefore\ L_{final} = L_{inicial} \cdot e^{\alpha\,\Delta T}$

Parte (b)

Para: $L_{inicial} = 1{,}00\ m$; $\Delta T = 100°C$; $\alpha = 2{,}00 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

Hallando en primer lugar "$L_{final\ aproximado}$"

Entonces: $L_{final} = (1{,}00\ m)\ [1 + 2{,}0 \times 10^{-5}\ (100)]$

$\therefore\ L_{final} = 1{,}002\ m$

Luego hallando "$L_{final\ real}$"

Aplicando: $L_{final} = L_{inicial} \cdot e^{\alpha\cdot\Delta T}$

$\Rightarrow\ L_{final} = (1{,}00)\ .\ e^{(2\times10^{-5})(10^2)}$

$\therefore\ L_{final} = 1{,}002\ m$

En consecuencia:

El error causado por la aproximación es "cero".

Si: $\alpha = 0{,}020\ °C^{-1}$

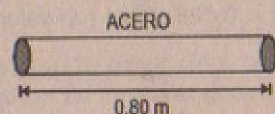
$\Rightarrow$ Aproximando: $L_f = 1{,}00\,[1 + (0{,}020)(100)] = 3{,}00$ m

En realidad será: $L_f = 1{,}00\,.\,e^{(0{,}020)(100)} = 7{,}39$ m

El error causado por la aproximación es: 4,39 m

73. Una cuerda de acero de guitarra con un diámetro de 1,00 mm se estira entre soportes separados 80,0 cm. La temperatura es 0,0°C. a) Encuentre la masa por unidad de longitud de esta cuerda. (Utilice el valor $7{,}86 \times 10^3$ kg/m³ para la densidad.) b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda? c) Si la temperatura se eleva a 30,0°C, encuentre los valores resultantes de la tensión y de la frecuencia fundamental. [Suponga que tanto el módulo Young (tabla 12.1) como el coeficiente de expansión promedio (tabla 19.2) tienen valores constantes entre 0,0°C y 30,0°C].

Resolución :



Diámetro de la cuerda = 10^{-3} m

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\rho_{acero} = 7{,}86 \times 10^3$ kg/m³

$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a)

Sabemos que: $\rho_{acero} = \dfrac{M_{acero}}{Volumen}$

$$\Rightarrow \quad M_{acero} = (7{,}86 \times 10^3)(0{,}80)(\pi)\left[\frac{10^{-3}}{2}\right]^2$$

$$\therefore \quad M_{acero} = 4{,}94 \times 10^{-3}\ kg$$

Sabemos además que:

$$\text{Densidad lineal} = \mu = \frac{M_{acero}}{Longitud} = \frac{4{,}94\times10^{-3}}{0{,}80}$$

$$\therefore \quad \mu = 6{,}17 \times 10^{-3}\ kg/m$$

Parte (b)

Si: $f_1 = 200$ Hz

Entonces: $200 = \dfrac{1}{2(0{,}80)} \times \sqrt{\dfrac{T\times10^3}{6{,}17}}$

$$\therefore \quad T_{cuerda} = 632\ N$$

Parte (c)

Sabemos que: $\dfrac{T}{A} = Y\,.\,\dfrac{\Delta L}{L}$

Pero: $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad T = Y.\alpha\Delta T.A = (20 \times 10^{10})(11 \times 10^{-6})(30)(\pi)(0{,}5)^2(10^{-3})^2$$

$$\therefore \quad T = 580\ N$$

Por otro lado: $L_{final} = 0{,}80\,[1 + 11 \times 10^{-6}\,(30)] = 0{,}800264$ m

Luego: $f_1 = \dfrac{1}{2(0{,}800264)} \times \sqrt{\dfrac{(580N)(0{,}800264)}{4{,}94\times10^{-3}}} = 192$ Hz

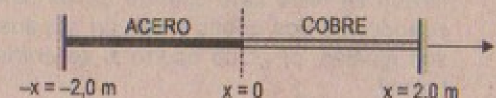
74. Dos alambres, uno de acero y uno de cobre, cada cual de 2,000 mm de diámetro, se unen extremo con extremo. A 40,0°C, cada uno tiene una longitud sin estirar de 2,000 m; se conectan entre dos soportes fijos separados 4,000 m sobre la cubierta de una mesa, de manera que el alambre de acero se extiende de x = –2,000 m a x = 0, el alambre de cobre se extiende de x = 0 a x = 2,000 m, y la tensión es despreciable. La temperatura se reduce después hasta 20,0°C. A esta temperatura encuentre la tensión en el alambre y la coordenada x de la unión entre los alambres. (Consulte las tablas 19.1 y 19.2).

Resolución :

Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\alpha_{acero} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$T_{inicial} = 40°C$



Long. inicial (acero) = 2,00 m

Long. inicial (cobre) = 2,00 m

Diámetro de c/alambre = 2,000 mm

a $T_f = 20°C$

$L_{final\ del\ acero} = 2{,}00\ m\,[1 + 11 \times 10^{-6}\,(20 - 40)]$

$\therefore \quad L_{final\ del\ acero} = 1{,}99956$ m

Por otro lado: a $T_{final} = 20°C$

$L_{final\ del\ cobre} = 2{,}00\ m\,[1 + 17 \times 10^{-6}\,(20 - 40)]$

$\therefore \quad L_{final\ cobre} = 1{,}99932$ m

Luego la coordenada "x" de la unión será:

x = 2,0 – 1,99932 = 0,00068 m (tensión despreciable) ∴ no cumple

ó x = –2,0 + 1,99956 = 0,00044 m (cumple)

Hallando la tensión a 20°C

Sabemos que: $\dfrac{T}{A} = Y_{acero}\,.\,\dfrac{\Delta L}{L}$

Además: $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad T_{alambre} = Y_{acero} \cdot \alpha_{acero} \cdot |\Delta T| \cdot A$

$\Rightarrow \quad T_{alambre} = (20 \times 10^{10})(11 \times 10^{-6})|-20|(\pi)(1{,}00 \times 10^{-3})^2$

$\therefore \quad T_{alambre} = 138 \text{ N}$

75. Una barra bimetálica está formada por dos tiras delgadas de metales diferentes unidos entre sí. A medida que se calientan, el metal con el coeficiente de expansión más grande se expande más que el otro y hace que la barra se arquee, teniendo el radio exterior la mayor circunferencia (Fig. P19.75).
a) Obtenga una expresión para el ángulo de flexión θ como una función de la longitud inicial de las tiras, sus coeficientes de expansión lineal promedio, el cambio de temperatura y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$). b) Muestre que el ángulo de flexión se hace cero cuando ΔT es cero o cuando los dos coeficientes de expansión son iguales. c) ¿Qué ocurre si se enfría la barra?

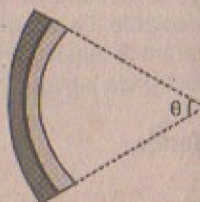
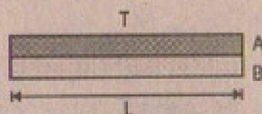


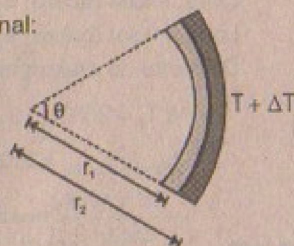
Fig. P19.75

Resolución :

Al inicio:



Al final:



Parte (a)

Sabemos que en un arco circular la longitud del arco es = $\theta.R$

Entonces: $L_{final\,B} = L(1 + \alpha_B \Delta T) = \theta.r_2$

$L_{final\,A} = L(1 + \alpha_B \Delta T) = \theta.r_1$

Restando: B – A

Tenemos que: $\theta(r_2 - r_1) = L\Delta T\,(\alpha_B - \alpha_A)$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{L\Delta T}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A)$

Parte (b)

Si $\quad \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{L(0)}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A) = 0$

Si $\quad \alpha_B = \alpha_A \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{L\Delta T}{r_2 - r_1}(0) = 0$

Parte (c)

Si se enfría la barra,entonces $\Delta T < 0$

$\Rightarrow \quad \theta = \dfrac{L}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A)(-\Delta T)$ (en sentido horario)

En consecuencia la barra se doblaría del otro modo.

Capítulo 20

CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

CALOR Y ENERGÍA TÉRMICA

1. Considere el aparato de Joule descrito en la figura 20.1. Las dos masas son de 1,50 kg cada una y el tanque se llena con 200 g de agua. ¿Cuál es el aumento de la temperatura del agua después de que las masas descienden una distancia de 3,00 m?

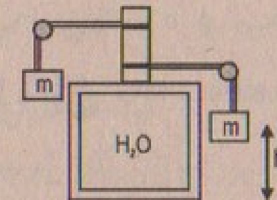


Figura 20.1

Resolución :

Datos: m = 1,5 kg M_{H_2O} = 0,2 kg
h = 3,00 m
considerar: g = 9,8 m/s^2

Por conservación de energía

$$E_{M\ inicial} = E_{M\ final} = 2\ mgh = (1,5)(9,8)(3,0) = (44,1\ J) \times 2$$

Por otro lado: $Q_{transferido(ganado\ del\ agua)} = E_{M\ final} = (44,1\ J) \times 2$

$$\Rightarrow \quad M\ .\ C_{e\ H_2O} = .\ \Delta T = (44,1\ J)(2)$$

$$\Rightarrow \quad (0,2\ kg)\left(4\ 186 \frac{J}{kg\ °C}\right)\Delta T = (44,1\ J)(2)$$

$$\therefore \quad \Delta T = 0,105°C$$

2. Una persona de 80 kg que intenta bajar de peso desea subir una montaña para quemar el equivalente a una gran rebanada de pastel de chocolate tasada en 700 calorías (alimenticias). ¿Cuánto debe ascender la persona?

Resolución :

Datos: Masa de la persona = 80 kg
Calor de la rebanada de pastel = 700 cal
1 cal ≡ 4,186 J

$$W_{persona/montaña} = mgh = (80)(9,8)h$$

Por otro lado: $700\ cal \equiv 700\ cal \times \frac{4,186\ J}{1\ cal} \equiv 2,93 \times 10^3\ J$

Luego: $(80)(9,8)h = 2,93 \times 10^3$

$\therefore \quad h = 3,74$ m

En consecuencia: La persona debe de ascender 3,74 m hacia la montaña.

3. El agua en la parte superior de las cataratas del Niágara tiene una temperatura de 10°C. Si ésta cae una distancia total de 50 m y toda su energía potencial se emplea para calentar el agua, calcule la temperatura del agua en el fondo de la catarata.

Resolución:

$$\Delta U_{H_2O} = Q_{ganado\ H_2O}$$

$$\Rightarrow \quad m_{H_2O} \cdot g \cdot h = C_{e_{H_2O}} \cdot m_{H_2O} \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (9,8)(50) = 10^3 \times \frac{cal}{kg.°C} \times \frac{4,186\ J}{1\ cal} \times (T_f - 10°C)$$

$$\therefore \quad T_f = T_{en\ el\ fondo} = 10,117°C$$

CAPACIDAD CALORÍFICA, CALOR ESPECÍFICO Y CALOR LATENTE

4. ¿Cuántas calorías de calor son necesarias para aumentar la temperatura de 3,0 kg de aluminio de 20°C a 50°C?

Resolución:

Sabemos que: $Q = m \cdot C_e \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q = m_{alum} \cdot C_{e\ Al} \cdot (50 - 20)°C$$

$$\Rightarrow \quad Q = (3,0\ kg)\left(900 \cdot \frac{J}{kg.°C}\right)(30°C)$$

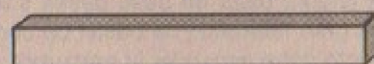
$$\therefore \quad Q = 81\ 000\ J \equiv 1,94 \times 10^4\ cal$$

5. La temperatura de una barra de plata aumenta 10,0°C cuando absorbe 1,23 kJ de calor. La masa de la barra es de 525 g. Determine el calor específico de la plata.

Resolución:

Masa de la barra = 525 g $\quad C_{e(Ag)} = ?$

Q = 1,23 kJ



$\Delta T = 10°C$

Barra de plata

Sabemos que: $Q = m\,C_e\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad 1,23 \times 10^3\ J = (525 \times 10^{-3}\ kg)(C_e)(10°C)$$

$$\Rightarrow \quad C_{e\ (plata)} = \frac{123 \times 10^2}{525 \times 10^{-3}}\ \frac{J}{kg.°C}$$

$$\therefore \quad C_{e\ (plata)} = 2,34 \times 10^2\ J/kg.°C$$

6. Si 100 g de agua a 100°C se vierten dentro de una taza de aluminio de 20 g que contiene 50 g de agua a 20°C, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?

6A. Si una masa m_h de agua a T_h se vierte dentro de una taza de aluminio de masa m_{Al} que contiene m_c de agua fría a T_c donde $T_h > T_c$, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?

Resolución:

Datos: m_{H_2O} (100°C) = 0,1 kg $\quad C_{e(H_2O)} = 10^3$ J/kg.°C

$m_{taza\ de\ Al}$ = 0,02 kg $\quad C_{e(Al)} = 900$ J/kg°C

m_{H_2O} (20°C) = 0,05 kg

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

Entonces: $$Q_{perdido} = (0,1\ kg)\left(10^3\ \frac{J}{kg.°C}\right)(100 - T_E)$$

$$Q_{ganado} = (0,05)(10^3)(T_E - 20) + (0,02)(900)(T_E - 20)$$

Entonces:

$$(0,1)(10^3)(100 - T_E) = (0,05)(10^3)(T_E - 20) + (0,02)(900)(T_E - 20)$$

$$\therefore \quad T_E = 67,62°C$$

7. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio final cuando 10 g de leche a 10°C se agregan a 160 g de café a 90°C? (Suponga que las capacidades caloríficas de los dos líquidos son las mismas que las del agua, e ignore la capacidad calorífica del recipiente).

Resolución:

Datos: $m_{leche} = 10$ g ; $T_{inicial} = 10°C$; $C_{e\ leche} = C_{e\ café} = C_{e\ H_2O}$

$m_{café} = 160$ g ; $T_{inicial} = 90°C$; $T_{equil.} = ?$

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$$Q_{ganado} = m_{leche} \cdot C_e\,(T_E - 10)$$

$$Q_{perdido} = m_{café} \cdot C_e\,(90 - T_E)$$

Luego: $$m_{leche}\,C_e \cdot (T_E - 10) = m_{café} \cdot C_e\,(90 - T_E)$$

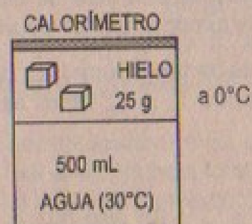
$$\Rightarrow \quad 10\ g\,(T_E - 10) = 160\ g\,(90 - T_E)$$

$$\Rightarrow \quad 17T_E = 90,16 + 10$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 85,3°C$$

8. a) Un calorímetro contiene 500 ml de agua a 30°C y 25 g de hielo a 0°C. Determine la temperatura final del sistema. b) Repita el inciso a) si 250 g de hielo están presentes inicialmente a 0°C.

Resolución:



Calor latente de fusión = $3{,}33 \times 10^5$ J/kg

$T_{final} = ?$

$C_e = 1$ cal/g.°C ; $C_{e\ hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

Parte (a)

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

Entonces: $Q_{ganado(hielo)} = Q_{fusión} + m_{\substack{Agua\\hielo}} \cdot C_e\,(T_f - 0)$

$$Q_{perdido(agua)} = m_{H_2O} \cdot C_e \cdot (30 - T_f)$$

Entonces: $(0{,}025)(3{,}33 \times 10^5) + 2(0{,}5)(0{,}025) \times 10^3\,(T_f) = (500\text{ g})(1)(30 - T_f)$

$$\Rightarrow \quad 8\,325\text{ J} \times \frac{1\text{ cal}}{4{,}186\text{ J}} + 2(12{,}5)T_f = 15\,000 - 500T_f$$

$$\Rightarrow \quad 525{,}0\,T_f = 15\,000 - 1\,998{,}772$$

$$\therefore \quad T_{final} = 24{,}76°C$$

Parte (b)

$m_{hielo} = 250$ g

Entonces: $Q_{ganado\ (hielo)} = Q_{fusión} + m_{H_2O} \cdot C_e\,(T_f - 0)$

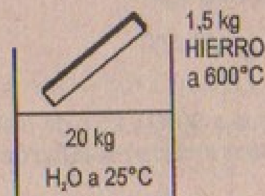
$$Q_{ganado(hielo)} = (0{,}25\text{ kg})(3{,}33 \times 10^5) + (250)(1{,}00)\,T_f$$

Además: $Q_{perdido}\,(agua) = (500\text{ g})(1{,}00)(30 - T_f)$

Luego: $\dfrac{(0{,}25)(3{,}3 \times 10^5)}{4{,}186}\text{ cal} + (250)(1)T_f = 500(30 - T_f)$

9. Una herradura de hierro de 1,5 kg inicialmente a 600°C se sumerge en una cubeta que contiene 20 kg de agua a 25°C. ¿Cuál es la temperatura final? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente).

Resolución:



$C_{e\ hierro} = 448$ J/kg.°C

$C_{e\ agua} = 4\,186$ J/kg.°C

$$Q_{ganado\ (agua)} = Q_{perdido\ (hierro)}$$

$$\Rightarrow \quad (20)(4\,186)(T_E - 25°) = (1{,}5)(448)(600 - T_E)$$

$$\Rightarrow \quad 84\,392T_E = 2\,496\,200$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 29{,}6°C$$

10. La temperatura del aire en áreas costeras se ve influida considerablemente por el gran calor específico del agua. Una razón es que el calor liberado cuando 1 metro cúbico de agua se enfría 1,0°C aumentará la temperatura de un volumen enormemente más grande de aire en 1,0°C. Calcule este volumen de aire. El calor específico del aire es aproximadamente 1,0 kJ/kg.°C. Considere la densidad del aire igual a 1,25 kg/m³.

Resolución:

Datos:

Al inicio: $1\text{m}^3\,(H_2O)$ = Volumen ; ? = volumen (aire)

$1{,}0°C = \Delta T\,(H_2O)$; $1{,}0°C = \Delta T$ (aire)

Además: $\rho_{aire} = 1{,}25$ kg/m³ $\quad C_{e(aire)} = 1{,}0$ kJ/kg.°C

sabemos que: $\rho_{H_2O} = \dfrac{m_{H_2O}}{V_{H_2O}} \quad \Rightarrow \quad m_{H_2O} = 10^3\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 1\text{ m}^3 = 10^3\text{ kg}$

además: $\rho_{aire} = \dfrac{m_{aire}}{V_{aire}} \quad \Rightarrow \quad m_{aire} = 1{,}25\text{ kg/m}^3 \times V_{aire}$

Por otro lado: $Q_{ganado\ (aire)} = Q_{perdido\ (agua)}$

$$\Rightarrow \quad m_{aire} \cdot C_{e\ aire} \cdot \Delta T = m_{agua} \cdot C_{e\ agua} \cdot \Delta T$$

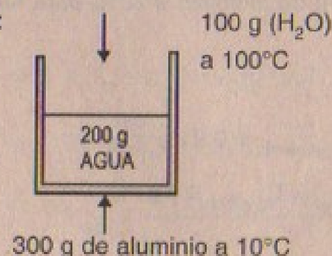
$$\Rightarrow \quad (1{,}25)(V_{aire})\left(1{,}0 \times 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}}\right) = (10^3\text{ kg})\left(4186\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Volumen del aire} = 3{,}35\text{ m}^3$$

11. Si 200 g de agua están contenidos en un recipiente de aluminio de 300 g a 10°C y 100 g adicionales de agua a 100°C se vierten en el recipiente, ¿cuál es la temperatura de equilibrio final del sistema?

Resolución:

Se añade:



$$C_{e(Al)} = 0{,}215\,\frac{\text{cal}}{\text{g.°C}}$$

$$C_{e(H_2O)} = 1{,}00\,\frac{\text{cal}}{\text{g.°C}}$$

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$\Rightarrow \quad Q_{ganado\ (agua)} + Q_{ganado\ (recipiente)} = Q_{perdido\ (agua)}$

$\Rightarrow \quad 200\ g\left(1{,}00\ \frac{cal}{g.°C}\right)(T_E - 10°) + 300\ g\left(0{,}215\ \frac{cal}{g°C}\right)(T_E - 10)$

$= 100\ g\left(\frac{1\ cal}{g.°C}\right)(100 - T_E)$

$\Rightarrow \quad 364{,}5\ T_E = 12\ 645$

$\therefore \quad T_{equilibrio} = 34{,}7°C$

12. Un estudiante inhala aire a 22°C y exhala aire a 37°C. El volumen promedio del aire en una respiración es de 200 cm³. Ignore la evaporación del agua en el aire y calcule la cantidad de calor absorbido en un día por el aire respirado por el estudiante. La densidad del aire es aproximadamente igual a 1,25 kg/m³, y el calor específico del aire es 1 000 J/kg.°C.

Resolución:

Datos: $T_{inicial\ (estudiante)} = 22°C$ (inhala aire)

$T_{final\ (estudiante)} = 37°C$ (exhala aire)

Volumen promedio (aire) = 200 cm³

$\rho_{aire\ promedio} = 1{,}25\ kg/m^3$

$C_{e\ aire} = 10^3\ J/kg.°C$

$Q_{absorvido\ estud} = m_{aire}\ C_e\ \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = \rho_{aire} \cdot V_{aire}\ C_e\ \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = \left(1{,}25\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(200\ cm^3 \times \frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}\right)\left(10^3\ \frac{J}{kg°C}\right)(37 - 22)°C$

$\therefore \quad Q_{absorbido\ por\ el\ estudiante} = 3{,}75\ MJ$

En consecuencia: $\frac{Q}{1\ Día} = \frac{3{,}75\ MJ}{1\ Día} \times \frac{1\ Día}{24\ h} \times \frac{1\ h}{3600\ s} = 43{,}4\ J/s$

13. ¿Cuánto calor debe agregarse a 20 g de aluminio a 20°C para fundirlo completamente?

Resolución:

Datos: $m_{aluminio} = 20{,}0\ g$; $C_{e\ (aluminio)} = 0{,}215\ \frac{cal}{g°C}$

$T_{inicial} = 20°C$; $T_{final} = T_{fundición} = 660°C$

$Q = ?$

$Q_{fundición\ total} = Q_{fusión} + Q_{ganado}$

$\Rightarrow \quad Q_{fundición\ total} = (20{,}0 \times 10^{-3}\ kg)(3{,}97 \times 10^5\ \frac{J}{kg})$

$+ (20\ g)(0{,}215\ \frac{cal}{g.°C})\ (640°C)\left(\frac{4{,}186\ J}{1\ cal}\right)$

$\Rightarrow \quad Q_{fundición\ total} = 7\ 940\ J + 11\ 520\ J$

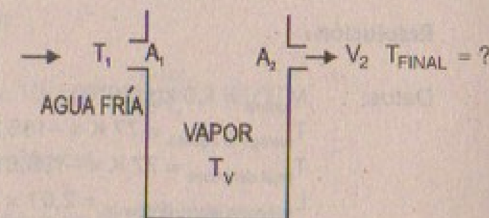
$\therefore \quad Q_{fundición\ total\ (aluminio)} = 19\ 460\ J = 19{,}46\ kJ$

14. Un recipiente aislado contiene vapor saturado que se enfría cuando fluye agua fría por un tubo que pasa por el recipiente. La temperatura del agua que entra es de 273 K. Cuando la velocidad del flujo es de 3,0 m/s, la temperatura del agua que sale es igual 303 K. Determine la temperatura del agua saliente cuando la velocidad de flujos se reduce a 2,0 m/s. Suponga que la tasa de condensación permanece invariable.

14A. Un recipiente aislado contiene vapor saturado que se enfría cuando fluye agua fría por un tubo que pasa por el recipiente. La temperatura del agua que entra es de T_L. Cuando la velocidad del flujo es V_1, la temperatura del agua que sale es T_{sal}. Determine la temperatura del agua saliente cuando la velocidad de flujo se reduce a V_2. Suponga que la tasa de condensación permanece invariable.

Resolución:

Sabemos que: $Q_{entra} = Q_{sale}$



$\Rightarrow \quad m_{H_2O} \times C_e\ (T_V - T_1)$

$= m_{H_2O}\ C_e\ (T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\ .\ volumen\ (T_V - T_1) = \rho_{H_2O}\ .\ volumen\ (T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad \frac{A_1 v_1}{v}(T_V - T_1) = \frac{A_2 v_2}{v}(T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad v_1 T_V - v_1 T_1 = v_2 T_f - v_2 T_V$

$\Rightarrow \quad T_V (v_1 + v_2) = v_2 T_f + v_1 T_1$

$\therefore \quad T_{final} = \frac{T_V (v_1 + v_2) - v_1 T_1}{v_2}$

15. Un calentador de agua funciona por medio de potencia solar. Si el colector solar tiene un área de 6,0 m² y la potencia entregada por la luz solar es de 550 W/m², ¿cuánto tarda en aumentar la temperatura de 1,0 m³ de agua de 20°C a 60°C?

Resolución:

Sabemos que: $\dfrac{\text{Potencia entregada}}{\text{área}} = 550\ \dfrac{W}{m^2}$

Entonces $P_{\substack{\text{Entrega luz}\\ \text{al colector}}} = (550)(6) = 3\,300\ W = 33 \times 10^2\ J/s$

Por otro lado: $Q_{\text{requerido } (20°C \to 60°C)} = W_{\text{luz/agua}} = m_{H_2O} \cdot C_{eH_2O} \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{requerido}} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} \cdot C_{e\ H_2O} \cdot \Delta T = (10^3)(1,0)(4\,186)(60 - 20)$

$\therefore \quad W_{\text{luz/agua}} = 16\,744 \times 10^4\ J$

Si: 33×10^2 J ____ se entrega ____ 1 s

$16\,744 \times 10^4$ J ___ se entrega ____ x s

$\therefore \quad x = 50,7\ ks$

16. Un bloque de cobre de 1,0 kg a 20°C se sumerge en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77 K. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno hierven en el momento en que el cobre alcanza 77 K? (El calor específico del cobre es 0,092 cal/g.°C. El calor latente de vaporización del nitrógeno es 48 cal/g.)

Resolución:

Datos: $M_{\text{cobre}} = 1,0\ kg\ (20°C)$

$T_{\text{nitrógeno líquido}} = 77\ K \equiv -195,81°C$

$T_{\text{final del cobre}} = 77\ K \equiv -195,81°C$

$L_{\text{evaporización (nitrógeno)}} = 2,01 \times 10^5\ J/kg$

$C_{e\ \text{cobre}} = 0,092\ cal/g.°C$

Por el principio de equilibrio térmico:

$Q_{\text{perdido por el cobre}} = Q_{\text{ganado x nitrógeno}} = Q_{\text{vapor.}}$

$\Rightarrow \quad m_{\text{cobre}} \times C_e \times \Delta T = m_{\text{nitrógeno}} \times L_{\text{vapor.}}$

$\Rightarrow \quad (1,0 kg) \times 0,092 \times 10^3\ \dfrac{cal}{kg.°C} \times (293,15 K - 77 K) = M_{\text{nitrógeno}} \times 2,01 \times 10^5 \times \dfrac{1\ cal}{4,186\ J}$

$\Rightarrow \quad (92)(216,15\ K) = M_{\text{nitrógeno}} \times 48017,2$

$\therefore \quad M_{\text{nitrógeno}} = \dfrac{92 \times (57)}{4\ 8017,2} = 0,109\ kg$

17. ¿Cuánto calor se necesita para evaporar un cubo de hielo de 1,0 g inicialmente a 0°C? El calor latente de fusión del hielo es 80 cal/g y el calor latente de vaporización del agua es 540 cal/g.

Resolución:

Datos: $M_{\text{hielo}} = 1,0\ g\ (a\ 0°C)$

$L_{\text{fusión}} = 80\ cal/g$ (hielo)

$L_{\text{vaporización (agua)}} = 540\ cal/g$

$Q_{\text{necesario}} = Q_{\text{fusión}} + Q_{\text{ganado}} + Q_{\text{vaporización}}$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{necesario}} = (1,0\ g)\left(80\dfrac{cal}{g}\right) + (1,0\ g)(1,0\dfrac{cal}{g.°C})(100°C) + (1,0\ g)(540\dfrac{cal}{g})$

$\therefore \quad Q_{\substack{\text{necesario para evaporar}\\ \text{un gramo de leche}}} = 720\ cal$

18. Con un litro de agua a 30°C se prepara té helado. ¿Cuánto hielo a 0°C debe agregarse para reducir la temperatura del té a 10°C?

Resolución:

Datos: Volumen de agua a 30°C = 1 litro = $10^3\ cm^3$

Masa de hielo = ? ; $T_{\text{hielo}} = 0°C$; $L_{\text{fusión hielo}} = 80\ \dfrac{cal}{g}$

$T_{\text{final (té)}} = 10°C$

$Q_{\text{perdido x (té)}} = M_{H_2O} \cdot C_e \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{perdido (té helado)}} = 1,0\ \dfrac{cal}{cm^3} \times 10^3\ cm^3 \times \dfrac{1\ cal}{g.°C} \times (20°C)$

$\therefore \quad Q_{\text{perdido (té helado)}} = 20\ kcal$

Por otro lado: $Q_{\text{fusión}} + Q_{\text{ganado}} = Q_{\text{perdido (té helado)}} = 20\ kcal$

$\Rightarrow \quad M_{\text{hielo}} \times 80\ \dfrac{cal}{g} + M_{\text{hielo (agua)}} \cdot C_e \cdot \Delta T = 20\ kcal$

$\Rightarrow \quad \left(80\dfrac{cal}{g} + 10\dfrac{cal}{g}\right) M_{\text{hielo}} = 20 \times 10^3\ cal$

$\therefore \quad M_{\text{hielo}} = 0,22\ kg$

19. Cuando un conductor frena un automóvil, la fricción entre los tambores y las balatas de los frenos convierten la energía cinética del auto en calor. Si un automóvil de 1500 kg que viaja a 30 m/s se detiene, ¿cuánto aumenta la temperatura en cada uno de los cuatro tambores de hierro de 8 kg de los frenos? (Ignore la pérdida térmica hacia los alrededores).

Resolución:

Datos: $M_{automóvil} = 1\ 500$ kg ; $v_{automóvil} = 30$ m/s

$M_{c/tambor\ hierro} = 8$ kg ; $C_{e\ hierro} = 448\ \frac{J}{kg.°C}$

$\Delta T = ?$

$$E_{K\ automóvil} = Q_{perdido \times auto} = Q_{ganado \times tambores}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(1\ 500)(30)^2 = 4(M\ c/tambor)\ C_{e\ hierro} \times \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad 750(30)^2 = 4(8\ kg)(448)\ \Delta T$$

$$\therefore \quad \Delta T = 47{,}1°C$$

20. Si 90,0 g de plomo fundido a 327,3°C se vierten en una pieza de 300,0 g fundida de hierro inicialmente a 20,0°C, ¿cuál es la temperatura final del sistema? (Suponga que no hay pérdidas de calor).

Resolución:

Datos: $M_{plomo\ fundido\ a\ 327°C} \doteq 90{,}0$ g $\qquad L_{fusión} = 2{,}45 \times 10^4\ \frac{J}{kg}$

$M_{pieza\ de\ hierro\ fundida\ a\ 20°C} = 300{,}0$ g

$C_{e\ plomo} = 0{,}0305$ cal/g.°C $\qquad C_{e\ hierro} = 0{,}107$ cal/g.°C

$T_{equilibrio} = ?$

Por equilibrio y principio de la calorimetría:

$$(Q_{fusión} + Q_{perdido})_{plomo} = Q_{ganado\ (hierro)}$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}45 \times 10^4\ \frac{J}{kg}\left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)\left(\frac{1\ kg}{1\ 000 g}\right) \times (90{,}0\ g) + (90{,}0\ g)\left(0{,}0305\ \frac{cal}{g.°C}\right)(\Delta T)$$

$$= (300\ g)\left(0{,}107\ \frac{cal}{g.°C}\right)(T_{equil.} - 20°C)$$

$$\Rightarrow \quad 526{,}76\ cal + 2{,}745\ (327{,}3 - T_{equil.}) = 32{,}1\ (T_{equil.} - 20)$$

$$\Rightarrow \quad 526{,}76\ cal + 898{,}44 - 2{,}745\ T_{equil.} = 32{,}1\ T_{equil.} - 642$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 59{,}32°C$$

21. En un recipiente aislado se agregan 250 g de hielo a 0°C a 600 g de agua a 18°C. a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? b) ¿Qué cantidad de hielo queda cuando el sistema alcanza el equilibrio?

Resolución:

Datos: Masa de hielo a 0°C = 250 g ; $C_{e\ hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

Masa de agua a 18°C = 600 g ; $C_{e\ H_2O} = 1{,}0$ cal/g.°C

Parte (a)

$$Q_{calor\ (que\ se\ cede)} = (600\ g)\left(1\ \frac{cal}{g.°C}\right)(18 - 0) = 10{,}8\ kcal$$

$$Q_{hielo\ (ganado)} = m\ L_{fusión} = (250\ g)\left(80\ \frac{cal}{g.°C}\right) = 20\ kcal$$

En consecuencia:

No se derretirá todo el hielo, luego:

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 0°C$$

Parte (b) $\qquad 10{,}8\ kcal = m_{hielo} \times L_{fusión}$

$$\Rightarrow \quad 10{,}8\ kcal = m_{hielo} \times 80\ \frac{cal}{g}$$

$$\therefore \quad m_{hielo} = 135\ g \text{ (se transforman en agua)}$$

En consecuencia: quedará de hielo = 250 g – 135 g = 115 g

22. Un cubo de hielo de 50 g a –20,0°C se sumerge en un recipiente de agua a 0,0°C. ¿Qué cantidad de agua se congela sobre el hielo?

Resolución:

Datos: M_{hielo} (a – 20,0°C) = 50 g $\qquad C_{e\ hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

$T_{agua} = 0°C$; $\qquad C_{e\ H_2O} = 1$cal/g.°C

$M_{H_2O} = ?$

$$Q_{cede\ (agua)} = M_{H_2O} \cdot \left(80\ \frac{cal}{g}\right)$$

$$Q_{gana\ (hielo)} = Q_{fusión} + Q_{ganado} = (50\ g)\left(80\ \frac{cal}{g}\right) + (50)(0{,}5)(20)\ cal$$

$$\therefore \quad Q_{requiere} = 4{,}5\ kcal$$

Luego:

$$M\ .\ 80\frac{cal}{g} = 4{,}5 \times 10^3\ cal \qquad \therefore \quad M_{H_2O} = 56{,}25\ g \text{ (que se congela)}$$

23. Un clavo de hierro se clava dentro de un bloque de hielo por medio de un solo golpe de martillo. La cabeza de éste tiene una masa de 0,50 kg y una velocidad inicial de 2,0 m/s. El clavo y el martillo se encuentran en reposo después del golpe. ¿Cuánto hielo se funde? Suponga que la temperatura del clavo es 0,0°C antes y después.

Resolución :

Datos: $M_{cabeza\ del\ clavo} = 0{,}5$ kg ; $v_{inicial\ (clavo)} = 2{,}0$ m/s

$T_{inicial\ del\ clavo} = 0°C$ $\quad C_{e\ hierro} = 448$ J/kg.°C

$M_{hielo} = ?$ $\quad C_{e\ hierro} = 2\ 090$ J/kg.°C

$$Q_{calor\ que\ pierde\ el\ clavo} = E_{k\ clavo} = \frac{1}{2}(0{,}5)(2{,}0)^2 = 1\ J$$

$$Q_{calor\ que\ gana\ hielo} = mL_{fusión}$$

Entonces por el principio de calorimetría:

$$Q_{ganado} = Q_{perdido}$$

$$\Rightarrow \quad M_{hielo} \times 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg} = 1J$$

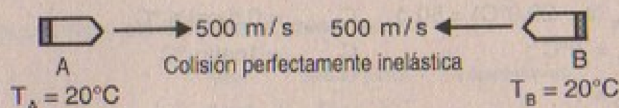
$$\therefore \quad M_{hielo\ que\ se\ funde} = 3 \times 10^{-6}\ kg = 3{,}00\ \mu g$$

24. Dos balas de plomo de 5,0 g, ambas a temperatura de 20°C, chocan de frente cuando cada una se mueve a 500 m/s. Suponiendo una colisión perfectamente inelástica y ninguna pérdida de calor hacia la atmósfera, describa el estado final del sistema de las dos balas.

Resolución :

$$M_{bala\ A} = M_{bala\ B} = 5{,}0\ g$$

Bala de plomo



$T_A = 20°C$ $\quad T_B = 20°C$

Sabemos que en una colisión perfectamente inelástica los cuerpos después del choque se mantienen unidos, disminuyendo la E_K del sistema.

Entonces: $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$\Rightarrow \quad (5 \times 10^{-3}\ kg)(500) - (5 \times 10^{-3}\ kg)(500) = 0$$

como: $E_{K\ inicial} = 2\left(\frac{1}{2}\right)(0{,}005)(500)^2 = 1\ 250\ J$

Entonces: $E_{K\ inicial\ sistema} = Q_{transformación\ (liberado)\ (sistema)}$

25. Un centavo de cobre de 3,0 g a 25°C se sumerge 50 m en la tierra. a) Si 60% de la energía potencial se emplea en aumentar la energía interna, determine su temperatura final. b) ¿El resultado final depende de la masa del centavo? Explique.

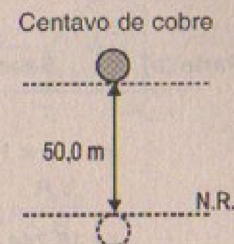
Resolución :

Datos: $M_{cobre} = 3{,}0$ g ; $T_{cobre} = 25°C$

Profundidad de la tierra = 50,0 m

Parte (a)

Centavo de cobre



$$U_{potencial} = mgh = (3 \times 10^{-3}\ kg)(9{,}8\ \frac{m}{s^2})(50)$$

$$= 1{,}47\ J$$

Entonces $60\%\ U_{potencial} = (0{,}6)(1{,}47\ J)$

$$= 0{,}882\ J$$

Por dato: $U_{interna} = Q = 0{,}6\ U_{potencial}$

$$\Rightarrow \quad Q_{térmico} = 0{,}882\ J = m_{cobre} \cdot C_e \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}882\ J = (3 \times 10^{-3}\ kg)(387\ \frac{J}{kg.°C})(T_f - 25°C)$$

$$\therefore \quad T_{final} = 25{,}76°C$$

Parte (b)

Para hallar la temperatura final:

$$(0{,}6)(mgh) = mC_e\Delta T$$

$$\therefore \quad \Delta T = \frac{(0{,}6)gh}{C_e} = 60\%\ \frac{gh}{C_{e(cobre)}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{final} = T_0 + 60\%\left(\frac{gh}{C_e}\right)$$

Podemos concluir que:

El resultado final no depende de la masa del centavo.

26. El lago Erie contiene cerca de $4{,}0 \times 10^{11}\ m^3$ de agua. a) ¿Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de ese volumen de agua de 11°C a 12°C? b) ¿Aproximadamente cuántos años tomaría suministrar esta cantidad de calor empleando la salida completa de una central eléctrica de 1 000 MW?

Resolución :

Datos: Volumen del agua = $4{,}0 \times 10^{11}\ m^3$

Parte (a)

$Q_{requiere} = ?$; $\quad T_{final} = 12°C$; $\quad T_{inicial} = 11°C$

Entonces: $Q_{que\ se\ requiere} = m_{agua} \cdot C_{e\ agua} \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{que\ se\ requiere} = \rho_{H_2O} \cdot \text{Volumen}\ \Delta T\ C_e$$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{que se requiere}} = 10^3 \frac{kg}{m^3} \times 4{,}0 \times 10^{11}\ m^3 \times 4\ 186\ \frac{J}{kg.°C} \times 1°C \left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{que se requiere}} = 4 \times 10^{14}\ kcal$$

Parte (b) Sabemos que: $\frac{Q}{t} = P = 10^3\ \frac{MJ}{s}$

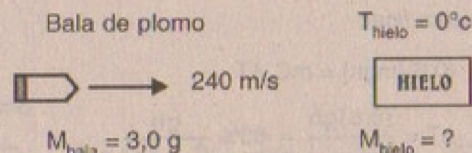
$$\Rightarrow \quad 4 \times 10^{17}\ cal = 10^3 \times M \times \frac{J}{s} \times \left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right) \times t$$

$$\therefore \quad t = 16{,}744 \times 10^8\ s \left(\frac{1\ año}{365\ días} \times \frac{1\ día}{24\ h} \times \frac{1\ h}{3\ 600\ s}\right) \equiv 53{,}09\ años$$

27. Una bala de plomo de 3,0 g se desplaza a 240 m/s cuando se incrusta en un bloque de hielo a 0°C. Si todo el calor generado funde el hielo, ¿qué cantidad de hielo se derrite? (El calor latente de fusión para el hielo es de 80 kcal/kg y el calor específico del plomo es de 0,030 kcal/kg.°C).

Resolución :

Datos:



Sabemos que (por dato) $L_{\text{fusión hielo}} = 80\ kcal/kg$

$C_{e\ plomo} = 0{,}030\ kcal/kg°.C$

Decimos que:

$$Q_{\text{generado por la bala}} = E_{K\ bala} = Q_{\text{transformación (hielo)}}$$

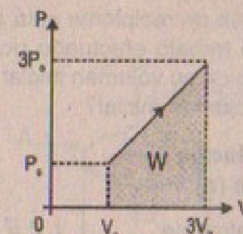
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3{,}0 \times 10^{-3})(240)^2 = M_{hielo} \times 80 \times 10^3\ \frac{cal}{kg} \times \left(\frac{4{,}186\ J}{1\ cal}\right)$$

$$\therefore \quad M_{\text{hielo que se funde}} = 0{,}258\ g \text{ si la bala está a } 0°C$$

TRABAJO Y CALOR EN PROCESOS TERMODINÁMICOS

28. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que pasa del estado (P_0, V_0) al estado $(3P_0, 3V_0)$. Este cambio ocurre de tal manera que la presión del gas es directamente proporcional al volumen. a) ¿Cuánto trabajo se efectúa en el proceso? b) ¿Cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?

Resolución :



Parte (a)

$$\text{Trabajo} = W = \left(\frac{P_0 + 3P_0}{2}\right)(3V_0 - V_0)$$

$$\therefore \quad W = 4P_0\ V_0$$

Parte (b)

Inicialmente: $P_o\ V_o = R\ T_{inicial}$ $\quad \therefore \quad T_{inicial} = \frac{P_0 V_0}{R}$

Finalmente: $3^2 P_o\ V_o = RT_{final}$ $\quad \therefore \quad T_{final} = \frac{9P_0V_0}{R}$

29. Un gas se expande de *I* a *F* a lo largo de tres posibles trayectorias, como se indica en la figura P20.29. Calcule el trabajo en joules realizado por el gas a lo largo de las trayectorias *IAF*, *IF* e *IBF*.

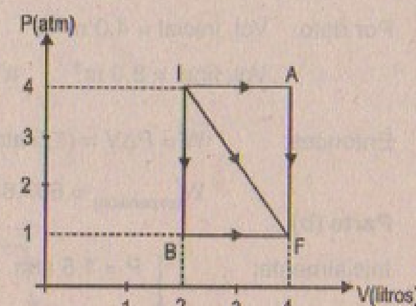


Figura P20.29

Resolución :

$$\text{Trabajo (IAF)} = W_{IA} + W_{AF} = W_{IA} + 0$$

$$\therefore \quad W_{(IAF)} = (4\ atm)(4-2)\ litros = 8\ atm \times litros \times \frac{10^3 cm^3}{1\ litro} \times \frac{1\ m^3}{10^6 cm^3} \times \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\ N/m^2$$

$$\therefore \quad W_{(IAF)} = 810\ J$$

Por otro lado: $\text{Trabajo (IF)} = \left(\frac{4+1}{2}\right)(2) = 5\ atm\ .\ litros\ \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\ \frac{N}{m^2} \times \frac{10^{-3} m^3}{1\ litros}$

$$\therefore \quad W_{(IF)} = 506\ J$$

Por último: $\text{Trabajo (IBF)} = W_{IB} + W_{BF} = 0 + W_{BF}$

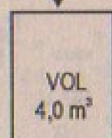
$$\Rightarrow \quad W_{(IBF)} = 2\ atm \times litros \times \frac{10^{-3} m^3}{1\ litro} \times (1{,}013 \times 10^5\ N/m^2)$$

$$\therefore \quad W_{(IBF)} = 203\ J$$

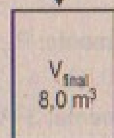
30. Gas en un recipiente está a una presión de 1,5 atm y un volumen de 4,0 m^3. ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas si a) se expande a presión constante hasta el doble de su volumen inicial y b) se comprime a presión constante hasta un cuarto de su volumen inicial?

Resolución:
Parte (a)

Inicialmente: P = 1,5 atm



Finalmente: P = 1,5 atm



Por dato: Vol. inicial = 4,0 m^3

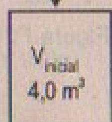
Vol. final = 8,0 m^3 a P = cte

Entonces: $W = P\Delta V = (1{,}5\text{ atm})(4\text{ m}^3) \times \dfrac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\text{ N/m}^2$

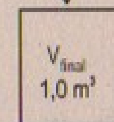
$\therefore\ W_{(expansión)} = 607{,}8\text{ kJ}$

Parte (b)

Inicialmente: P = 1,5 atm



Finalmente: P = 1,5 atm



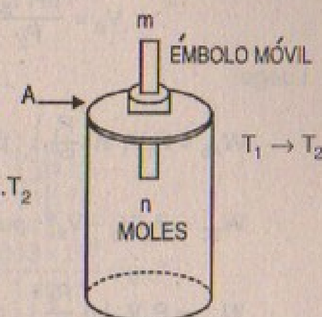
Entonces: $W = P\,\Delta V = (1{,}5\text{ atm})(1{,}0\text{ m}^3 - 4{,}0\text{ m}^3) \times \dfrac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\text{N/m}^2$

$\therefore\ W_{(compresión)} = -456\text{ kJ}$

31. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo móvil en la parte superior. El émbolo tiene una masa de 8 000 g y un área de 5,0 cm^2, y se puede mover libremente hacia arriba y hacia abajo, manteniendo constante la presión del gas, ¿Cuánto trabajo se hace cuando la temperatura de 0,20 moles del gas se eleva de 20°C a 300°C?

31A. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo móvil en la parte superior. El émbolo tiene una masa *m* y un área *A*, y se puede mover libremente hacia arriba y hacia abajo, manteniendo la presión del gas constante. ¿Cuánto trabajo se hace cuando la temperatura de *n* moles del gas se eleva de T_1 a T_2?

Resolución:
P = cte



Sabemos que: $\dfrac{F}{A} = \dfrac{\text{Peso del émbolo}}{A} = P$

Por otro lado: $V_1 = \dfrac{nR}{P}.T_1 \quad \wedge \quad V_2 = \dfrac{nR}{P}.T_2$

$\Rightarrow \quad \Delta V = (T_2 - T_1)\dfrac{nR}{P}$

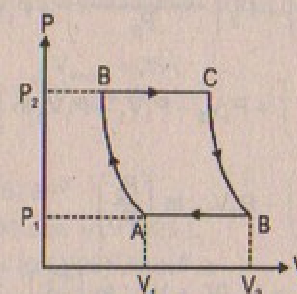
Como: $W = P\Delta V$

Luego: $W = P(T_2 - T_1)\dfrac{nR}{P} \qquad \therefore\ W = nR(\Delta T)$

32. $W_{neto} = P_1\,(V_2 - V_1)\ln\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)$

Resolución:

Dada la figura:



Por demostrar que:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1)\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Sabemos que: $W_{neto} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \quad ...(\alpha)$

Por otro lado:

$$\underbrace{T_A = T_B}_{\text{Isoterma}} = \frac{P_1V_1}{Rn} \quad ; \quad \underbrace{T_C = T_D}_{\text{Isoterma}} = \frac{P_2V_2}{Rn}$$

Además; se cumple que:

$$V_c = \frac{nRT_C}{P_2} = \left(\frac{nR}{P_2}\right)\left(\frac{P_1.V_2}{nR}\right) = \frac{P_1.V_2}{P_2}$$

$$V_B = \frac{nRT_B}{P_2} = \left(\frac{nR}{P_2}\right)\left(\frac{P_1 . V_1}{nR}\right) = \frac{P_1 . V_1}{P_2}$$

Luego:

$$W_{AB} = P_1V_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ ; puesto que: } PV = cte$$

$$W_{BC} = P_2(V_c - V_B) \text{ ; puesto que: } P = cte$$

$$W_{CD} = P_1V_2 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \text{ ; puesto que: } PV = cte$$

$$W_{DA} = P_1(V_1 - V_2) \text{ ; puesto que: } P = cte$$

Entonces reemplazando en (α) resulta que:

$$W_{neto} = P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + P_2\left(\frac{P_1V_2 - P_1V_1}{P_2}\right) + P_1V_2 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + P_1(V_1 - V_2)$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + P_1V_2 - P_1V_1 + P_1V_2 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + P_1V_1 - P_1V_2$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = P_1V_2 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\therefore \quad W_{neto} = P_1 (V_2 - V_1) . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{l.q.q.d.}$$

33. Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de 1,0 m³ en un proceso cuasiestático para el cual $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5{,}0$ atm/m⁶, como se muestra en la figura P20.33. ¿Cuánto trabajo fue hecho por el gas en expansión?

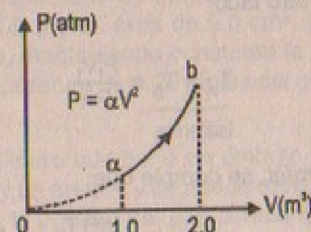


Figura P20.33

Resolución :

$$\alpha = 5{,}0 \frac{atm}{m^6}$$

Sabemos que: $W_{a\to b} = \int_V PdV$

$$\Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = \int_1^2 \alpha V^2 dV \quad = 5 \left.\frac{V^3}{3}\right|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = \frac{35}{3} \text{ atm . m}^3 \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}} \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \quad W_{(a\to b)} = 1{,}18 \text{ MJ}$$

34. Un gas ideal a TPE (1 atm y 0°C) se lleva por un proceso en el que el volumen se expande de 25 L a 80 L. Durante este proceso la presión varía inversamente a medida que el volumen se eleva al cuadrado, $P = 0{,}5\ aV^{-2}$. a) Determine la constante *a* en unidades del SI. b) Encuentre la presión y temperatura finales. c) Determine una expresión general para el trabajo hecho por el gas durante este proceso. d) Calcule el trabajo real en joules efectuado por el gas en este proceso.

Resolución :

Datos: $P = 1$ atm ; $V_{inicial} = 25$ L
$T = 0°C$; $V_{final} = 80$ L
$P = 0{,}5\ aV^2$

Parte (a)

Sabemos que: $P = (0{,}5)\ aV^2$

Entonces si: $P = 1{,}00$ atm y $V = 25$ L

Luego: $1 \text{ atm} = (0{,}5)(25)^2 \text{ litros}^2 .a$

$$\therefore \quad a = 32 \times 10^{-4} \frac{atm}{L^2}$$

Parte (b)

Como: $$a = 32 \times 10^{-4} \frac{atm}{L^2} \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}} \frac{N}{m^2} \times \frac{1 L^2}{10^{-6} m^6}$$

$$\therefore \quad a = 3{,}24 \times 10^8 \frac{N}{m^8}$$

Parte (c)

Sabemos que: $W = \int PdV$

$$\Rightarrow \quad W = \int_V (0{,}5) aV^2 dV = \frac{(0{,}5)(a)}{3} V^3 + k$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{6} aV_f^3 - \frac{1}{6} aV_i^3$$

Parte (d)

Para: $a = 3{,}24 \times 10^8 \dfrac{N}{m^8}$ $\quad V_{inicial} = 25 \times 10^{-3}\ m^3$

$V_{final} = 80 \times 10^{-3}\ m^3$

Entonces: $W = \dfrac{1}{6}(3{,}24 \times 10^8)\left[(80 \times 10^{-3})^3 - (25 \times 10^{-3})^3\right]$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{3{,}24}{6} \times 10^8\,(55 \times 10^{-3})[64 \times 10^{-4} + 6{,}25 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-3}]$$

$$\therefore \quad W_{gas} = 26{,}8\ kJ$$

35. Un mol de un gas ideal realiza 3 000 J de trabajo sobre los alrededores conforme se expande isotérmicamente hasta una presión final de 1 atm y un volumen de 25 L. Determine a) el volumen inicial, y b) la temperatura del gas.

Resolución:

Datos: $W = 3\,000\ J$; $P_{final} = 1\ atm$

$V_{final} = 25\ L$; $V_{inicial} = ?$

Parte (a)

Sabemos que: $W = \int PdV$

$$\Rightarrow \quad 3\,000\ J = \int_{V} \frac{nRT}{V}\, dV$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 10^3\ J = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (1\ atm)(25\ L) = (1\ mol)\left(0{,}082\ \frac{atm.L}{mol.K}\right)T$$

$$\therefore \quad T = 305\ K$$

Luego en (1)

$$3 \times 10^3\ J = 25\ atm \times L \times \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\,\frac{N}{m^2} \times \frac{10^{-3}\ m^3}{1L}.\ \ln\left[\frac{25}{V_i}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}1846 = \ln\left(\frac{25}{V_i}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{e^{(1{,}1846)}} = V_{inicial}$$

$$\therefore \quad V_{inicial} = 7{,}65\ \text{litros}$$

Parte (b)

Como: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (1\ atm)(25\ L) = (1\ mol)\left(0{,}082\ \frac{atm.L}{mol.K}\right)T$$

$$\therefore \quad T_{sistema} = 305\ K$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

36. Un gas ideal se somete a proceso cíclico mostrado en la figura P20.36 de A a B a C y de regreso a A. a) Dibuje un diagrama *PV* para este ciclo e identifique las etapas durante las cuales se absorbe calor y aquellas durante las cuales se emite calor. b) ¿Cuál es el resultado completo del ciclo en función de *U*, *Q* y *W*?

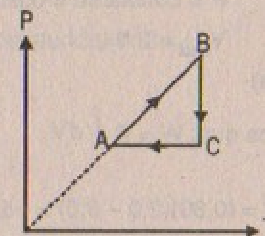


Figura P20.36

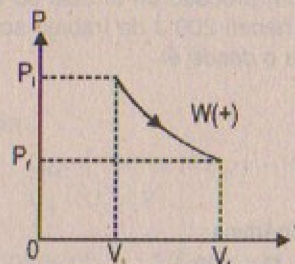
Resolución:

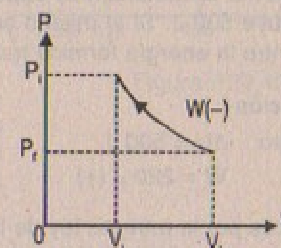
Parte (a)

Sabemos que: $\Delta U = Q - W$

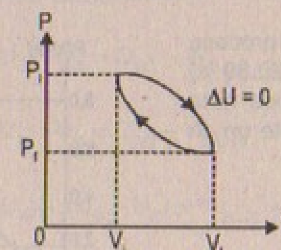
$\Rightarrow$ Ciclo: $\Delta U = 0$ $\quad \therefore \quad Q = W$

- Como el sistema absorbe calor, entonces: W = positivo (expansión)
- Cuando el sistema emite calor, entonces: W = negativo (compresión)





Parte (b)



37. Un gas es comprimido a una presión constante de 0,80 atm de 9,0 L a 2,0 L. En el proceso, 400 J de energía térmica salen del gas. a) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas? b) ¿Cuál es el cambio en su energía interna?

37A. Un gas es comprimido a una presión constante *P* de V_1 a V_2. En el proceso, *Q* joules de energía térmica salen del gas. a) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas? b) ¿Cuál es el cambio en su energía interna?

Resolución :

Datos: P = constante = 0,80 atm ; $V_{inicial}$ = 9,0 L

V_{final} = 2,0 L ; Energía liberada = –400 J = Q

Parte (a)

Sabemos que: $W = P\int dV$

$$\Rightarrow \quad W = (0{,}80)(2{,}0 - 9{,}0) = -5{,}6 \text{ atm . L} \times \frac{1{,}013\times10^{5}}{1 \text{ atm}}\frac{N}{m^{2}}\times\frac{10^{-3}\,m^{3}}{1L}$$

$$\therefore \quad W_{(-)} = -567{,}3 \text{ J}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica: $\Delta U = Q - W$

Entonces: $\Delta U = -400 \text{ J} - (-567)$

$\therefore \quad \Delta U = 167 \text{ J}$

38. Un sistema termodinámico experimenta un proceso en el cual su energía interna disminuye 500 J. Si al mismo tiempo se hacen 200 J de trabajo sobre el sistema, encuentre la energía térmica transferida a o desde él.

Resolución :

Por dato: $\Delta U = 500$ J

W = 220 J (+)

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad 500 \text{ J} = Q - 220 \text{ J}$

$\therefore \quad Q_{transferida} = 720 \text{ J}$

39. Un gas se lleva a través del proceso cíclico descrito en la figura P20.39. a) Encuentre la energía térmica neta transferida al sistema durante un ciclo completo.

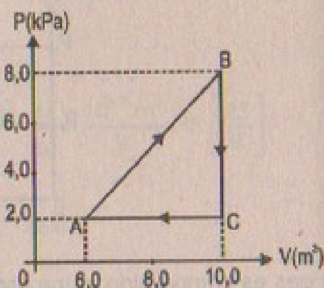


Figura P20.39

Resolución : 39

Parte (a)

Sabemos que en un proceso cíclico $\Delta U = 0 \quad \therefore \quad Q = W$

Por otro lado: $W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = W_{A\to B} + W_{C\to A}$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \left(\frac{2+8}{2}\right)(4) + 2(6 - 10) = 12 \text{ kJ}$$

En consecuencia: Q = energía térmica transferida = 12 kJ

Parte (b)

Si se invierte el ciclo entonces W(–) = Q

En consecuencia: Q = energía térmica = –12 kJ

40. Un sistema gaseoso sigue el proceso que se indica en la figura P20.40. De A a B, el proceso es adiabático, y de *B* a *C* es isobárico con 100 kJ de flujo de calor hacia el sistema. De *C* a *D*, el proceso es isotérmico, y de *D* a *A* es isobárico con 150 kJ de flujo de calor hacia fuera del sistema. Determine la diferencia en la energía interna $U_B - U_A$.

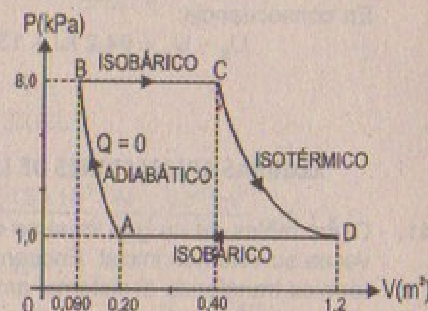


Figura P20.40

Resolución :

Datos: $Q_{BC} = 100$ kJ ; $Q_{DA} = -150$ kJ

$U_B - U_A = ?$

Por la primera ley: $\Delta U = Q - W = -W \quad \Rightarrow \quad W = P\int dV = ?$

De otra manera (utilizando datos)

Sabemos que:

$$(-)\begin{cases} U_C - U_B = Q_{BC} - W_{B\to C} \\ U_A - U_D = Q_{AD} - W_{D\to A} \end{cases}$$

$$(U_B - U_A) + (U_D - U_C) = W_{B\to C} + W_{D\to A} - Q_{BC} - Q_{DA}$$

Pero: $U_D - U_C = Q_{DC} - W_{C\to D} = 0 - W_{C\to D}$ (proceso isotérmico)

Luego: $U_B - U_A = W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A} - (Q_{BC} - \overset{0}{\cancel{Q_{CD}}} + Q_{DA})$

$$\text{Pero: } W_{B\to C} = (3 \text{ atm})(0{,}40 - 0{,}09) = 3 \text{ atm} \times \frac{1{,}013\times10^{5}}{1 \text{ atm}}\frac{N}{m^{2}}\times(0{,}31\ m^{3}) = 94{,}2 \text{ kJ}$$

$$W_{C\to D} = nRT\,.\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = PV\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = (0{,}4)(3\text{ atm}) \times \frac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\frac{N}{m^2}\,.\ln\left(\frac{1{,}2}{0{,}4}\right)$$

$$\therefore \quad W_{C\to D} = 133{,}5\text{ kJ}$$

$$W_{D\to A} = (1{,}0\text{ atm})(0{,}20 - 1{,}2) = -1\text{ atm}\,.\frac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\frac{N}{m^2}\times m^3 = -101{,}3\text{ kJ}$$

Además: (por dato)

$$Q_{BC} = 100\text{ kJ} \quad y \quad Q_{DA} = -150\text{ kJ}$$

En consecuencia:

$$U_B - U_A = 94{,}2\text{ kJ} + 133{,}5\text{ kJ} - 101{,}3\text{ kJ} - (100\text{ kJ} - 150\text{ kJ})$$

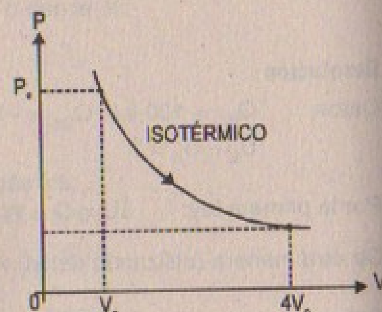
$$\therefore \quad U_B - U_A = 176{,}4\text{ kJ}$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

41. Cinco moles de un gas ideal se expanden isotérmicamente a 127°C hasta cuatro veces su volumen inicial. Encuentre a) el trabajo hecho por el gas, y b) la energía térmica transferida al sistema, ambos en joules.

Resolución:

Parte (a)



Datos: $n = 5$ moles

$R = 0{,}082\ \frac{atm\,.\,L}{mol\,.\,K}$

$T = 127°C$

$T = cte = 127°C$

En un proceso isotérmico $\Delta U = 0$

Entonces por la primera ley: $\Delta U = Q - W \Rightarrow Q = W$

Por otro lado: $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

Luego: $W = \int P\,dV = \int_{V_o}^{4V_o} \frac{nRT}{V}\,.\,dV$

Entonces: $W = (nRT)\ln\left(\frac{4V_o}{V_o}\right)$

Reemplazando: $W = (5)\left(8{,}31\frac{J}{mol.K}\right)\ln(4)(127+273) = 23\text{ kJ} \equiv Q$

42. ¿Cuánto trabajo efectúa el vapor cuando 1,0 mol de agua a 100°C hierve y se convierte en 1 mol de vapor a 100°C y 1,0 atm de presión? Determine el cambio en la energía interna del vapor conforme se produce el cambio de estado. Considere al vapor como un gas ideal.

Resolución:

Datos: $n = 1{,}00$ mol ; $P = 1{,}00$ atm

$T = 100°C \equiv 373$ K ; $R = 0{,}082\ \frac{atm\,.\,L}{mol\,.\,K}$

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1{,}00\text{ mol})(0{,}082)(373)}{1{,}00\text{ atm}} = 30{,}6\text{ L}$$

Luego: $W = PV = (1\text{ atm})(30{,}6\text{ L}) \times \frac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\frac{N}{m^2}\times\frac{10^{-3}m^3}{1\text{ L}} = 3{,}1\text{ kJ}$

Entonces por la primera ley: $\Delta U = Q - W$

Pero: $Q = Q_{transformación} = 2{,}26\times10^6\frac{J}{kg}\times1\text{ mol}\times18\frac{g}{mol}\times\frac{1\text{ kg}}{10^3\text{ g}}$

$$\therefore \quad Q = 40{,}68\text{ kJ}$$

En consecuencia: $\Delta U = 40{,}68\text{ kJ} - 3{,}1\text{ kJ} = 37{,}58\text{ kJ}$

43. Se calienta helio a presión constante de 273 K a 373 K. Si el gas realiza 20,0 J de trabajo durante el proceso, ¿cuál es la masa de helio?

Resolución:

Datos: Proceso isobárico

$T_{inicial} = 273$ K ; $W = 20{,}0$ J; $R = 8{,}31\ \frac{J}{mol K}$

$T_{final} = 373$ K ; $m_{helio} = \rho$

En un proceso isobárico $W = P(V_f - V_i)$

Por otro lado: $\frac{V_i}{T_i} = \frac{V_f}{T_f} = \frac{n.R}{P} = cte$

Además: $PV_f - PV_i = nRT_f - nRT_i = nR(\Delta T) = 20{,}0\text{ J}$

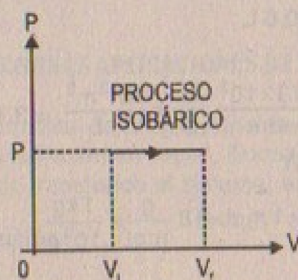
Entonces: $\frac{m_{helio}}{M_{helio}}\times\left(8{,}31\frac{J}{mol K}\right)\times(373-273) = 20{,}0\text{ J}$

$$\Rightarrow \quad m_{helio} = \frac{(20{,}0)\left(4\,\frac{g}{mol}\right)}{\left(8{,}31\,\frac{J}{mol K}\right)(100 K)} = 0{,}0962 \text{ g}$$

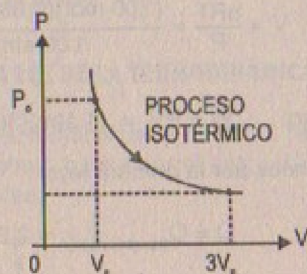
44. Un mol de un gas ideal se calienta a presión constante de modo que su temperatura se triplica. Luego se calienta el gas a temperatura constante de manera que su volumen se triplica. Encuentre la razón entre el trabajo efectuado durante el proceso isotérmico y el realizado durante el proceso isobárico.

Resolución :

Inicialmente:



Finalmente:



Inicialmente en un proceso isobárico:

$$V_{inicial} = \frac{nRT_o}{P} \quad \wedge \quad V_{final} = \frac{3nRT_o}{P}$$

Luego: $W = P\Delta V$

$$\Rightarrow \quad W = P\left[\frac{3nRT_o}{P} - \frac{nRT_o}{P}\right] = 2nRT_o$$

Finalmente en un proceso isotérmico:

Se sabe que: $W = nRT_o \ln\left(\frac{3V_o}{V_o}\right) = nRT_o \ln(3)$

En consecuencia: $\frac{W_{proceso\ isotérmico}}{W_{proceso\ isobárico}} = \frac{nRT_o \ln(3)}{2nRT_o}$

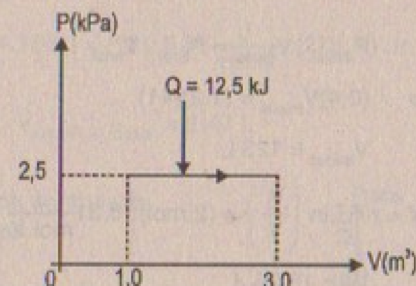
$$\therefore \quad \text{Razón} = \frac{\ln(3)}{2} = 0{,}549$$

45. Un gas ideal inicialmente a 300 K se somete a una expansión isobárica a 2,50 kPa. Si el volumen aumenta de 1,00 m^3 a 3,00 m^3, y se transfieren al gas 12,5 kJ de energía térmica, calcule a) el cambio en su energía interna, y b) su temperatura final.

Resolución :

Datos:

$T_{inicial} = 300$ K



Parte (a)

Sabemos que: $W = P.\Delta V = (2{,}5)(3 - 1) = 5$ kJ

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = 12{,}5 \text{ kJ} - 5 \text{ kJ} \qquad \therefore \quad \Delta U = 7{,}5 \text{ kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\frac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{V_{final}}{T_{final}} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1{,}0\ m^3}{300K} = \frac{3{,}0\ m^3}{T_{final}} \qquad \therefore \quad T_{final} = 900 \text{ K}$$

46. Dos moles de gas helio inicialmente a 300 K y 0,40 atm se comprimen isotérmicamente a 1,2 atm. Encuentre a) el volumen final del gas, b) el trabajo hecho por el gas, y c) la energía térmica transferida. Considere que el helio se comporta como un gas ideal.

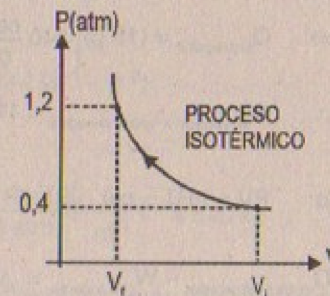
Resolución :

Datos:

n = 2 moles (helio)

T = 300 K

$R = 0{,}082\ \frac{atm.L}{mol K}$



Parte (a)

Sabemos que: $P_f \cdot V_{final} = nRT$

$$\Rightarrow \quad V_{final} = \frac{nRT}{P_f} = \frac{(2)(0{,}082)(300)}{1{,}2}$$

$$\therefore \quad V_{final} = 41 \text{ litros}$$

Parte (b)

Sabemos que: $P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (0,4)V_{inicial} = (1,2)(41)$

$\therefore \quad V_{inicial} = 123 \text{ L}$

Luego: $W = nRT.\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = (2 \text{ mol})\left(8,31\frac{\text{J}}{\text{mol.K}}\right)\ln\left(\frac{123}{41}\right)$

$\therefore \quad W = 18,26 \text{ J}$

Parte (c)

En un proceso isotérmico: $\Delta U = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta U = Q - W = 0 \qquad \therefore \quad Q = W = 18,26 \text{ J}$

47. Un mol de vapor de agua a 373 K se enfría a 283 K. El calor entregado por el vapor del agua que se enfría lo absorben 10 moles de un gas ideal, y esta absorción de calor ocasiona que el gas se expanda a una temperatura constante de 273 K. Si el volumen final del gas ideal es 20,0 L, determine su volumen inicial.

47A. Un mol de vapor de agua a temperatura T_h se enfría a T_c. El calor entregado por el vapor del agua que se enfría lo absorben n moles de un gas ideal, y esta absorción de calor ocasiona que el gas se expanda a una temperatura constante de T_0. Si el volumen final del gas ideal es V_f, determine su volumen inicial.

Resolución:

Sabemos que: $Q_{\text{entregado vapor de agua}} = Q_{\text{vaporización}} + Q_{\text{perdido}}$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{entregado}} = m_{H_2O} \cdot L_{vapor} + m_{H_2O} \cdot C_e\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{entregado}} = (18 \text{ g})\left(540\,\frac{\text{cal}}{\text{g}}\right) + (18 \text{ g})\left(\frac{1 \text{ cal}}{\text{g}\,°\text{C}}\right)(100 - 10)°\text{C}$

$\therefore \quad Q_{\text{entregado} \times \text{vapor de agua}} = 11\,340 \text{ cal}$

Por otro lado: $PV = nRT = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

Como: $Q_{\text{entregadoxvapor}} - W_{(10 \text{ moles})} = \Delta U = 0$ ya que $T = \text{cte} = 273$ K

$\Rightarrow \quad Q_{\text{entregado} \times \text{vapor}} = W_{(10 \text{ moles})} = \int P\,dV$

$\Rightarrow \quad 11\,340 \text{ cal} \times \left(\frac{4,186 \text{J}}{1 \text{ cal}}\right) = nRT\int_{V_i=?}^{V_f=20,0\text{ L}} \frac{1}{V}\,dV$

$\Rightarrow \quad 11\,340 \times 4,186 \text{ J} = (10)\left(8,31\frac{\text{J}}{\text{mol.K}}\right)(273 \text{ K}).\ln\left(\frac{20,0 \text{ L}}{V_i}\right)$

$\therefore \quad V_{\text{inicial (10 moles)}} = 2,47 \text{ L}$

48. Durante una expansión controlada, la presión de un gas es

$P = 12e^{-bV} \text{ atm}; \quad b = \frac{1}{12 \text{ m}^3}$

donde el volumen está en m^3 (Fig. P20.48). Determine el trabajo efectuado cuando el gas se expande de 12 m^3 a 36 m^3.

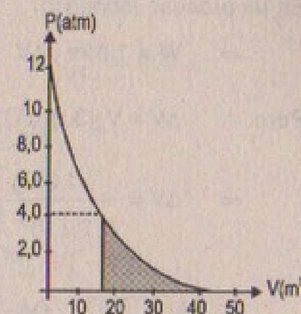


Figura P20.48

Resolución:

Datos: $P = 12e^{-b.V}$ atm ; $\quad b = \frac{1}{12 \text{ m}^3}$

por hallar: W en 12 $m^3 \rightarrow$ 36 m^3

Sabemos que: $W = \int P dV$

$\Rightarrow \quad W = \int_{12}^{36} 12e^{-bV}.dV = -\frac{12}{b}\,e^{-bV}\Big|_{12}^{36}$

$\Rightarrow \quad W = -\frac{12}{\frac{1}{12}} \times e^{-\frac{1}{12}V}\Big|_{12}^{36} = 144\,(e^{-1} - e^{-3})$

$\therefore \quad W = 45,8 \text{ atm} \times \text{m}^3 \times \frac{1,013 \times 10^5}{1 \text{ atm}}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 4\,640 \text{ kJ}$

49. Un bloque de 1,0 kg de aluminio se calienta a presión atmosférica de manera tal que su temperatura aumenta de 22°C a 40°C. Encuentre a) el trabajo realizado por el aluminio, b) la energía térmica que se le entrega, y c) el cambio en su energía interna.

Resolución:

Datos: $m_{Al} = 1,0$ kg $\qquad \rho_{Al} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$P = cte = 1\ atm \equiv 1{,}013 \times 10^5\ N/m^2$

$T_{inicial} = 22°C$; $T_{final} = 40°C$

$\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

En un proceso isobárico: $W = P\Delta V$

$\Rightarrow \quad W = 1\ atm\ .\ \Delta V$

Pero: $\Delta V = V_o(3\alpha)(\Delta T) = \dfrac{m_{Al}}{\rho_{Al}} \times (3\alpha)(\Delta T)$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{1{,}0\ kg}{2{,}7 \times 10^3\ \dfrac{kg}{m^3}} \times 3\ (24 \times 10^{-6}\ °C^{-1})(40 - 22)$$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{72 \times 18}{2{,}7} \times 10^{-9}\ m^3$$

Luego: $W = P\Delta V = 1{,}013 \times 10^5\ \dfrac{N}{m^2} \times \left[\dfrac{72 \times 18}{2{,}7} \times 10^{-9}\ m^3\right]$

$\therefore \quad W = 48{,}6 \times 10^{-3}\ J \equiv 48{,}6\ mJ$

Parte (b)

Sabemos que: $Q = m_{Al}\ C_e\ \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q = (1{,}0\ kg)(900\ J/kg.°C)(40 - 22)°C$

$\therefore \quad Q = 16{,}2\ kJ$

Parte (c)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$\Rightarrow \quad \Delta U = 16{,}2\ kJ - 48{,}6\ mJ \qquad \therefore \quad \Delta U \approx 16{,}2\ kJ$

50. En la figura P20.50, el cambio de la energía interna de un gas que pasa de A a C es +800 J. El trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria *ABC* es +500 J. a) ¿Cuánta energía debe entregarse al sistema cuando va de A a C pasando por B? b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, ¿cuál es el trabajo que hace el sistema al ir de C a D? c) ¿Cuál es la energía que se intercambia con los alrededores cuando el ciclo va de *C* a *A*? d) Si el cambio en la energía interna al ir del punto *D* al punto A es +500 J, ¿cuánta energía térmica debe entregarse al sistema cuando va del punto *C* al punto *D*?

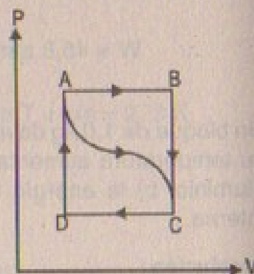


Figura P20.50

Resolución :

Datos: $\Delta U_{(a \to c)} = +800\ J$; $W_{ABC} = +500\ J$

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$\Rightarrow \quad \Delta U_{AC} = Q_{AC} - W_{AC} = 800\ J$

$\Rightarrow \quad \Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} \qquad \therefore \quad \Delta U_{ABC} = +\ 800\ J$

Parte (b)

Si $\quad P_A = 5P_C \quad \Rightarrow \quad P_B = 5P_D = 5\ P_C = P_A$

Por otro lado: $W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = W_{AB} + 0$

Entonces a $\quad P = cte \quad W = P\Delta V$

Pero: $W_{ABC} = +\ 500\ J = P_A\ (V_B - V_A) = P_B\ (V_B - V_A)$

Nos piden: $W_{C \to D} = P_C\ (V_D - V_C) = P_D\ (V_D - V_C) \quad$ (a $P = cte$)

Como: $V_A = V_D$ y $V_B = V_C$ (según el gráfico)

Entonces: $W_{C \to D} = \dfrac{P_B}{5}\ (V_A - V_B) = -\dfrac{P_B}{5}\ (V_B - V_A)$

$\therefore \quad W_{C \to D} = -\dfrac{1}{5}\ (500\ J) = -100\ J$

Parte (c)

Sabemos que: $\Delta U_{(A \to C)} = +800\ J \qquad \therefore \quad \Delta U_{(C \to A)} = -800\ J$

Parte (d)

Datos: $\Delta U_{(D \to A)} = +500\ J$; $\Delta U_{ABC} = +800\ J$; $W_{ABC} = +500\ J$

Como: $\Delta U_{(ABCDA)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{ABC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = 0$

$\Rightarrow \quad +\ 800\ J + \Delta U_{CD} + 500\ J = 0 \qquad \therefore \quad \Delta U_{C \to D} = -1\ 300\ J$

Además: $W_{AC} = -W_{CA} \quad \Rightarrow \quad -500\ J = W_{C \to A}$

Pero: $W_{C \to A} = W_{C \to D} + W_{D \to A} \qquad \therefore \quad W_{C \to D} = -\ 500\ J$

Luego por la primera ley: $\Delta U_{C \to D} = Q_{C \to D} - W_{C \to D}$

$\Rightarrow \quad -1\ 300\ J = Q_{C \to D} - (-500\ J)$

$\therefore \quad Q_{C \to D} = -1\ 800\ J$

51. Helio con un volumen inicial de 1,00 litro y una presión inicial de 10,0 atm se expande hasta un volumen final de 1,00 m³. La relación entre la presión y el volumen durante la expansión es PV = constante. Determine a) el valor de la constante, b) la presión final, y c) el trabajo hecho por el helio durante la expansión.

Resolución :

Datos: Gas helio

$V_{inicial} = 1{,}00$ litro ; $\quad V_{final} = 1{,}00\ m^3$

$P_{inicial} = 10{,}0$ atm $\qquad P_{final} = ?$

$R = 0{,}082\ \dfrac{\text{atm.L}}{\text{mol.K}}$

Parte (a)
Sabemos que: PV = cte

$\Rightarrow \quad P_{inicial} \cdot V_{inicial} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad (10{,}0 \text{ atm})(1{,}00 \text{ litro}) = k = \text{cte}$

$\therefore \quad k = 10{,}0$ atm.L

Parte (b)
Sabemos que: $P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (10{,}0 \text{ atm})(1{,}00 \text{ litro}) = 1{,}00 \text{ m}^3 \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (10 \text{ atm})\left(10^3\text{mL} \times \dfrac{10^{-3}\text{m}^3}{1\,000^2\text{mL}}\right) = 1{,}00 \text{ m}^3 \cdot V_{final}$

$\therefore \quad P_{final} = 10^{-2} \text{ atm} = 0{,}01 \text{ atm}$

parte (c)
Sabemos que: T = cte

$\Rightarrow \quad W = nRT\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right) = k \cdot \ln\left(\dfrac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm} \cdot \text{L} \times \ln\left(\dfrac{1{,}00 \text{ m}^3}{10^{-3}\text{m}^3}\right)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm.L} \times \ln(1\,000)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm} \cdot \dfrac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}} \text{ N/m}^2 \times \dfrac{1 \text{ L}}{1 \text{ L}} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times (6{,}90)$

$\therefore \quad W = 7{,}00$ kJ

TRANSFERENCIA DE CALOR

52. El cristal de una ventana tiene un área de 3,0 m² y un espesor de 0,60 cm. Si la diferencia de temperatura entre sus caras es de 25°C, ¿cuánto calor fluye a través de la ventana por hora?

Resolución :
Datos: $\quad$ Área = 3,0 m²

Espesor = Δx = 0,60 cm ; $\quad K_{vidrio} = 0{,}8\ \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

ΔT = 25°C ; $\quad Q = ?$

Sabemos que: $\quad \dfrac{Q}{\Delta t} = -\dfrac{kA\,\Delta T}{\Delta x}$

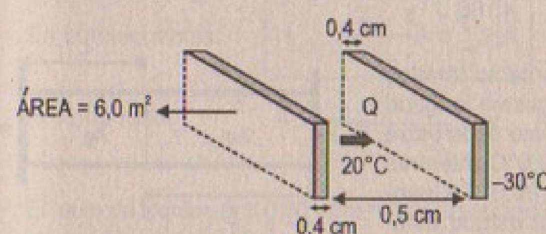
$\Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = -kA\dfrac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = -(0{,}8)(3{,}0)\dfrac{(25)}{(0{,}6)\times10^{-2}}$

Luego: $\quad \displaystyle\int_0^{3\,600\text{s}} dQ = \int_0^{3600\text{s}\Leftrightarrow1\text{ hora}} -\frac{(0{,}8)(3{,}0)(25)\times10^2}{0{,}6}\,dt$

$\therefore \quad$ Q(1 hora) = 36 MJ, (–) fluye hacia fuera

53. Una ventana de cristal térmico de 6,0 m² de área está construido con dos hojas de vidrio, cada una de 4,0 mm de espesor separadas por un espacio de aire de 5,0 mm. Si el interior está a 20°C y el exterior a –30°C, ¿cuál es la pérdida de calor a través de la ventana?

Resolución :



$k_{vidrio} = 0{,}8\ \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

$k_{aire} = 0{,}0234\ \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

Sabemos que: $\quad \overset{\circ}{Q} = k_{aire}\, A\, \dfrac{dT}{dx}$

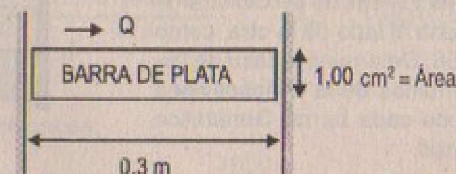
Entonces: $\quad \overset{\circ}{Q} = 0{,}0234\ \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}} \times (6{,}0 \text{ m}^2) \times \dfrac{(30+20)\text{°C}}{5\times10^{-2}\text{m}}$

$\Rightarrow \quad \overset{\circ}{Q} = \dfrac{(0{,}0234)(6{,}0)(50)}{5\times10^{-2}}$ W

En consecuencia: $\quad \dfrac{dQ}{dt} = \overset{\circ}{Q} = 1\,404 \text{ W} \equiv 1{,}4 \text{ kW}$

54. Una barra de plata de 30,0 cm de longitud y 1,00 cm² de área de sección transversal es utilizada para transferir calor de un depósito a 100,0°C a uno a 0,0°C. ¿Cuánto calor se transfiere por segundo?

Resolución :



Sabemos que: $H = -kA\dfrac{(T_f - T_i)}{L}$

$$\Rightarrow \quad H = -k_{plata} \times A \times \frac{(T_f - T_i)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad H = -427\ \frac{W}{m.°C} \times 1{,}00\ cm^2 \times \frac{1\ m^2}{10^4 cm^2} \times \left(\frac{0°C - 100°C}{0{,}3\ m}\right)$$

$$\therefore \quad H = 14{,}2\ J/s$$

En consecuencia:

Se transferirá $14{,}2\ J \equiv 14{,}2\ J \times \dfrac{1\ cal}{4{,}186\ J} = 3{,}4$ cal en cada segundo

55. Una barra de oro está en contacto térmico con una barra de plata de la misma longitud y área (Fig. P20.55). Un extremo de la barra compuesta se mantiene a 80,0°C mientras que el extremo opuesto está a 30,0°C. Cuando el flujo de calor alcanza el estado estable, encuentre la temperatura en la unión.

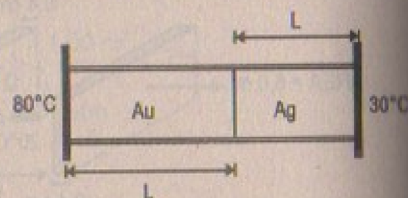


Figura P20.55

Resolución :

Datos: $k_{oro} = 314\ \dfrac{W}{m.°C}$; $k_{plata} = 427\ \dfrac{W}{m.°C}$

Cuando se alcanza el estado estable la gradiente de la temperatura es constante a lo largo de la barra, como:

$$H_{Au} = -k_{Au}\, A\, \frac{(T_o - 80)}{L} \quad y \quad H_{Ag} = -k_{Ag}\, A\, \frac{(30 - T_o)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad -k_{Au}.A\,\frac{(T_o - 80)}{L} = -k_{Ag}\,.\,A\,\frac{(30 - T_o)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad 314\ \frac{W}{m.°C}\,(T_o - 80)°C = 427\ \frac{W}{m.°C}\,(30 - T_o)°C$$

$$\therefore \quad T_o = 51{,}0°C$$

56. Dos barras de la misma longitud pero de diferentes materiales y áreas de sección transversal se ponen una al lado de la otra, como en la figura P20.56. Determine la tasa de flujo de calor en términos de la conductividad térmica, el área de cada barra. Generalice esto a varias barras.

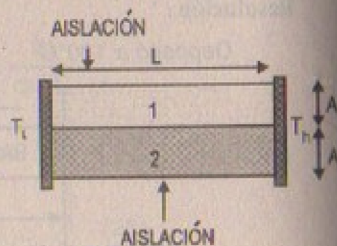


Figura P20.56

Resolución :

Sea: $T_L > T_h$

Además sabemos que: $H = -k.A\dfrac{\Delta T}{L}$

Entonces: $H_1 = -k_1A_1\,\dfrac{(T_h - T_L)}{L} \quad \wedge \quad H_2 = -k_2A_2\,\dfrac{(T_h - T_L)}{L}$

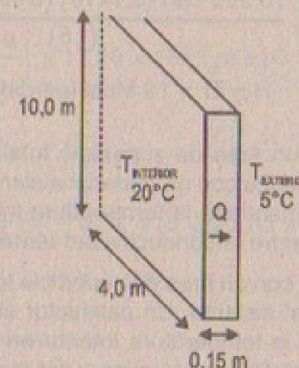
Luego: $H_n = -k_nA_n\,\dfrac{(T_h - T_L)}{L}$

En consecuencia: $\boxed{H_{total} = \dfrac{T_L - T_h}{L} \times \sum_{i=1}^{n} k_iA_i}$ caso general

Por otro lado: $A_1 = \dfrac{H_1 \times L}{k_1\,(T_L - T_h)}$ y $A_2 = \dfrac{H_2 \times L}{k_2\,(T_L - T_h)}$

57. El muro de ladrillos ($k = 0{,}80$ W/m.°C) de un edificio tiene dimensiones de 4,0 m × 10,0 m y su espesor es de 15 cm. ¿Cuánto calor (en joules) fluye a través del muro en un período de 12 h cuando las temperaturas promedio interior y exterior son, respectivamente, 20°C y 5°C?

Resolución :



$Q_{(12\ horas)} = ?$

$k = 0{,}80\ \dfrac{W}{m°C}$

Sabemos que: $\dfrac{dQ}{dt} = -kA\dfrac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -\left(0{,}80\ \frac{W}{m°C}\right)(4{,}0 \times 10{,}0)m^2 \times \left(\frac{5 - 20}{0{,}15}\right)\frac{°C}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{(0{,}80)(40)(15)}{0{,}15} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dQ = \int_0^t \frac{(0{,}80)(40)(15)}{0{,}15}\,dt$$

$$\therefore \quad Q(t) = 3\,200t \text{ joules}$$

Para t = 12 horas entonces:

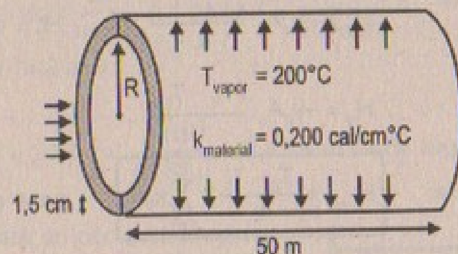
$$Q_{(12\ horas)} = 3\,200 \times 12\ h \times \frac{3\,600\ s}{1\ h} = 138\ MJ$$

58. Un tubo de vapor se cubre con un material aislante de 1,5 cm de espesor y 0,200 cal/cm.°C.s de conductividad térmica. ¿Cuánto calor se pierde cada segundo cuando el vapor está a 200°C y el aire circundante se encuentre a 20°C? El tubo tiene una circunferencia de 20 cm y una longitud de 50 m. Ignore las pérdidas a través de los extremos del tubo.

Resolución :

Radio = 20 cm

$T_{aire} = 20°C$



Sabemos que: $H = kA\dfrac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \quad H = 0{,}200\ \frac{cal}{cm.°C} \times (50\ m)(2\pi \times 20\ cm) \times \left[\frac{200°C - 20°C}{1{,}5\ cm}\right]$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{(0{,}200\ cal)\,(3{,}1416)\,(5000)(180)(40)}{(1{,}5)}$$

$$\therefore \quad H = \overset{\circ}{Q} = 15\ \text{Mcal (pérdida de calor} \times \text{segundo)}$$

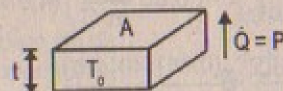
59. Una caja con un área de superficie total de 1,20 m² y una pared de 4,00 cm de espesor está hecha con un material aislante. Un calefactor eléctrico de 10,0 W dentro de la caja mantiene la temperatura interior en 15,0°C arriba de la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica *k* del material aislante.

59A. Una caja con un área de superficie total *A* y una pared de espesor *t* está hecha con un material aislante. Un calefactor eléctrico que entrega *P* watts dentro de la caja mantiene la temperatura interior en T_0 arriba de la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica *k* del material aislante.

Resolución :

k = ?

Sabemos que:



$$\frac{dQ}{dt} = -kA\,\frac{(T_E - T_O)}{t}$$

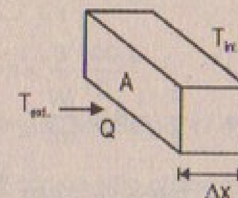
Pero: $\dfrac{dQ}{dt} = P \quad \Rightarrow \quad P = kA\,\dfrac{(\Delta T)}{t}$

$$\therefore \quad k = \frac{P \times t}{A(\Delta T)}$$

60. Una caja de estireno tiene un área de superficie de 0,80 m² y un espesor de pared de 2,0 cm. La temperatura interior es de 5°C y la exterior de 25°C. Si son necesarias 8,0 h para que 5,0 kg de hielo se fundan en el recipiente, determine la conductividad térmica del estireno.

Resolución :

Datos: $A = 0{,}80\ m^2$
$\Delta x = 2{,}0\ cm$
$T_{int} = 5°C$
$T_{ext} = 20°C$



$L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5\ \dfrac{J}{kg}$

Sabemos que: $\dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{kA}{dx}\,.\,dT$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{-k(0{,}80\ m^2)}{2 \times 10^{-2} m}\int_{20}^{5} dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{(15)(0{,}80)(100).k}{2}$$

$$\therefore \quad Q(t) = 600kt$$

Luego para t = 8 h

$$Q_{total} = k(600) \times 8\ h \times \left(\frac{3600\ s}{1\ h}\right) = 17{,}28 \times 10^6\ k\ m.s.°C$$

Por otro lado:

$$Q_{requerido\ para\ fundir\ (hielo\ a\ 5°C)} = Q_{fusión} + Q_{ganado}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{requerido} = 5\ kg \times 4\ 186\ \frac{J}{kg.°C}\ (5° - 0)°C + (5\ kg)(3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg})$$

$$\therefore \quad Q_{requerido\ (fundir)} = 17{,}7 \times 10^5\ J$$

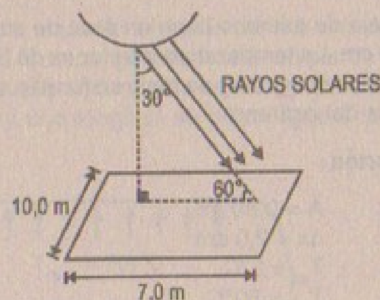
Como: $Q_{total\ transferido} = Q_{requerido\ (fundir)}$

$$\Rightarrow \quad 17{,}28 \times 10^6\ .\ k\ m.s°C = 17{,}7 \times 10^5\ J$$

$$\therefore \quad k_{conductividad} = 0{,}1\ \frac{W}{m.°C}$$

61. El techo de una casa construido para absorber la radiación solar incidente sobre él tiene un área de 7,0 m × 10,0 m. La radiación solar en la superficie terrestre es de 840 W/m². En promedio, los rayos solares forman un ángulo de 60° con el plano del techo. a) Si 15% de la energía incidente se convierte en potencia eléctrica útil, ¿cuántos kilowatts-hora por día de energía útil brinda esta fuente? Suponga que el Sol brilla durante un promedio de 8,0 h/día. b) Si el usuario residencial promedio paga 6 centavos de dólar por kWh, ¿cuál es el ahorro económico con esta fuente energética por día?

Resolución :



Datos:

$P = 840 \ \dfrac{W}{m^2}$

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{P}{A} = 840 \ \dfrac{W}{m^2}$

$\Rightarrow$ Potencia $= 840 \ \dfrac{W}{m^2} \times 70 \ m^2 = 58\ 800 \ W$

Pero: $P_{promedio} = P \times \cos 30 = 58\ 800 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ W$

Como: $15\% \ P_{promedio}$ = Potencia eléctrica útil

$\Rightarrow$ Potencia eléctrica útil $= (0{,}15)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(58\ 800) \ W$

En consecuencia: si el Sol brilla en promedio: 8 h/día

Entonces:

Esta fuente brindará: $(0{,}15)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(58\ 800)(8) \ \dfrac{W-h}{día} = 61{,}1 \ kW\text{-}h/día$

Parte (b)

Si el usuario paga: 6 centavos de dólar ——— kW-h

x ——— 61,1 kW-h

$\therefore$ x = 366,6 centavos de dólar

En consecuencia:

El ahorro económico de esta fuente por cada día es de 366,6 centavos de dólar o equivalente a $ 3,67

62. La superficie del Sol tiene una temperatura de aproximadamente 5 800 K. Si se toma el radio del Sol como $6{,}96 \times 10^8$ m, calcule la energía total radiada por el Sol diariamente. (Suponga $e = 1$).

Resolución :

$T_{Sol} = 5\ 800 \ K$

Radio del sol $= 6{,}96 \times 10^8$ m

$e = 1$

Sabemos que el área de la superficie es: $4\pi R^2$

entonces: $A = 4(3{,}1416)(6{,}96 \times 10^8) = 8{,}75 \times 10^9 \ m^2$

además: $\sigma = 5{,}6696 \times 10^8 \ \dfrac{W}{m^2 . K^4}$

Luego por la ley de Stefan: $P = \sigma A . e \, T^4$

$\Rightarrow \quad P = (5{,}6696 \times 10^8)(1)(8{,}75 \times 10^9)(5{,}8 \times 10^3)^4$

$\therefore \quad P = 5{,}61 \times 10^{33}$ J/s

En consecuencia:

Si: $5{,}61 \times 10^{33}$ J ——— 1 s

x ——— $24 \ h \times \dfrac{3\ 600 \ s}{1 \ h}$

$\therefore$ $x = 4{,}85 \times 10^{38}$ J en un día (energía radiada por el sol)

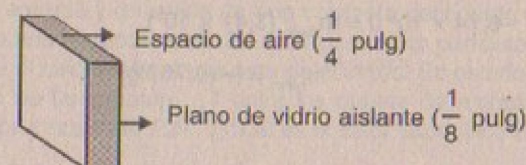
63. Calcule el valor R de a) una ventana hecha con un solo cristal de 1/8 pulg de espesor, y b) una ventana de cristal térmico formada con dos cristales individuales, cada uno de 1/8 pulg de espesor y separados por un espacio de aire de 1/4 pulg. c) ¿En qué factor se reduce la pérdida de calor si se utiliza la ventana térmica en lugar de la ventana de un solo cristal?

Resolución :

Parte (a)

$R_{ventana\ de\ cristal} = R_{vidrio\ plano}$ ($\frac{1}{8}$ pulgadas de espesor) = 0,89 pie^2 × °F.h/BTU

Parte (b)



Entonces: $R_{total} = R_{plano\ vidrio}\left(\dfrac{1}{8}\ pulg\right) + R_{espacio\ de\ aire}\left(\dfrac{1}{4}\ pulg\right)$

$\therefore \quad R_{total} = 2(0{,}89) + 0{,}17 = 1{,}85$ pie^2 × °F/BTU

PROBLEMAS ADICIONALES

64. Un recipiente para cocinar sobre un quemador con su flama baja contiene 10,0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0°C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios tiempos y el resultado se grafica en la figura P20.64. Durante los primeros 50 min la mezcla permanece en 0°C. Entre el minuto 50 y 60, la temperatura aumenta a 2,0°C. Ignore la capacidad calorífica del recipiente y determine la masa inicial del hielo.

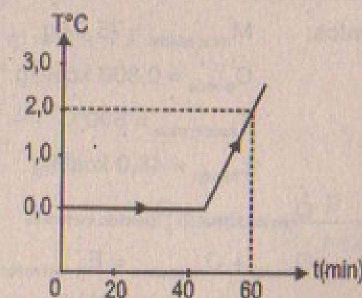


Figura P20.64

Resolución :

Datos: $m_{agua} = 10\ kg$; $C_{e\ H_2O} = 4\ 186\ J/kg.°C$

$C_{e\ hielo} = 2\ 090\ J/kg.°C$; $m_{hielo} = ?$

$L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5\ J/kg$; $Q_{solidif} = -m_{agua} . L$

$$\Rightarrow \quad Q_{solidif} = -10\ kg\ (3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}) = -3{,}33 \times 10^6\ J$$

Por otro lado: $Q_{necesario\ de\ transf.} = Q_{fusión} + m_{H_2O} . C_e . \Delta T$

$$\Rightarrow \quad (m_{hielo} + 10\ kg)(3{,}33 \times 10^5) + (10 + m_{hielo})(4\ 186)(2)$$

Pero: $Q_{solidif} = Q_{fusión}$

$$\Rightarrow \quad -3{,}33 \times 10^6\ J = (10 + m_{hielo})\ [3{,}33 \times 10^5 + 8\ 372]$$

$$\Rightarrow \quad -3{,}33 \times 10^6\ J = 3{,}33 \times 10^6\ J + 83\ 720\ J + m_{hielo}\ (3{,}33 \times 10^5 + 8\ 372)$$

$$\Rightarrow \quad -6{,}74 \times 10^6\ J = m_{hielo}\ (3{,}41 \times 10^5)$$

$$\therefore \quad m_{hielo} = |-19{,}76\ kg|$$

65. Alrededor de un cráter formado por un meteorito de hierro se fundieron 75,0 kg de roca debido al impacto. La roca tiene un calor específico de 0,800 kcal/kg.°C, un punto de fusión de 500°C y un calor latente de fusión de 48,0 kcal/kg. La temperatura original del suelo era de 0,0°C. Si el meteorito golpea el suelo mientras se mueve a 600 m/s, ¿cuál es la masa mínima del meteorito? Suponga que se libera calor hacia la roca no fundida de los alrededores o a la atmósfera durante el impacto. Ignore la capacidad calorífica del meteorito.

Resolución :

Datos: $M_{roca\ sólida} = 75{,}0\ kg$

$C_{e\ roca} = 0{,}800\ kcal/kg.°C$; $v_{meteorito} = 600\ m/s$

$T_{fusión\ roca} = 500°C$; $M_{meteorito} = ?$

$L_{fusión} = 48{,}0\ kcal/kg$; $T_{suelo} = 0{,}0°C$

$$Q_{ganado\ roca} = Q_{perdido\ meteorito}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{transf} + Q_{necesario} = E_{K\ meteorito}\ \text{(en forma de calor)}$$

$$\Rightarrow \quad (75\ kg)(48 \times 10^3\ \frac{cal}{kg}) + (75\ kg)(0{,}8 \times 10^3\ \frac{cal}{kg.°C})(500°C) = \frac{1}{2}(M_{met})(600)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}36 \times 10^7\ cal + 3 \times 10^7\ cal = \frac{1}{2}\ M_{meteorito} \times 36 \times 10^4\ J\left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)$$

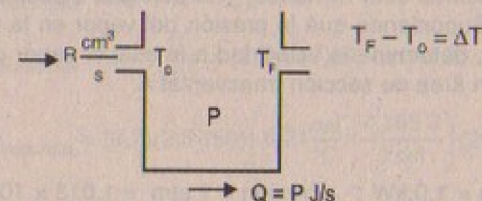
$$\Rightarrow \quad \frac{(3{,}36\times10^7)(2)(4{,}186)}{36\times10^4} = M_{meteorito}$$

$$\therefore \quad M_{meteorito} = 781\ kg$$

66. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se utiliza para medir el calor específico de un líquido. La técnica consiste en medir la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y de salida de una corriente del líquido que fluye mientras se agrega calor a una tasa conocida. En un experimento particular, un líquido de 0,78 g/cm³ de densidad fluye por el calorímetro a una tasa de 4,0 cm³/s. En estado estable se establece una diferencia de temperatura de 4,8°C entre los puntos de entrada y salida cuando se suministra calor a razón de 30 J/s. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

66.A Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se utiliza para medir el calor específico de un líquido. La técnica consiste en medir la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y de salida de una corriente del líquido que fluye mientras se agrega calor a una tasa conocida. En un experimento particular, un líquido de densidad ρ fluye por el calorímetro a una tasa de *R* cm³/s. En estado estable, se establece una diferencia de temperatura Δ*T* entre los puntos de entrada y salida cuando se suministra calor a razón de *P* J/s. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

Resolución :



Sabemos que: $\frac{Volumen}{t} = R = \frac{m}{P \times t} \Rightarrow m = R \times P \times t$

Además: $\frac{Q}{t} = P \Rightarrow Q = P \times t\ J/s$

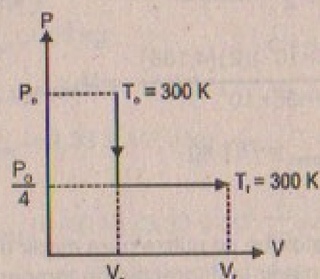
Luego: $Q = mC_e\Delta T$

$$\Rightarrow \quad Pt = R \times t \times \rho \times C_e \times \Delta T \qquad \therefore \quad C_e\ \text{líquido} = \frac{P}{R\times \rho\times \Delta T}$$

67. Un mol de un gas ideal inicialmente a 300 K se enfría a volumen constante de modo que la presión final es un cuarto de la presión inicial. Después el gas se expande a

presión constante hasta que alcanza la temperatura inicial. Determine el trabajo realizado por el gas.

Resolución:



n = 1 mol
R = 8,31 J/mol.K

Por la ley de los gases: $P_o V_o = nRT_o \Rightarrow V_o = \frac{nRT_o}{P_o}$

Además: $\frac{P_o}{4} \cdot V_f = nRT_f \Rightarrow V_f = \frac{4nRT_f}{P_o} = \frac{4nRT_o}{P_o}$

Luego: $W_{(P=CTE)} = P\Delta V = \frac{P_o}{4}\left(\frac{4nRT_o}{P_o} - \frac{nRT_o}{P_o}\right)$

$\therefore$ $W = 0,75\ nRT_o = (0,75)(1)(8,31)(300) = 1,87$ kJ

68. Una tetera eléctrica está hirviendo, y la potencia eléctrica consumida por el agua en ella es 1,0 kW. Suponiendo que la presión del vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la velocidad a la cual el vapor de agua sale por el pico, el cual tiene un área de sección transversal de 2,0 cm².

68.A Una tetera eléctrica está hirviendo, y la potencia eléctrica consumida por el agua en ella es P. Suponiendo que la presión del vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la velocidad a la cual el vapor de agua sale por el pico, el cual tiene un área de sección transversal A.

Resolución:

Datos: Potencia = 1,0 kW ; Presión = 1 atm = $1,013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$

T = 100°C = 373 K ; n = 1 mol

R = 8,31 J/mol.K

Sabemos que: $P = \frac{F}{A}$

$\Rightarrow$ PA = F

$\Rightarrow$ PA x velocidad = F x v = Potencia

$\Rightarrow$ $(1,013 \times 10^5)\frac{N}{m^2} \times 2 \times 10^{-4}\ m^2 = 1,0 \times 10^3 \frac{m}{s}$

$\therefore$ Velocidad del vapor = 49,36 m/s

69. Una barra de aluminio de 0,50 m de largo y un área de sección transversal de 2,5 cm² se introduce en un recipiente aislado térmicamente que contiene helio líquido a 4,2 K. La barra está inicialmente a 300 K. a) Si una mitad de la barra se introduce en el helio, ¿cuántos litros de helio hervirán durante el tiempo en que la mitad introducida se enfríe a 4,2 K? (Suponga que la mitad superior no se enfría.) b) Si la parte superior de la barra se mantiene a 300 K, ¿cuál es la tasa de ebullición aproximada del helio líquido después de que la mitad inferior ha llegado a 4,2 K? (Observe que el aluminio tiene una conductividad térmica de 31 J/s.cm.K a 4,2 K, un calor específico de 0,21 cal/g.°C y una densidad de 2,7 g/cm³. Consulte el ejemplo 20.5 para los datos del helio).

Resolución:

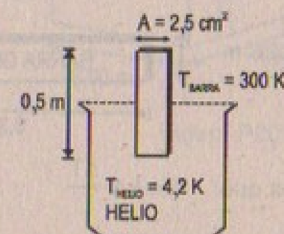
Datos: $k_{Al} = 31$ J/s.cm.K

$T_{Al} = 4,2$ K

$C_{e\ Al} = 0,21$ cal/g°C

$\rho_{Al} = 2,7$ g/cm³

$L_{vaporiz.(helio)} = 2,09 \times 10^4$ J/kg



Considerar: $\rho_{helio\ hervido\ (vapor)} = 1,25 \times 10^2$ kg/m³

Parte (a)

Sabemos que:

$Q_{transferido\ total\ del\ aluminio\ al\ helio} = M_{Al} \cdot C_{e\ Al}\ \Delta T$

$\Rightarrow$ $Q_{transf.total} = \rho_{Al} \cdot V_{Al} \times C_{e\ Al} \times \Delta T$

$\Rightarrow$ $Q_{transf.total} = 2,7 \frac{g}{cm^3} \times (2,5\ cm^2)(50\ cm)(0,21 \frac{cal}{g.°C})(300\ K - 4,2\ K)$

$\Rightarrow$ $Q_{trans.total} = (2,7)(2,5)(50)\left(0,21\frac{cal}{°C} \times \frac{4,186\ J}{1\ cal}\right)(295,8°C)$

$\therefore$ $Q_{trans.total} = 8,775 \times 10^4$ J

En consecuencia: $Q_{trans.total\ de\ la\ mitad} = 4,39 \times 10^4$ J

Como: $Q_{transf.total\ de\ la\ mitad\ del\ aluminio} = Q_{vaporización\ helio}$

$\Rightarrow$ $4,39 \times 10^4\ J = M_{helio} \times L_{vaporización\ del\ helio}$

$\Rightarrow$ $4,39 \times 10^4\ J = \rho_{helio} \cdot$ Volumen $\times 2,09 \times 10^4 \frac{J}{kg}$

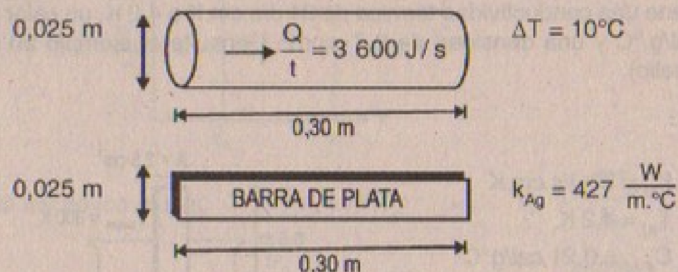
$\therefore$ $M_{helio} = 2,1$ kg

Pero volumen del helio = M_{helio} / ρ_{helio}

$\Rightarrow$ Volumen del helio que hervirán = 2,1 kg / (1,25 × 10^{+2} kg/m³) = 16,8 L

70. Un tubo térmico de 0,025 m de diámetro y 0,30 m de longitud puede transferir 3 600 J de calor por segundo con una diferencia de temperatura entre los extremos de 10°C. ¿Cómo se compara este rendimiento con la transferencia de calor de una barra de plata sólida de las mismas dimensiones si la conductividad térmica de la plata es $k = 427$ W/m.°C? (La plata es el mejor conductor térmico de todos los metales).

Resolución :



Sabemos que: $H = kA\dfrac{\Delta T}{L}$

$$\Rightarrow \quad H_{plata} = 427\ \frac{J}{m.s.°C} \times \pi\left[\frac{0,025}{2}\right]^2 \times \left(\frac{10°C}{0,30}\right)$$

$$\therefore \quad H_{plata} = 6,986\ J/s$$

Mientras el tubo térmico transfiere 3 600 J/s con un rendimiento del 100%.
El H_{Ag} que es 6,986 J/s representa el 0,194% con respecto del tubo.

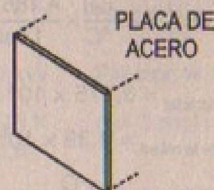
71. Una bala de plomo de 5,00 g que se mueve a 300 m/s choca con una placa de acero plana y se detiene. Si la colisión es inelástica, ¿se fundirá la bala? El plomo tiene un punto de fusión de 327°C, un calor específico de 0,128 J/g.°C y un calor latente de fusión de 24,5 J/g.

Resolución :

Bala de plomo

→ v = 300 m/s

$m_{bala} = 5,00$ g



Datos: $T_{fusión\ plomo} = 327°C$; $C_{e\ plomo} = 0,128$ J/g°C

$L_{plomo(fusión)} = 24,5$ J/g

Sabemos que: $E_{K\ bala\ plomo} = \dfrac{1}{2}(5\times10^{-3})(300)^2$

$$\therefore \quad E_{K(bala\ de\ plomo)} = 225\ J$$

Por otro lado: $Q_{trans\ (fusión)} = m \times L = 5 \times (24,5) = 122,5$ J

Entonces:
Concluimos que al colisionar la bala con la placa, se funde parcialmente hasta que la velocidad del sistema llegue a un límite en que su energía cinética sea menor que el calor de transformación (fusión).

72. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y del techo de la casa de la figura P20.72 es 0,48 W/m.°C, y su espesor promedio es de 21,0 cm. La casa se calienta con gas natural, el cual tiene un calor de combustión (calor entregado por metro cúbico de gas quemado) de 9 300 kcal/m³. ¿Cuántos metros cúbicos de gas deben quemarse cada día para mantener una temperatura interior de 25,0°C si la temperatura exterior es 0,0°C? Ignore la radiación y las pérdidas de calor a través del suelo.

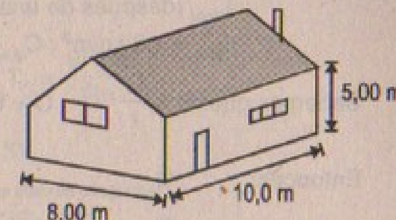


Figura P20.72

Resolución :

Datos: $k = 0,48\ \dfrac{W}{m.°C}$

Espesor promedio = 0,21 m

Sabemos que: $\dfrac{Q}{volumen} = 9\ 300\ \dfrac{kcal}{m^3}$

$$\Rightarrow \quad Q = (8,00\ m)(10,00\ m)(5,00\ m) \times 9\ 300\ \frac{kcal}{m^3}$$

$$\therefore \quad Q = 3,72 \times 10^6\ kcal$$

Por otro lado: $\dfrac{dQ}{dt} = kA\dfrac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = (0,48)\ \frac{AL}{L}\left(\frac{25°C}{0,21}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{1\ día} dQ = \frac{(0,48)(25)}{0,21} \cdot \frac{volumen}{10,0} \int_0^{1\ día} dt$$

$$\Rightarrow \quad Q_{(1\ DÍA)} = 3,72\ k \times 10^6\ cal \times \frac{4,186\ J}{1\ cal} = \frac{0,48}{0,21} \times \frac{25}{10} \times \left[24\ h \times \frac{3\ 600\ s}{1\ h}\right] . vol.$$

$$\therefore \quad \frac{volumen}{día} = 2,72\ k \times 10^6\ m^3/día$$

73. Una clase de 10 estudiantes en examen tiene una salida de potencia por estudiante de casi 200 W. Suponga que la temperatura inicial del cuarto es 20°C y que las dimensiones son 6,0 m por 3,0 m. ¿Cuál es la temperatura del cuarto después de 1,0 h si todo el calor permanece en el aire del salón y no se añade nada más por

medio de una fuente exterior? El calor específico del aire es de 837 J/kg.°C y su densidad aproximada es de $1,3 \times 10^{-3}$ g/cm^3.

Resolución :

Datos: Dimensiones del cuarto: 6,0 cm × 3,0 m × 15,00 m

$T_{\text{inicial cuarto}} = 20°C$

Potencia de cada estudiante = 200 W

T_{final} (después de una hora) = ?

$\rho_{\text{aire}} = 1,3$ kg/m^3 ; $C_{e\ \text{aire}} = 837$ J/kg.°C

Sabemos que: $P = \dfrac{Q}{t} \Rightarrow Q = P \times t = 200\ \dfrac{J}{s} \times t$ (de cada estudiante)

Entonces: $Q_{\text{entregado de cada estud.}} = 200\ \dfrac{J}{s} \times 3\,600\ s = 7,2 \times 10^5$ J (en una hora)

$\therefore\ Q_{\text{entregado (× 10 alumnos)}} = 7,2 \times 10^6$ J

Como: $Q_{\text{ganado por el aire}} = Q_{\text{transferido(× los 10 estudiantes)}}$

$\Rightarrow\ \rho_{\text{aire}} V_{\text{aire}} C_e \Delta T = 7,2 \times 10^6$ J

$\Rightarrow\ 1,3\ \dfrac{kg}{m^3} \times (6 \times 3 \times 15) m^3 \times 837\ \dfrac{J}{kg.°C} \times (T_f - 20°C) = 7,2 \times 10^6$ J

$\therefore\ T_{\text{FINAL}} = 44,5$ °C

74. Un gas ideal inicialmente a P_0, V_0 y T_0 efectúa un ciclo como el que se describe en la figura P20.74. a) Encuentre el trabajo neto hecho por el gas por ciclo. b) ¿Cuál es el calor neto agregado al sistema por ciclo? c) Obtenga un valor numérico para el trabajo neto hecho por ciclo por 1 mol de gas inicialmente a 0°C.

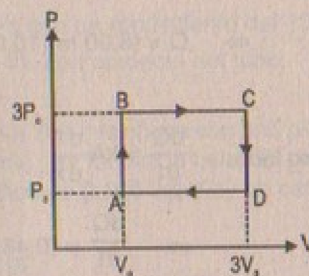


Figura P20.74

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $W_{ABCDA} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

$\Rightarrow\ W_{ABCDA} = \underset{(V=CTE)}{W_{A\to B}} + \underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} + \underset{(V=CTE)}{W_{C\to D}} + \underset{(P=CTE)}{W_{D\to A}}$

$\Rightarrow\ W_{ABCDA} = 0 + P.\Delta V + 0 + P.\Delta V$

$\Rightarrow\ W_{ABCDA} = 3 P_0 (3V_0 - V_0) + P_0 (V_0 - 3V_0)$

$\therefore\ W_{ABCDA} = 4P_0 V_0$

Parte (b)

Por la primera ley $\quad \Delta U = Q - W$

$\Rightarrow\ 0 = Q - W \quad \therefore \quad Q_{\text{neto}} = W = 4 P_o V_o$

Parte (c)

Para n = 1 mol ; $T_A = 0°C = 273$ K

Entonces: $W_{\text{total}} = W_{B\to C} + W_{D\to A}$

Luego por la ley de gases:

$$T_B = \frac{3P_o V_o}{Rn} \quad \wedge \quad T_C = \frac{9P_o V_o}{Rn}$$

Entonces: $\dfrac{T_B R}{3 P_o} = V_o \quad \wedge \quad \dfrac{T_C R}{3P_o} = V_f = 3V_o$

Además: $\dfrac{P_o}{T_A} = \dfrac{3P_o}{T_B} \Rightarrow T_B = \dfrac{3P_o}{P_o} . T_A = 3T_A$

$\dfrac{V_o}{T_B} = \dfrac{3 V_o}{T_C} \Rightarrow T_C = \dfrac{3V_o}{V_o} . T_B = 9T_A$

Por lo tanto:

$$\underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} = 3 P_o \left[\frac{9RT_A}{3P_o} - \frac{3RT_A}{3P_o}\right] = 6RT_A n = 6(1\text{ mol})(8,31\ \frac{J}{mol.K})(237\text{ K})$$

$\therefore\ \underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} = 13,61$ kJ

Por otro lado: $\underset{(P=CTE)}{W_{D\to A}} = P_o (V_o - 3V_o) = -2P_o V_o = -2nRT_A$

$\Rightarrow\ W_{D\to A} = -2(1)(8,31)(273) = -4,54$ kJ

En consecuencia: $W_{\text{total}} = W_{ABCDA} = W_{B\to C} + W_{D\to A} = 13,61$ kJ $- 4,54$ kJ

$\therefore\ W_{\text{total}} = 9,07$ kJ

75. Un submarino de investigación para un pasajero tiene un casco esférico de hierro de 1,50 m de radio exterior y 2,00 cm de espesor, forrado con hule de igual espesor. Si el submarino navega por aguas del Ártico (temperatura de 0°C) y la tasa total de calor liberado dentro de la pequeña nave (incluyendo el calor metabólico del ocupante) es de 1500 W, encuentre la temperatura de equilibrio del interior.

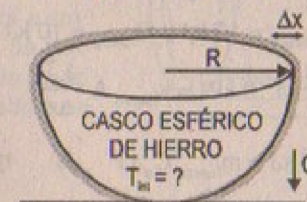
Resolución :

Datos:

$\Delta x = 2 \times 10^{-2}$ m

R = 1,5 m

$\dfrac{Q_{\text{total}}}{t} = 1\,500$ W



$T_{\text{exterior}} = 0°C$

Sabemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = -k.A.\frac{dT}{dr} = \dot{W}; \qquad k = 196{,}95\ 158\ 10^{-3}\ \frac{W}{m.°C}$$

$$\Rightarrow \quad W = -k.(4\pi r^2).\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{1,5}^{1,48} \frac{1}{r^2}.dr = \int_0^{T_e} -\frac{4\pi.k}{\dot{W}}.dT \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{r}\Big|_{1,5}^{1,48} = -\frac{4\pi.k}{\dot{W}}.T_{equilibrio}$$

$$\Rightarrow \quad T_{equilibrio} = \frac{(1{,}5-1{,}48)}{(1{,}5)(1{,}48)} \times \frac{1\ 500}{(4\pi)(k)} = \frac{(0{,}02)(1\ 500)}{(1{,}5)(1{,}48)(196{,}95\times10^{-3})}$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 5{,}46°C$$

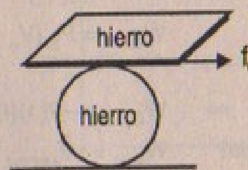
76. Una placa de hierro está sostenida contra una rueda de hierro de modo que una fuerza de fricción de deslizamiento de 50,0 N actúa entre las dos piezas metálicas. La velocidad relativa a la cual las dos superficies se deslizan una sobre la otra es de 40,0 m/s. a) Calcule la tasa a la cual la energía mecánica se convierte en energía térmica. b) La placa y la rueda tienen ambas una masa de 5,00 kg y cada una recibe 50% de la energía térmica. Si durante 10,0 s el sistema opera como se describió y se deja que cada objeto alcance una temperatura interna uniforme, ¿cuál es el aumento de temperatura que se produce?

Resolución:

Datos: $k_{hierro} = 79{,}5$ W/m.°C

$f_r = 50$ N

$V_{relativa} = 40{,}0$ m/s



Parte (a) $\quad \frac{Q}{t} = F.v = (50\ N)(40{,}0\ m/s) = 2\ 000\ W$

Parte (b) $\quad m_{placa} = M_{rueda} = 5{,}00$ kg

como: $\quad \frac{Q}{t} = 2\ 000\ W \quad \Rightarrow \quad Q(t) = 2000\ W.t$

luego: $\quad Q(10'0\ s) = 2 \times 10^3\ (10) = 20$ kJ

Luego: $\quad Q_{placa} = 10$ kJ ; $Q_{rueda} = 10$ kJ

Sabemos que: $\quad \frac{Q}{t} = 10\ kW = k_{hierro}\,A\,\frac{\Delta T}{\Delta x}$

Además: $\quad 10\ kJ = m_{hierro}\,C_e\Delta T \quad \Rightarrow \quad 10\ kJ = (5\ kg)\left(448\frac{J}{K.°C}\right)\Delta T$

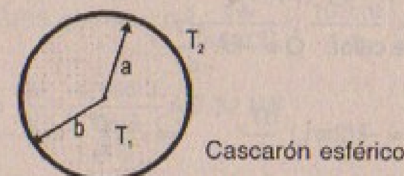
$$\therefore \quad \Delta T = 4{,}46\ °C$$

77. Un recipiente en la forma de un cascarón esférico tiene un radio interior a y un radio exterior b. La pared tiene una conductividad térmica k. Si el interior se mantiene a una temperatura T_1 y el exterior se encuentra a una temperatura T_2, muestre que la tasa de flujo de calor entre las superficies es

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{4\pi\ kab}{b-a}\right)(T_1 - T_2)$$

Resolución:

Sea la figura:



Por demostrar que: $\quad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi.k(ab)}{(b-a)}(T_1 - T_2)$

Sabemos que: $\quad \dot{Q} = -k.A.\frac{dT}{dr} = -k.(4\pi.r^2).\frac{dT}{dr}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}.dr = -\frac{4\pi.k}{\dot{Q}}.dT \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{1}{r^2}.dr = -\frac{4\pi.k}{\dot{Q}}\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\Big|_a^b = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}(T)\Big|_{T_1}^{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{ab} = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}(T_1 - T_2)$$

$$\therefore \quad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi.K.(ab)(T_1 - T_2)}{(b-a)} \qquad \text{l. q.q.d.}$$

78. El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura inferior, T_b (Fig. P20.78). La pared del cilindro tiene una conductividad térmica k. Ignore los efectos en los extremos y demuestre que la tasa de flujo de calor de la pared interior a la pared exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}\right]$$

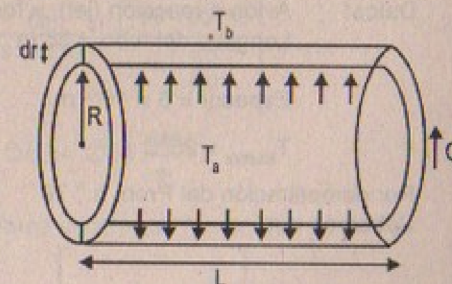


Figura P20.78

(*Sugerencia:* El radiante de temperatura es *dT/dr*. Observe que la corriente de calor radial pasa por un cilindro concéntrico de área 2πrL).

Resolución :

Por demostrar que: $\frac{dQ}{dt} = 2\pi k L \left[\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}\right]$

Sabemos que: A(r) = 2prL   a < r < b

Por transferencia de calor: $\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr}$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q} = -k(2\pi r L)\frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{1}{r}\,dr = -\frac{k(2\pi \times L)}{\dot{Q}}\int_{T_a}^{T_b} dT$$

$$\Rightarrow \quad \ln(r)\Big|_a^b = -\frac{k(2\pi\times L)}{\dot{Q}}.T\Big|_{T_a}^{T_b} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{2\pi\times L\times k}{\dot{Q}}(T_b - T_a)$$

Como: $T_a > T_b$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{2\pi kL(T_a - T_b)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi kL(T_a - T_b)}{\ln(b/a)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

79. La sección de pasajeros de un avión a reacción (jet) comercial tiene la forma de un tubo cilíndrico de 35 m de largo y 2,5 m de radio interior. Sus paredes están forradas con un material aislante de 6,0 cm de espesor y de 4 × 10⁻⁵ cal/s.cm.°C de conductividad térmica. El interior se mantiene a 25°C mientras que el exterior está a −35°C. ¿Qué tasa de calefacción es necesaria para mantener esta diferencia de temperatura? (Emplee el résultado del problema 78).

Resolución:

Datos: Avión a reacción (jet) ≡ forma de un tubo cilíndrico

Longitud del tubo = 35 m ; radio interior = 2,5 m

Espesor = 6×10^{-2} m ; $k = 4 \times 10^{-5}\,\frac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}$

$T_{interior} = 25°C$; $T_{exterior} = -35°C$

Por demostración del Prob. n.° 78

Sabemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi\times L\,k\left[\frac{T_{int.} - T_{ext.}}{\ln\left(\frac{\text{radio ext.}}{\text{radio int.}}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2\pi\times(35)\left(4\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}\right)\times\left[\frac{(25+35)°C}{\ln\left(\frac{2,5+6\times10^{-2}}{2,5}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2(3,1416)(35\text{ cm})\times4\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm°C}}\times\left(\frac{10^2\text{cm}}{1\text{ m}}\right)\times\frac{60°C}{\ln(1,024)}$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = 2\,226,95\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}\times\frac{4,186\text{ J}}{1\text{ cal}} = 9,32\text{ kW}$$

80. Una botella térmica en la forma de un cilindro tiene un radio interior de 4,0 cm, radio exterior de 4,5 cm y longitud de 30,0 cm. Las paredes aislantes tienen una conductividad térmica igual a 2,0 × 10⁻⁵ cal/s.cm.°C. Un litro de café caliente a 90°C se vierte dentro de la botella. Si la pared exterior permanece a 20°C, ¿cuánto tardará el café en enfriarse hasta 50°C? (Emplee el resultado del problema 78 y suponga que el café tiene las mismas propiedades que el agua).

Resolución :

Datos: Botella ≡ cilindro hueco ; radio interior = 4,0 cm

Radio exterior = 4,5 cm ; longitud del tubo = 30,0 cm

$k_{térmica} = 2,0 \times 10^{-5}$ cal/s cm.°C ; volumen de café = 1 litro

$T_{café} = 90°C$; $T_{exterior} = 20°C$

$t_{(50°C)} = ?$

Por demostración del problema n.° 78 (por sugerencia)

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_{int.} - T_{ext.}}{\ln(b/a)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2\,(3,1416)(30\text{ cm})(2\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}).\left[\frac{(90-20)°C}{\ln\left(\frac{4,5}{4,0}\right)}\right]$$

$$\int_0^t dQ = 2,24\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}\times\int_0^t dt \quad \therefore \quad Q(t) = 2,24\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}.\,t$$

Por otro lado: Q necesario para enfriarse el café es: $T_f = 50°C$

$$Q = m_{café}\,.\,C_e\,.\,\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad Q = \rho_{café}\,.\,\text{volumen}\times C_e\times(40°C)$$

$$Q = 1{,}00\ \frac{g}{cm^3} \times 10^3 cm^3 \times \frac{1\ cal}{g.°C} \times 40°C$$

Luego: $Q(t) = Q_{necesario} \Rightarrow 2{,}24\ \frac{cal}{s} \times t = 4 \times 10^4\ cal$

$\therefore\ t_{enfriarse\ el\ café} = 17\ 857{,}142\ s$

o equivalente a

$$t_{necesario} = 17\ 857{,}142\ s\left(\frac{1\ h}{3\ 600\ s}\right) = 4{,}96\ h$$

81. Una "estufa solar" se compone de un espejo reflejante curvo que concentra la luz solar sobre el objeto que se quiere calentar (Fig. P20.81). La potencia solar por unidad de área que llega a la Tierra en alguna localidad es de 600 W/m^2 y la estufa tiene un diámetro de 0,60 m. Suponiendo que 40% de la energía incidente se convierte en energía térmica, ¿cuánto tiempo tardaría en hervir completamente 0,50 litros de agua inicialmente a 20°C? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente).

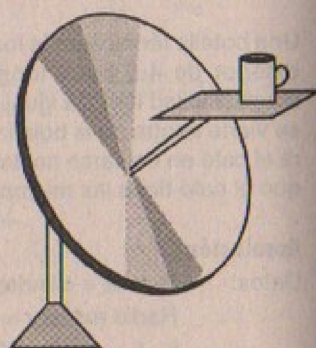


Figura P20.81

Resolución:

Datos: $\frac{\text{potencia solar}}{\text{área}} = 600\ \frac{W}{m^2}$; Diámetro de la taza = 0,60 m

Volumen de agua = 0,50 litros ; $T_{inicial} = 20°C$

Sabemos que: $\frac{P}{A} = 600 \frac{W}{m^2} \Rightarrow P = 600\ \frac{W}{m^2} \times A$

Pero: $A = \pi\left(\frac{0{,}6}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(0{,}36)$

Luego: $\frac{Q}{t} = P = 600\ \frac{J}{s.m^2} \times \frac{\pi}{4}\ (0{,}36)\ m^2$

$\Rightarrow\ Q(t) = 169{,}65\ t\ \frac{J}{s}$ (energía incidente)

Luego 40% energía incidente = energía térmica

Entonces $Q_{térmica} = (0{,}4)(169{,}65 \times t)\ \frac{J}{s}$

Pero por otro lado:

$Q_{térmica\ necesaria\ (hervir)} = m_{H_2O} \cdot C_e \cdot \Delta T + Q_{trans\ (hervir)}$

$\Rightarrow\ Q_{necesaria} = \rho_{H_2O} V_{H_2O} \cdot C_e \cdot (100 - 20)°C + (0{,}5)(2{,}26 \times 10^6)\ J/kg$

$\Rightarrow\ Q_{necesaria} = \frac{1\ g}{cm^3} \times (0{,}5 \times 10^3\ cm^3) \times \frac{1\ cal}{g.°C} \times 80°C + 1{,}13 \times 10^6\ J$

$\therefore\ Q_{necesaria} = 4 \times 10^4\ cal \times \frac{4{,}186\ J}{1\ cal} = 167\ 440\ J + 1{,}13 \times 10^6\ J$

Como: $Q_{térmica} = Q_{necesaria}$

$\Rightarrow\ (0{,}4)(169{,}65 \times t) = (167\ 440 + 1{,}13 \times 10^6)\ J$

$\therefore\ t_{tardará\ en\ hervir\ el\ agua} = 5{,}31\ h$

82. Un estanque cuya agua está a 0°C se cubre con una capa de hielo de 4,0 cm de espesor. Si la temperatura del aire permanece constante en −10°C, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que el espesor del hielo sea de 8,0 cm? (*Sugerencia*: Para resolver este problema utilice la ecuación 20.14 en la forma $\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$ y observe que el calor incremental dQ extraído del agua a través del espesor x de hielo es la cantidad necesaria para congelar un espesor dx de hielo. Es decir, $dQ = L\rho Adx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área y L es el calor latente de congelación).

Resolución:

Datos:

Espesor inicial del hielo = 4,0 cm ; $L_{fusión\ agua} = L_{cong.} = 3{,}33 \times 10^5\ J/kg$

Espesor final del hielo = 8,0 cm ; $\rho_{hielo} = 0{,}917 \times 10^3\ kg/m^3$

$T_{aire} = -10°C$; $k_{hielo} = 2\ w/m°C$

$T_{estanque} = 0°C$

Sabemos que: $\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$ ... (1)

Por otro lado: (por sugerencia)

$dQ = L_{solidif.}\ \rho_{hielo}\ Adx$

$\Rightarrow\ \int_0^t dQ = L_{solidif}\ .\rho_{hielo} A \int_{4{,}0\ cm}^{8{,}0\ cm} dx$

$\therefore\ Q(t) = 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg} \times (0{,}917 \times 10^3\ \frac{kg}{m^3})\ (8\ cm - 4\ cm)\ \frac{(1\ m)}{10^3 cm}\ .\ A$

De (1): $Q(t) = k.A\ \frac{(10)}{4 \times 10^{-2}}\ dt$

$$\Rightarrow \quad 12{,}21\ A \times 10^6 \frac{J}{m^2} = A \times \frac{10}{4\times10^{-2}} \times 2.t$$

$$\therefore \quad t = 24\ 420\ s \equiv 6{,}78\ h$$

83. Un estudiante obtiene los siguientes datos en un experimento del método de mezclas diseñado para medir el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial del agua y calorímetro: 70°C
Masa del agua: 0,400 kg
Masa del calorímetro: 0,040 kg
Calor específico del calorímetro: 0,63 kJ/kg.°C
Temperatura inicial del aluminio: 27°C
Masa del aluminio: 0,200 kg
Temperatura final de la mezcla: 66,3°C

Emplee estos datos para determinar el calor específico del aluminio. Sus resultados deben estar dentro del 15% del valor listado en la tabla 20.1.

Resolución :

Datos: $T_{\text{inicial del agua y calorímetro}} = 70°C$
Masa del agua = 0,400 kg
Masa del calorímetro = 0,040 kg
Calor específico del calorímetro = 0,63 kJ/kg.°C
$T_{\text{inicial aluminio}} = 27°C$
Masa del aluminio = 0,200 kg
$T_{\text{final de la mezcla}} = 66{,}3°C$
Calor específico del aluminio = ?

Por calorimetría:

$$Q_{\text{ganado del aluminio}} = Q_{\text{perdido}(H_2O)} + Q_{\text{perdido del calorímetro}}$$

Entonces:

$$m_{Al}\, C_{e\,Al}\, \Delta T = m_{H_2O}\, C_e\, \Delta T + m_{calor}\, C_{e\,calor}\, \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}200\ kg)\ C_{e\,Al}\ (66{,}3 - 27)°C = (0{,}4\ kg)(4\ 186 \frac{J}{kg.°C})(70 - 66{,}3)°C$$

$$+ (0{,}040)(0{,}63 \frac{kJ}{kg.°C})(70 - 66{,}3)°C$$

$$\Rightarrow \quad 7{,}86\ kg.°C(C_{e\,Al}) = 1\ 699{,}6 \frac{J}{kg.°C}\ (3{,}7°C)kg$$

$$\therefore \quad C_{e\,Al} = 800 \frac{J}{kg.°C}$$

Capítulo 21

LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

MODELO MOLECULAR DE UN GAS IDEAL

1. Encuentre la velocidad rms de moléculas de nitrógeno en condiciones estándar, 0,0°C y 1,00 atm de presión. Recuerde que 1 mol de cualquier gas ocupa un volumen de 22,4 litros en condiciones estándar.

Resolución :

Datos: T = 0°C ≡ 273 K

$P = 1{,}00\ atm \quad ; \quad R = 0{,}082 \frac{atm\ .\ L}{mol\ .\ K} \equiv 8{,}31 \frac{J}{mol\ .\ K}$

$n = 1\ mol\ N_2 \quad ; \quad v_{rms} = ?$

V = 22,4 litros

Sabemos que: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

Como: PV = nRT

Además: $1\ mol\ N_2 <> 28\ g/mol \equiv 28 \times 10^{-3}\ kg/mol$

Entonces: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3\ (8{,}31)\ (273)}{28\times10^{-3}\ kg/mol}}$

$\therefore \quad \boxed{v^2 = 2{,}43 \times 10^5\ m^2/s^2}$

2. Dos moles de gas oxígeno están confinadas en un recipiente de 5,00 litros a una presión de 8,00 atm. Calcule la energía cinética traslacional promedio de una molécula de oxígeno en estas condiciones. (La masa de una molécula de O_2 es $5{,}31 \times 10^{-26}$ kg).

Resolución :

Datos: $n = 2\ moles\ O_2$

$V = 5{,}00\ litros \quad ; \quad m_{O_2} = 5{,}31 \times 10^{-26}\ kg$

P = 8,00 atm

Sabemos que: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}nRT = N\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\left(8{,}00\ \text{atm}\times\frac{1{,}05\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)\left(5\ \text{litros}\frac{10^{-3}\text{m}^3}{1\ \text{litro}}\right) = 2E_K$$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,(mol)} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(8\times1{,}05\times10^5\right)\left(5\times10^{-3}\right)$$

$$\therefore \quad E_{K(mol)} = 3\ 150\ \text{J} \equiv 3{,}15\times10^3\ \text{J}$$

3. Un globo aerostático de investigación a grandes alturas contiene gas helio. A su altura máxima de 20,0 km, la temperatura exterior es de –50,0°C y la presión se ha reducido a 1/19 atm. El volumen del globo en este punto es de 800 m³. Suponiendo que el helio tiene la misma temperatura y presión que la atmósfera circundante, encuentre el número de moles de helio en el globo.

Resolución:

Datos: $h_{máx} = 2\times10^4$ m ; $V = 800$ m³ $R = 8{,}31$ J/mol.K

$T = -50°C \equiv 223$ K ; $n_{He} = ?$

$P = \frac{1}{19}$ atm ; $M_{He} = 4{,}0$ g/mol

Aplicando: PV = nRT

$$\left(\frac{1}{19}\right)\text{atm}\left(\frac{1{,}05\times10^5\text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)800\ \text{m}^3 = n\left(8{,}31\frac{\text{J}}{\text{molK}}\right)(223\ \text{K})$$

$$\therefore \quad n_{He} = 2{,}3\ \text{kmol}$$

4. Para el problema anterior, encuentre a) la masa del helio y b) el volumen del globo cuando se lanza desde el suelo a presión y temperatura estándares (1,00 atm y 0,0°C). c) ¿Qué volumen deberá tener un tanque a 27,0°C y 170 atm para que proporcione esta gran cantidad de helio?

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $n = \frac{m}{M}$

$$\Rightarrow \quad m_{He} = n\times M = (2{,}3\times10^3\ \text{mol})(4\times10^{-3}\ \text{kg/mol})$$

$$\therefore \quad m_{He} = 9{,}2\ \text{kg}$$

Parte (b)

V = ? ; P = 1,00 atm ; T = 0°C = 273 K ; R = 0,082 atm/mol.K

sabemos que: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad (1\ \text{atm})\ V = (2{,}3\times10^3\ \text{mol})\left(0{,}082\ \frac{\text{atm . L}}{\text{mol.K}}\right)(273\ \text{K})$$

$$\therefore \quad V = 51{,}5\ \text{kL} \equiv 51{,}5\ \text{m}^3$$

Parte (c)

V = ?; T = 27,0°C ≡ 300 K ; P = 170 atm ; n = 2,3 kmol

Sabemos que: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad V = \frac{n\,RT}{P} = \frac{(2{,}3\times10^3)(0{,}082)(300)}{170}$$

$$\therefore \quad V = 333\ \text{L} = 0{,}3\ \text{m}^3$$

5. Un globo específico de 4 000 cm³ de volumen contiene helio a una presión (interna) de 1,2 × 10⁵ N/m². ¿Cuántas moles de helio hay en el globo, si cada átomo de helio tiene una energía cinética promedio de 3,6 × 10⁻²² J?

Resolución:

Datos: $V = 4\ 000\ \text{cm}^3\times\frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3} \equiv 4\times10^{-3}\ \text{m}^3$

$P = 1{,}2\times10^5$ N/m²

$E_{K\ prom.c/He} = 3{,}6\times10^{-22}$ J

Sabemos que: $NE_K = \frac{3}{2}\ nRT$

Como: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad N.E_K = \frac{3}{2}PV \quad \Rightarrow \quad N(3{,}6\times10^{-22}) = \frac{3}{2}(1{,}2\times10^5)(4\times10^{-3})$$

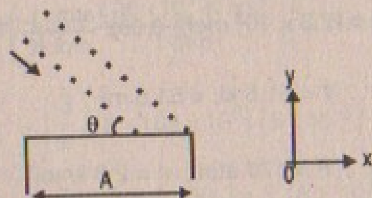
$$\therefore \quad N_{He} = 2{,}0\times10^{24}\ \text{mol}$$

En consecuencia: $n_{He} = \frac{N}{N_A} = \frac{2{,}0\times10^{24}}{6{,}023\times10^{23}} = 3{,}32$ moles

6. Durante 30 s, 500 granizos golpean una ventana de vidrio de 0,60 m² a un ángulo de 45° respecto de la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa de 5,0 g y una velocidad de 8,0 m/s. Si las colisiones son elásticas, encuentre la fuerza y la presión promedio sobre la ventana.

6A. En un tiempo *t*, *N* granizos golpean una ventana de vidrio de área *A* a un ángulo θ respecto de la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa *m* y una velocidad *v*. Si las colisiones son elásticas, encuentre la fuerza y la presión promedio sobre la ventana.

Resolución :



$$F_x = \frac{N.m}{d} v_x^2 = \frac{N.m}{v \times t} \times (v\cos\theta)^2 = \frac{N.m v \cos^2\theta}{t}$$

$$F_y = \frac{N.m}{d} v_y^2 = \frac{N.m}{v \times t} \times (v \operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{N.m\ v \operatorname{sen}^2\theta}{t}$$

$$\therefore \quad F_{promedio} = \frac{N.mv}{t}$$

Luego: $P_{promedio} = \frac{F_{prom.}}{A} = \frac{N.mv}{A \times t}$

7. Un cilindro contiene una mezcla de gases helio y argón en equilibrio a 150°C. ¿Cuál es la energía cinética promedio de cada molécula de gas?

Resolución :

Datos: $T_{He+Ar} = 150°C \equiv 423\ K$

$E_{K\ prom.} = ?$

$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K}$

Sabemos que: $N \cdot E_{K\ prom.} = \frac{3}{2}\ nRT = \frac{3}{2} Nk_BT$

$\Rightarrow \quad E_{K\ prom.} = \frac{3}{2}(1{,}38 \times 10^{-23})(423) \qquad \therefore\ E_{K\ prom.} = 8{,}76 \times 10^{-21}\ J$

8. Calcule la velocidad rms de una molécula de H_2 de 250°C.

Resolución :

$$V_{rms\,(H_2)} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31)(523)}{2{,}02 \times 10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad V_{rms(H_2)} = 2{,}54 \times 10^3\ m/s$$

9. a) Determine la temperatura a la cual la velocidad rms de un átomo de He es igual a 500 m/s. b) ¿Cuál es la velocidad rms del He sobre la superficie del Sol, donde la temperatura es de 5 800 K?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $v_{rms\ (He)} = 500\ m/s = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}} = \sqrt{\frac{3\ (8{,}31)T}{4{,}0 \times 10^{-3} kg/mol}}$

$$\Rightarrow \quad (500)^2 = \frac{3(8{,}31)T \times 10^3}{4{,}0} \qquad \therefore \quad T = 40{,}1\ K$$

Parte (b) $v_{rms\ (He\ a\ 5\ 800\ K)} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}}$

$$\Rightarrow \quad v_{rms(He)} = \sqrt{\frac{3(8{,}31)(5\,800)}{4 \times 10^{-3}}} \qquad \therefore \quad v_{rms(He)} = 6{,}01\ km/s$$

10. El helio gaseoso está en equilibrio térmico con helio líquido a 4,20 K. Determine la velocidad más probable de un átomo de helio (masa = $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg).

Resolución :

Datos: $T_{equi} = 4{,}20\ K$; $m_{He} = 6{,}65 \times 10^{-27}\ kg$

$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J/K$

Sabemos que: $N\ E_{K\ prom.} = \frac{3}{2}\ nRT = \frac{3}{2}\ N\ k_B\ T$

$\Rightarrow \quad E_{K\ prom.} c/a = \frac{3}{2}\ k_B.T = \frac{3}{2}\ (1{,}38 \times 10^{-23})(4{,}20)$

$\therefore \quad E_{K\ prom. c/a\ He} = 8{,}7 \times 10^{-23}\ J$

En consecuencia: $\frac{1}{2} m_{He} \cdot \bar{v}^2 = 8{,}7 \times 10^{-23}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(6{,}65 \times 10^{-27})\bar{v}^2 = 8{,}69 \times 10^{-23}$

$$\therefore \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2(8{,}69)(10^4)}{6{,}65}} = 162\ m/s$$

11. Si la velocidad rms de un átomo de helio a temperatura ambiente es 1 350 m/s, ¿cuál es la velocidad rms de una molécula de oxígeno (O_2) a esta temperatura? (La masa molar del O_2 es 32 y la masa molar del He es 4).

Resolución :

Datos: $v_{rms\ He} = 1\ 350\ m/s$ (T ambiente)

$M_{O_2} = 32\ g/mol$; $v_{rms(O_2)} = ?$

Sabemos que: $1\ 350\ m/s = \sqrt{\dfrac{3RT_{amb.}}{M_{He}}}$

$$\Rightarrow \quad 1\ 350 = \sqrt{\dfrac{3(8{,}31)\ T_{amb.}}{4{,}0\times10^{-3}\ kg/mol}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{amb.} = \dfrac{(1\ 350)^2 \times 4\times10^{-3}}{(3)\times(8{,}31)}$$

Por otro lado: $v_{rms}\ (O_2) = \sqrt{\dfrac{3RT_{amb.}}{M_{O_2}}} = \sqrt{\dfrac{3(8{,}31)(1\ 350)^2\ (4)\times10^{-3}}{(3)(8{,}31)(32)(10^{-3})}}$

$$\therefore \quad v_{rms}\ (O_2) = 4{,}77 \times 10^2\ m/s$$

12. Un recipiente de 5,00 litros contiene gas nitrógeno a 27,0°C y 3,00 atm. Encuentre a) la energía cinética traslacional total de las moléculas del gas, y b) la energía cinética promedio por molécula.

Resolución:

Datos: $V_{N_2} = 5{,}0$ litros ; $T = 27°C = 300\ K$
$P = 3{,}00\ atm$

Parte (a)

Sabemos que: $E_{total} = NE_{K\ prom.} = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}PV$

$$E_{total} = \left(\dfrac{3}{2}\right)(3{,}00\ atm \times \dfrac{1{,}03\times10^5}{1\ atm} N/m^2)(5 \times 10^{-3}\ m^3)$$

$$\therefore \quad E_{total} = 2{,}32\ kJ$$

Parte (b)

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (5)(3) = n\ (0{,}082)(300\ K)$$

$$\therefore \quad n = 0{,}609\ mol$$

Luego: $N = nN_A = (0{,}609)(6{,}023 \times 10^{23}) = 3{,}67 \times 10^{23}$ mol

En consecuencia: $2{,}32 \times 10^3 = NE_{K\ prom.}$

$$\therefore \quad E_{K\ prom.C/M} = \dfrac{2{,}3\times10^3}{3{,}67\times10^{23}} = 0{,}63 \times 10^{-20}\ J$$

13. Un mol de gas xenón a 20,0°C ocupa 0,0224 m³. ¿Cuál es la presión ejercida por los átomos de Xe sobre las paredes del recipiente?

Resolución:

Datos: $n = 1\ mol\ X_e$; $T = 20°C = 293\ K$
$V = 0{,}0224\ m^3$; $P = ?$

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad P(0{,}0224\ m^3) = (1)\left(8{,}31\ \dfrac{J}{mol.K}\right)(293\ K)$$

$$\therefore \quad P = 1{,}09 \times 10^5\ N/m^2 = 109\ kPa$$

14. a) ¿Cuántos átomos de gas helio son necesarios para llenar un globo hasta un diámetro de 30,0 cm a 20,0°C y 1,00 atm? b) ¿Cuál es la energía cinética promedio de cada átomo de helio? c) ¿Cuál es la velocidad promedio de cada átomo de helio?

Resolución:

Parte (a)

Datos: $P = 1{,}00\ atm$; $T = 20°C = 293\ K$; $R = 8{,}31\ \dfrac{J}{mol.K}$

Diámetro = 0,3 m

Aplicando: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (1{,}03 \times 10^5)\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)\left[\dfrac{0{,}3}{2}\right]^3 = (n)(8{,}31)(293\ K)$$

$$\therefore \quad n_{He} = 0{,}59$$

Luego: $N_{átomos} = n_{He} \cdot N_A = 3{,}55 \times 10^{23}$ átomos

Parte (b)

Sabemos que: $NE_{K\ prom.} = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}PV$

$$\Rightarrow \quad E_{K\ prom.C/átomo} = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{(0{,}59)(8{,}31)(28)}{(0{,}59)(6{,}033\times10^{23})}$$

$$\therefore \quad E_{K\ prom.C/átomo} = 6{,}06 \times 10^{-21}\ J$$

Parte (c)

Sabemos que: $6{,}06 \times 10^{-21} = \dfrac{1}{2}\ mv^2$

$$\Rightarrow \quad 6{,}06 \times 10^{-21} = \dfrac{1}{2}(nM_{He})\ v^2$$

$$\Rightarrow \quad 6{,}06 \times 10^{-21} = \dfrac{1}{2}(0{,}59)(4 \times 10^{-3}\dfrac{kg}{mol})\ \bar{v}^2$$

$$\therefore \quad \bar{v}_{He} = 2{,}27 \times 10^{-9}\ m/s$$

CALOR ESPECÍFICO DE UN GAS IDEAL

15. Calcule el cambio en la energía interna de 3,0 mol de gas helio cuando su temperatura se incrementa en 2,0 K.

Resolución:

Datos: $n = 3{,}0$ mol ; $R = 8{,}31$ J/mol.K

$\Delta T = 2{,}0$ K ; $\Delta U = ?$

Sabemos que: $U = \frac{3}{2}nRT$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{3}{2}(3{,}0)(8{,}31)(2{,}0)$$

$$\therefore \quad \Delta U = 75{,}0 \text{ J}$$

16. Un mol de un gas diatómico tiene una presión *P* y un volumen V. Al calentar el gas, su presión se triplica y su volumen se duplica. Si este proceso de calentamiento incluye dos pasos, uno a presión constante y el otro a volumen constante, determine la cantidad de calor transferido al gas.

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P$; $P_{final} = 3P$ $\quad C_P = \frac{7}{2}R$

$V_{inicial} = V$; $V_{final} = 2V$ $\quad C_V = \frac{5}{2}R$

$T_{inicial} = \frac{PV}{nR}$; $T_{final} = \frac{6PV}{nR}$

Por la primera ley de la termodinámica: $\Delta U_{total} = Q_{total} - W_{total}$

$$\Rightarrow \quad nC_V\Delta T = Q_{total} - P\int dV$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = n\,C_V\,\Delta T + P\int dV$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = n\left(\frac{5R}{2}\right)\left(\frac{6PV}{nR} - \frac{PV}{nR}\right) + P\int_V^{2V} dV$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total} = \frac{25\,nRPV}{2\,nR} + PV$$

$$\therefore \quad Q_{total} = \frac{27}{2}PV$$

17. Un mol de un gas monoatómico ideal está a una temperatura inicial de 300 K. El gas se somete a un proceso isovolumétrico en el que adquiere 500 J de calor. Después se somete a un proceso isobárico en el cual pierde esta misma cantidad de calor. Determine a) la nueva temperatura del gas, y b) el trabajo realizado sobre el gas.

17A. Un mol de un gas monoatómico ideal está a una temperatura inicial T_0. El gas experimenta un proceso isovolumétrico en el que adquiere el calor *Q*. Después se somete a un proceso isobárico en el cual pierde esta misma cantidad de calor. Determine a) la nueva temperatura del gas, y b) el trabajo realizado sobre el gas.

Resolución:

Datos: "Gas monoatómico"

$T_{inicial} = 300$ K ; $\quad C_V = \frac{3}{2}R$; $\quad C_P = \frac{5}{2}R$

$Q_i = 500$ J ; $\quad n = 1$ mol

Parte (a)

Inicialmente: $\Delta U = Q$ (proceso isovolumétrico)

$$\Rightarrow \quad nC_V\Delta T = 500 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad (1{,}00 \text{ mol})\left(\frac{3}{2}(R)\right) \times (T_f - 300) = 500 \text{ J}$$

$$\therefore \quad T_f = 340{,}1 \text{ K}$$

Finalmente: $\Delta U = Q - W$ (proceso isobárico)

$$\Rightarrow \quad nC_V\Delta T = -500 \text{ J} - P\Delta V = -500 \text{ J} - nR\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (1)\left(\frac{3}{2}R\right)(T_N - T_f) + (1)(R)(T_N - T_f) = -500 \text{ J}$$

Desarrollando: resulta que $T_{nueva\ del\ gas} = 316$ K

Parte (b)

De la primera ley $\Delta U = Q - W$

$$\Rightarrow \quad (1)\left(\frac{3}{2}R\right)(316 - 340) = -500 \text{ J} - W$$

$$\Rightarrow \quad W = -500 \text{ J} + (1{,}5)(8{,}31)(24) \quad \therefore \quad W_{total} = |200 \text{ J}|$$

18. Un mol de aire ($C_v = 5R/2$) a 300 K confinado en un cilindro bajo un pesado émbolo ocupa un volumen de 5,0 litros. Determine el nuevo volumen del gas si 4,4 kJ de calor se transfieren al aire.

Resolución:

Datos: $C_v = 5R/2$; $n = 1$ mol ; $T_{inicial} = 300$ K ; $V_{inicial} = 5{,}0$ litros

$Q = 4{,}4$ kJ ; $V_{final} = ?$

Sabemos que: $P_{inicial} \times V_{inicial} = n\,R\,T_{inicial}$

$\Rightarrow \quad P_{inicial} \times 5{,}0 \times 10^{-3}\ m^3 = (1{,}00\ mol)(8{,}31)(300)$

$\therefore \quad P_i = 5 \times 10^5\ N/m^2$

Por otro lado: (por la primera ley de la termodinámica)

$\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad nC_v\Delta T = nC_e P \dfrac{\Delta V}{nR} = 4{,}4\ kJ - 5 \times 10^5\ \Delta V$

$\Rightarrow \quad \dfrac{5}{2}(5 \times 10^5)(\Delta V) + 5 \times 10^5\ \Delta V = 4{,}4\ kJ \quad \therefore \quad V_{final} = 7{,}5 \times 10^{-3}\ m^3$

19. Un mol de gas hidrógeno se calienta a presión constante desde 300 K hasta 420 K. Calcule a) el calor transferido al gas, b) el aumento en su energía interna, y c) el trabajo hecho por el gas.

Resolución : 19

Datos: $T_{inicial} = 300\ K$; $n = 1\ mol\ H_2$

$T_{final} = 420\ K$; $C_{p\,(H_2)} = 28{,}8\ J/mol.K$

$P = cte$; $C_{v\,(H_2)} = 20{,}4\ J/mol.K$

Parte (a) $Q_{trans.} = nC_p\Delta t$

$\Rightarrow \quad Q_{trans.} = (1\ mol)\left(28{,}8\ \dfrac{J}{mol.K}\right)(420 - 300)\ K$

$\therefore \quad Q_{trans.} = 3{,}46\ kJ$

Parte (b) $\Delta U = nC_v\Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta U = (1\ mol)\left(20{,}4\ \dfrac{J}{mol.K}\right)(120\ K)$

$\therefore \quad \Delta U = 2{,}45\ kJ$

Parte (c)

Por la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad W = Q - \Delta U \quad \Rightarrow \quad W = 3{,}46 - 2{,}45$

$\therefore \quad W = 1{,}01\ kJ$

20. En un proceso a volumen constante, 209 J de calor se transfieren a 1 mol de un gas monoatómico ideal con una temperatura inicial de 300 K. Encuentre a) el aumento en la energía interna del gas, b) el trabajo que efectúa, y c) su temperatura final.

Resolución :

Datos: $V = cte$; $C_v = \dfrac{3}{2}R$

$Q = 209\ J$; $n = 1\ mol$

$T_{inicial} = 300\ K$

Parte (a)

Sabemos que: $Q = nC_v\Delta T \quad \Rightarrow \quad 209 = (1\ mol)\left(\dfrac{3}{2}\right)(8{,}31)(T_{final} - 300\ K)$

$\therefore \quad T_{final} = 316{,}8\ K$

Luego: $\Delta U = nC_v\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta U = (1\ mol)\left(\dfrac{3}{2}\right)(8{,}31)(316{,}8 - 300)\ K$

$\therefore \quad \Delta U = 209{,}4\ J$

Parte (b)

Por la primera ley: $\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad 209{,}4 = 209 - W$

$\therefore \quad W = 0{,}4\ J$

Parte (c)

Por lo hallado en la parte (a)

$T_{final} = 316{,}8\ K$

21. ¿Cuál es la energía térmica de 100 g de gas He a 77 K? ¿Cuánta energía debe agregársele para calentarlo hasta 24°C?

Resolución :

Datos: $m_{He} = 100\ g$; $M_{He} = 4{,}0\ g/mol$

$T_{inicial} = 77\ K$; $T_{final} = 24 + 273 = 297\ K$

$\Delta U = ?$

$U = \dfrac{3}{2}nRT \quad \Rightarrow \quad U = \left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{100}{4}\right)(8{,}31)(77)$

$\therefore \quad U = 24{,}0\ kJ$

Por otro lado: $\Delta U = \dfrac{3}{2}n\,R\Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta U = \left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{100}{4}\right)(8{,}31)(297 - 77)$

$\therefore \quad \Delta U = 68{,}5\ kJ$

22. Un recipiente tiene una mezcla de dos gases: n_1 moles del gas 1 que tiene calor específico molar C_1 y n_2 mol del gas 2 con calor específico molar C_2. a) Determine el calor específico molar de la mezcla. b) ¿Cuál es el calor específico molar si la mezcla tiene m gases con $n_1, n_2, n_3, ..., n_m$ moles, y calores específicos molares $C_1, C_2, C_3, ..., C_m$, respectivamente?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $n_{total} = n_1 + n_2 \Rightarrow C_{total} = \frac{1}{n_{total}} \cdot \frac{dU}{dT}$

Por otro lado: $dU = n_1 C_1 . dT \Rightarrow \frac{1}{C_1}\left(\frac{dU}{dT}\right) = n_1$

$dU = n_2 C_2 . dT \Rightarrow \frac{1}{C_2}\left(\frac{dU}{dT}\right) = n_2$

$\Rightarrow n_1 + n_2 = \frac{dU}{dT}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$

$\Rightarrow n_{total} = \frac{dU}{dT}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right) \quad \therefore \quad C_{total} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Parte (b)

Sabemos que: $n_1 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{dU}{dT}\right)$

$n_2 = \frac{1}{C_2}\left(\frac{dU}{dT}\right)$

$\vdots \quad \vdots$

$$\sum_{i=1}^{n=m} n_i = \sum_{i=1}^{n=m} \frac{1}{C_i}\left(\frac{dU}{dT}\right) \quad \ldots (\alpha)$$

además: $n_{totales} = \frac{1}{C_{totales}}\left(\frac{dU}{dT}\right) \quad \ldots (\beta)$

Luego: $C_{totales} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n=m} \frac{1}{C_i}}$

23. Una habitación de una casa bien aislada tiene un volumen de 100 m³ y se llena con aire a 300 K. a) Encuentre la energía necesaria para aumentar la temperatura de este volumen de aire en 1,0°C. b) Si esta energía pudiera utilizarse para levantar un objeto de masa *m* hasta una altura de 2,0 m, calcule el valor de *m*.

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $PV = nRT$ (P = 1,00 atm)

$\Rightarrow (1{,}013 \times 10^5)(100) = n \times (8{,}31)(300) \quad \therefore n_{aire} = 4{,}06 \times 10^3$ moles

por otro lado: por la primera ley de la termodinámica:

$dU = Q - W$ (V = constante)

$\Rightarrow U_{total\ necesaria} = nR\Delta T + nC_v\Delta T$

$\Rightarrow U_{necesaria} = (1\ k)\ [4{,}06 \times 10^3 \times 8{,}31 + 4{,}06 \times 10^3 \times \frac{5}{2}(8{,}31)]$

$\therefore U_{necesaria} = 4{,}06 \times 10^3 \times (8{,}31)\ [1 + 2{,}5] = 118 \times 10^3 = 118$ kJ

Parte (b)

Por conservación de energía:

$U_{necesaria} = E_{potencial\ gravitatoria}$

$\Rightarrow 118\ kJ = (M)(9{,}8)(2{,}0) \quad \therefore \quad M = 6{,}03 \times 10^3$ kg

24. ¿Cuánta energía térmica tiene el aire en un cuarto de 20,0 m³ a a) 0,0°C y b) 20,0°C? Suponga que la presión permanece en 1,00 atm.

Resolución :

Parte (a)

Datos: $V = 20{,}0\ m^3$; $Q = ?$

$T = 0°C \equiv 273\ K$; $P = 1\ atm \equiv 1{,}013 \times 10^5\ N/m^2$

Sabemos que: $Q = nC_p\Delta T \Rightarrow Q = n\frac{7}{2}R(273\ K)$

Por otro lado: $PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T}$

Luego: $Q = \frac{7}{2}\frac{PV}{T}(273\ K) \Rightarrow Q = \frac{7}{2} \times 1{,}013 \times 10^5 \times 20$

$\therefore Q = 7\ 091$ kJ

Parte (b)

Datos: $V = 20{,}0\ m^3$

$T = 20°C \equiv 293\ K$; $Q = ?$

$P = 1{,}00\ atm \equiv 1{,}013 \times 10^5\ N/m^2$

Sabemos que: $Q = nC_p\Delta T \Rightarrow Q = n\frac{7}{2}R(293\ K)$

Por otro lado: $PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T}$

Luego: $Q = \frac{7}{2} \times \frac{PV}{T} \times 293\ K \Rightarrow Q = \frac{7}{2} \times 1{,}013 \times 10^5 \times 20$

$\therefore Q = 7\ 091$ kJ

PROCESOS ADIABÁTICOS PARA UN GAS IDEAL

25. Dos moles de un gas ideal ($\gamma = 1{,}40$) se expande lenta y adiabáticamente desde una presión de 5,00 atm y un volumen de 12,0 litros hasta un volumen final de 30,0 litros. a) ¿Cuál es la presión final del gas? b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$; $n = 2$ moles

$P_{inicial} = 5{,}00$ atm ; $V_{inicial} = 12{,}0$ litros

$V_{final} = 30{,}0$ litros ; $P_{final} = ?$

Parte (a)

Sabemos que: $PV^{\gamma} = cte$

Entonces: $(5{,}00 \text{ atm}) \times 12^{1{,}4} = P_{final} \times 30^{1{,}4}$

$\therefore \quad P_{final} = 1{,}39$ atm

Parte (b)

Sabemos que: $PV^{\gamma} = cte$

Además: $PV = nRT \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{nRT}{P}$

Luego: $P\left(\dfrac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = cte$

$\therefore \quad P^{1-\gamma} \times T^{\gamma} = cte$

Luego: $(5{,}00 \text{ atm})(12 \text{ litros}) = (2 \text{ mol})(0{,}082 \dfrac{\text{atm} \times \text{l}}{\text{mol . K}})(T_{inicial})$

$\therefore \quad T_{inicial} = 366$ K

Hallando "T_{final}" de la condición: $P^{1-\gamma} \times T^{\gamma} = cte$

$\Rightarrow \quad (5{,}00 \text{ atm})^{1-1{,}4} \times (366)^{1{,}4} = (1{,}39 \text{ atm})^{1-1{,}4} \times T_{final}^{1{,}4}$

$\Rightarrow \quad (5{,}00 \text{ atm})^{-0{,}4} \times (366)^{1{,}4} = (1{,}39 \text{ atm})^{-0{,}4} \times T_{final}$

$\therefore \quad T_{final} = 254$ K

26. Cuatro litros de un gas ideal diatómico ($\gamma = 1{,}40$) confinado en un cilindro se someten a un ciclo cerrado. El gas está a una presión inicial de 1,0 atm y a 300 K. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente hasta su presión original y por último se comprime isobáricamente hasta su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre c) la temperatura del gas al principio de la expansión adiabática, y d) la temperatura al final del ciclo, e) ¿Cuál es el trabajo neto hecho en este ciclo?

26A. Un gas ideal diatómico ($\gamma = 1{,}40$) confiando en un cilindro se somete a un ciclo cerrado. El gas está inicialmente a P_0, V_0 y T_0. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente hasta su presión original y por último se comprime isobáricamente hasta su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre c) la temperatura del gas al principio de la expansión adiabática, y d) la temperatura al final del ciclo. e) ¿Cuál es el trabajo neto hecho en este ciclo?

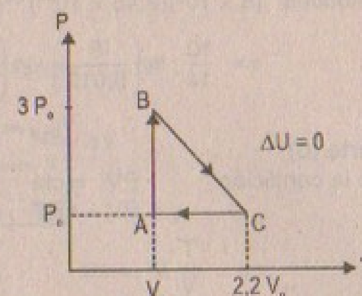
Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$

$P_{inicial} = P_0$; $V_{inicial} = V_0$

$T_{inicial} = T_0$

Parte (a)



De la condición:

$3P_0 + V_0^{\gamma} = P_0 \times V_{final}^{\gamma}$

$\therefore \quad V_{final} = 3^{1/1{,}4} \times V_0 = 2{,}2\, V_0$

Parte (b)

De lo hallado en la parte (a) $V_{final} = 2{,}2\, V_0$

Parte (c)

De la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad 0 = Q - W \quad \therefore \quad W_{total} = Q$

Luego: $W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$

$\Rightarrow \quad W_{total} = nC_v\Delta T + 0 + n\,C_p . \Delta T$

$\Rightarrow \quad W_{total} = n \times \dfrac{5R}{2} \times \dfrac{2P_0 V_0}{nR} + n \times \dfrac{7R}{2} \times \left(-1{,}2\,\dfrac{P_0 V_0}{nR}\right)$

$\Rightarrow \quad W_{total} = 5\,P_0 . V_0 - 4{,}2\,P_0 . V_0$

$\therefore \quad W_{total} = 0{,}8\,P_0 . V_0$

27. Aire ($\gamma = 1{,}4$) a 27°C y presión atmosférica se extrae de una bomba de bicicleta que tiene un cilindro con un diámetro interno de 2,5 cm y 50,0 cm de longitud. La carrera descendente comprime al aire adiabáticamente, el cual alcanza una presión manométrica de 800 kPa antes de entrar a la llanta. Determine a) el volumen del aire comprimido, y b) la temperatura del aire comprimido. c) La bomba es de acero y tiene una pared interior cuyo espesor es de 2,00 mm. Suponga que se deja que 4,0 cm de la longitud del cilindro alcancen el equilibrio térmico con el aire. ¿Cuál será el aumento de temperatura de la pared?

Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$; $T_{inicial} = 27°C \equiv 300$ K

$P_{inicial} = P_{man} = 800\ kPa$

$P_{final} = P_{man} + P_{atm} = 9{,}013 \times 10^5\ Pa$

$$\text{Volumen inicial} = \pi\frac{D^2}{4}\cdot L = (3{,}1416)\times\frac{1}{4}\times(0{,}025)^2(0{,}5) = 2{,}45\times10^{-4}\ m^3$$

Volumen final = ?

Parte (a)

De la condición: $P.V^{\gamma}$ = cte (proceso adiabático)

Entonces: $(8\times10^5)(2{,}45\times10^{-4})^{1,4} = (9{,}013\times10^5)(V_{final})^{1,4}$

$$\Rightarrow \frac{10}{14}\cdot\ln\left(\frac{8}{9{,}013}\right)+\ln\left(\frac{2{,}45}{10\,000}\right) = \ln(V_{final})$$

$$\therefore\quad V_{final} \approx 2{,}06\times10^{-4}\ m^3$$

Parte (b)

De la condición: PV^{γ} = cte

y : $PV = nRT$

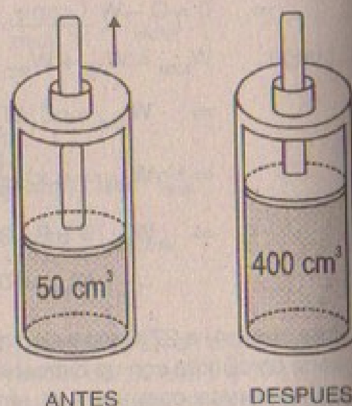
$$\Rightarrow \frac{T}{V}V^{\gamma} = cte \qquad \therefore\quad T.V^{\gamma-1} = cte$$

Luego: $(300\ K)(2{,}45\times10^{-4})^{1,4-1} = T_{final}(2{,}06\times10^{-4})^{1,4-1}$

$$\Rightarrow 0{,}4\ln\left(\frac{2{,}45}{2{,}06}\right)+\ln(300) = \ln(T_{final})$$

$$\therefore\quad T_{final} = 321\ K$$

28. Durante la carrera de potencia en un motor de automóvil de cuatro tiempos, el émbolo es obligado a bajar cuando la mezcla de la gasolina y el aire se somete a una expansión adiabática reversible. Encuentre la potencia promedio generada durante la expansión suponiendo a) que el motor trabaja a 2 500 rpm, b) la presión manométrica justo antes que la expansión es de 20 atm, c) los volúmenes de la mezcla justo antes y después de la expansión son 50 y 400 cm³, respectivamente (Fig. P21.28), d) el tiempo en el que ocurre la expansión es un cuarto del ciclo total, y e) la mezcla se comporta como un gas ideal.



400 cm³

DESPUES

Figura P21.28

Resolución:

Potencia promedio = ?

Datos: El motor trabaja a 2500 rev/min

La presión manométrica antes es: 20,0 atm

Volumen inicial = 50,0 cm³ ; volumen final = 400 cm³

$$t_{total} = \frac{1}{4}\ \text{del ciclo total}$$

La mezcla se comporta como un gas ideal.

De la condición: $P.V^{\gamma}$ = cte

$$\Rightarrow P_{inicial}\cdot V^{\gamma}_{inicial} = P_{final}\cdot V^{\gamma}_{final}$$

$$\Rightarrow [(20{,}0\ atm)+1\ atm](50\ cm^3)^{\gamma} = (1\ atm)(400\ cm^3)^{\gamma}$$

$$\therefore\quad \gamma = 1{,}46$$

Por otro lado: $dW = PdV \quad\Rightarrow\quad dW = cte\,\frac{1}{V^{\gamma}}dV$

$$\Rightarrow W_{total} = P_{inicial}\cdot V^{\gamma}_{inicial}\int_{V_{inicial}}^{V_{final}}\frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

$$\therefore\quad W_{total} = \frac{P_{inicial}\cdot V_{inicial} - P_{final}\cdot V_{final}}{\gamma-1}$$

Reemplazando:

$$W_{total} = \frac{(21\ atm)(50\ cm^3)-(400\ cm^3)(1\ atm)}{1{,}46-1}\cdot\left[\frac{1{,}013\times10^5\ N/m^2}{1\ atm}\times\frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}\right]$$

$$\therefore\quad W_{total} = 143\ J$$

Además: 2 500 rev —— 60 s $\quad\therefore\quad x = \frac{125}{3}\,s$

1 rev —— x

Luego: $t_{expansión} = \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{125}{12}\,s$

En consecuencia:

$$\text{Potencia promedio} = \frac{W_{total}}{s} = \frac{143\ J}{\frac{125}{12}\ s} = 13{,}73\ \text{watts}$$

29. Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1,00 atm a 20,0 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y reversible y que el gas es ideal con $\gamma = 1{,}40$, a) ¿en qué factor cambia el volumen, y b) en qué factor cambia la temperatura?

Resolución:

Datos: "Proceso adiabático reversible"

$P_{inicial} = 1\ atm$; $\gamma = 1{,}4$; $P_{final} = 20{,}0\ atm$

Parte (a)

De la condición: $P.V^{\gamma}$ = cte

$$\Rightarrow P^{\gamma}_{inicial}\cdot V_{inicial} = P_{final}\cdot V^{\gamma}_{final}$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00\ \text{atm})(V_{inicial})^{1,4} = (20{,}0\ \text{atm})(V_{final})^{1,4}$$

$$\therefore \quad \frac{V_{inicial}}{V_{final}} = 8{,}5$$

Parte (b)

De la condición: $P^{1-\gamma}\,T^{\gamma} = cte$

Entonces: $(P_{inicial})^{1-\gamma}\ T^{\gamma}_{inicial} = T^{\gamma}_{final}\ (P_{final})^{1-\gamma}$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00\ \text{atm})^{1-1,4} \times T_{inicial}^{\ 1,4} = (20\ \text{atm}) \times T^{1,4}_{final}$$

$$\therefore \quad \frac{T_{inicial}}{T_{final}} = 0{,}42 \quad ó \quad \frac{T_{final}}{T_{inicial}} = 2{,}35$$

30. Gas helio a 20,0°C se comprime reversiblemente sin perder calor hasta un quinto de su volumen. a) ¿Cuál es su temperatura después de la compresión? b) ¿Cuál es si el gas es aire seco (77% N_2, 23% O_2)?

Resolución:

Parte (a)

"Gas helio" $\quad T_{inicial} = 20°C = 293\ K$

$V_{inicial} = 5\ V_{final} \quad ; \quad \gamma_{helio} = 1{,}67$

De la condición: $PV^{\gamma} = cte$

Además: $PV = nRT$

Entonces: $\dfrac{nRT}{V} \times V^{\gamma} = cte \quad \therefore \quad \dfrac{T.V^{\gamma}}{V} = cte$

Luego: $T_{inicial}\ V^{\gamma-1}_{inicial} = T_{final}\ V^{\gamma-1}_{final}$

$$\Rightarrow \quad (293\ K)(V_{inicial})^{\gamma-1} = T_{final}\left(\frac{1}{5}V_{inicial}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \quad (293\ K)\ 5^{\gamma-1} = T_{final}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 861\ K$$

Parte (b)

"Aire seco" (77% N_2, 23% O_2) entonces $\gamma = 1{,}4$ de la condición: $TV^{\gamma-1} = cte$

$$\Rightarrow \quad (293\ K)(V_{inicial})^{\gamma-1} = T_{final} \times \left(\frac{1}{5}V_{inicial}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \quad (293\ K)(1)^{0,4} = T_{final} \times (0{,}2)^{0,4}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 558\ K$$

31. El aire en un nubarrón se expande conforme se eleva. Si su temperatura inicial era de 300 K, y no se pierde calor en la expansión, ¿cuál es la temperatura cuando se duplica el volumen inicial?

Resolución:

$T_{inicial} = 300\ K \qquad V_{inicial} = \dfrac{1}{2}V_{final} \quad ; \quad \gamma_{aire} = 1{,}4$

$T_{final} = ?$

De la condición: $PV^{\gamma} = cte$

Por otro lado: $PV = nRT \;\Rightarrow\; P = \dfrac{nRT}{V}$

Luego: $nRT \times \dfrac{V^{\gamma}}{V} = cte \quad \therefore \quad TV^{\gamma-1} = cte$

Luego: $300\ K \times V^{\gamma-1}_{inicial} = T_{final}\,(2\ V_{inicial})^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad (300\ K) = T_{final}\,(2)^{\gamma-1}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 227\ K$$

32. ¿Cuánto trabajo es necesario para comprimir 5,00 moles de aire a 20,0°C y 1,00 atm hasta 1/10 del volumen original mediante a) un proceso isotérmico y b) un proceso adiabático reversible? c) ¿Cuáles son las presiones finales en los dos casos?

Resolución:

Datos: $\quad n = 5{,}00$ moles $\quad ; \quad V_{inicial} = 10\ V_{final}$

$T = 20°C \quad ; \quad W = ?$

$P = 1{,}00$ atm

Parte (a)

En un proceso isotérmico: $\quad T = cte$

Sabemos que: $\quad dW = P.dV = \dfrac{nRT}{V}\,.\,dV$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{1}{V}\,dV$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = (5)(8{,}31)(293\ K)\ \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore \quad W_{total} = -28\ \text{kJ (compresión)}$$

Parte (b)

En un proceso "adiabático reversible" se cumple que:

$PV^{\gamma} = CTE \qquad \gamma_{aire} = 1{,}4$

Sabemos que: $\quad dW = P.dV$

$$\Rightarrow \quad dW = \frac{CTE}{V^{\gamma}}\,.\,dV$$

$$\Rightarrow \quad dW = P_{inicial}\,.\,V^{\gamma}_{inicial} \times \frac{1}{V^{\gamma}}\,.\,dV$$

$$\therefore \quad W_{total} = P_{inicial}\,.\,V^{\gamma}_{inicial}\int_{V_{inicial}}^{V_{final}}\frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

Luego: $W_{total} = \dfrac{P_{inicial} \cdot V_{inicial} - P_{final} \cdot V_{final}}{\gamma - 1}$

$\Rightarrow W_{total} = \dfrac{(1{,}00 \text{ atm}) V_{inicial} - P_{final} \times (0{,}1) V_{inicial}}{1{,}4-1}$ ... (α)

Por otro lado:

$$\frac{(1{,}013\times10^5 \text{ N/m}^2)}{1 \text{ atm}}(1{,}00 \text{ atm})\, V_{inicial} = (5)(8{,}31)(293 \text{ K})$$

$$\therefore \quad V_{inicial} = 0{,}12 \text{ m}^3$$

Además: $P_{inicial} \times V^{\gamma}_{inicial} = P_{final} \times (0{,}1)^{\gamma} \times V^{\gamma}_{inicial}$

$\Rightarrow 1{,}00 \text{ atm} = P_{final} \times (0{,}1)^{1{,}4}$

$\therefore \quad P_{final} = 25{,}1 \text{ atm}$

Reemplazando datos en (α)

$$W_{total} = \frac{(1{,}00 \text{ atm})(0{,}12 \text{ m}^3) - (0{,}1)(25{,}1\text{atm})(0{,}12 \text{ m}^3)}{(0{,}4)} \times \left[\frac{1{,}013\times10^5 \text{N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right]$$

En consecuencia: $W_{total} = -45{,}89$ kJ (compresión)

Parte (c)

En el proceso isotérmico: $P_{inicial} \times V_{inicial} = P_{final} \times P_{final}$

Entonces: $1 \text{ atm} \times V_{inicial} = P_{final} \times \dfrac{1}{10} V_{inicial}$

$\therefore \quad P_{final} = 10{,}0 \text{ atm}$

En el proceso "adiabático reversible"; la presión final es la hallada en la parte (b)

$\therefore \quad P_{final} = 25{,}1 \text{ atm}$

33. Un mol de un gas diatómico ideal ocupa un volumen de un litro a una presión de 0,10 atm. El gas experimenta un proceso en el que la presión es proporcional al volumen, y al final del proceso, se encuentra que la velocidad del sonido en el gas se ha duplicado a partir de este valor inicial. Determine la cantidad de calor transferido al gas.

33A. Un mol de un gas monoatómico ocupa un volumen V_0 a una presión P_0. El gas experimenta un proceso en el que la presión es proporcional al volumen, y al final del proceso se encuentra que la velocidad del sonido en el gas se ha duplicado a partir de este valor inicial. Determine la cantidad de calor transferido al gas.

Resolución : 33 ≡ 33A

Datos: $n_{gas\ diatómico} = 1$; $V_{inicial} = 1L$; $P_{inicial} = 0{,}10$ atm

Además: $\dfrac{P}{V}$ = constante

Nos piden: $Q_{transfiriendo\ al\ gas} = ?$

Por la ley de gases tenemos que:

$$P.V = n.R.T$$

$$\Rightarrow (0.10\text{atm})(1.00\text{L}) = (1\text{mol})(0{,}082\ \frac{\text{atm.L}}{\text{mol.K}})\ T_{inicial}$$

$$\therefore \quad T_{inicial} = 1{,}22 \text{ K}$$

Por otro lado:

Se sabe que: (velocidad del sonido de un gas)^2 = C^2 = K. R.T.

Entonces:

$$\div \begin{cases} C_{inicial} = \sqrt{R.K}\ .\sqrt{T_{inicial}} \\ C_{final} = 2\ C_{inicial} = \sqrt{K.R}\ .\sqrt{T_{final}} \end{cases}$$

Resulta que:

$$2 = \sqrt{\frac{T_{final}}{T_{inicial}}} \qquad \therefore \quad T_{final} = 4\ T_{inicial} = 4(1{,}22 \text{ K}) = 4{,}88 \text{ K}$$

Por otro lado:

$$\frac{P_{inicial}}{V_{inicial}} = \frac{P_{final}}{V_{final}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{final} = \frac{P_{inicial} \cdot V_{final}}{V_{inicial}}}$$

Luego; de la ley de gases se cumple que:

$$\left(\frac{P_{inicial} \cdot V_{final}}{V_{inicial}}\right) . V_{final} = \left(\frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}}\right)(4\ T_{inicial})$$

$$\Rightarrow V_{final}^2 = 4\ V$$

$$\therefore V_{final} = 2\ V_{inicial} = 2(1{,}00\ L) = 2{,}0\ L$$

Luego por la primera ley se cumple que:

$$Q_{gas} = \Delta U + W = n.\ C_v\ (T_{final} - T_{inicial}) + \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} P\ .\ dv$$

$$\Rightarrow \quad Q_{gas} = nC_v\ (T_{final} - T_{inicial}) + \frac{P_{inicial}}{V_{inicial}} \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} V\ .\ dv$$

$$\Rightarrow \quad Q_{gas} = (1)\left(\frac{5}{2}\right) R\ (4{,}88 - 1{,}22) + \left(\frac{0{,}10}{1{,}0}\right)\left(\frac{1}{2}\right) V^2 \Big|_{1{,}0L}^{2{,}0L}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{gas} = (1)\left(\frac{5}{2}\right)(0{,}082)\ (3{,}66) + \frac{(0{,}1)}{(1{,}0)}\ (0{,}5)\ [(4) - (1)]$$

$$\therefore \quad Q_{transferido\ al\ gas} = 0{,}9003\ atm.\ L \approx 0{,}93\ J$$

LA EQUIPARTICIÓN DE LA ENERGÍA

34. Si una molécula tiene *f* grados de libertad, demuestre que un gas compuesto de ese tipo de moléculas tiene las siguientes propiedades: 1) su energía térmica total es *fnRT*/2; 2) su calor específico molar a volumen constante es *fR*/2; 3) su calor específico molar a presión constante es (*f* + 2)R/2; y 4) la razón $\gamma = C_p/C_V = (f + 2)/f$.

Resolución :

Datos: " f " grados de libertad

Parte (a)

Por demostrar que: $U_{total} = \dfrac{f\,nRT}{2}$

Por definición: $U_{total} = 3N\left(\dfrac{1}{2} k_BT\right) + 2N\left(\dfrac{1}{2} k_BT\right)$

$$\Rightarrow \quad U_{total} = fN\ \frac{k_BT}{2} = \frac{f\,nRT}{2} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}\left(\frac{f\,nRT}{2}\right) \quad \therefore \quad C_v = \frac{fR}{2} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

Como: $C_p - C_v = R$

$$\Rightarrow \quad C_p = R + \frac{fR}{2} = \frac{R}{2}\ (f + 2) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (d)

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{R}{2}(f+2)}{\frac{f\,R}{2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{R\,(f+2)}{f.R}$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{f+2}{f} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

35. Un recipiente de 5,00 litros contiene 0,125 moles de un gas ideal a 1,50 atm. ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de una sola molécula?

Resolución :

Datos: $V = 5{,}00$ litros ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{23}\ \dfrac{J}{mol.K}$

$n = 0{,}125$ moles ; $R = 8{,}31\ \dfrac{J}{mol.K}$

$P = 1{,}00$ atm

$E_K = ?$

$$E_K = \frac{3}{2} k_BT \text{ (por molécula)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,prom} = \frac{3}{2}\ (1{,}38 \times 10^{-23}) \left[\frac{1{,}015 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}}{(0{,}125)(8{,}31)}\right]$$

$$\therefore \quad E_{K\,prom} = 1{,}51 \times 10^{-20}\ J$$

36. Al revisar las magnitudes de C_V y C_P para gases diatómicos y poliatómicos en la tabla 21,2, encontramos que los valores aumentan con las masas moleculares crecientes. Brinde una explicación cuantitativa de esta observación.

Resolución :

Sabemos que: $n = \dfrac{m}{\overline{M}} \Rightarrow n \times \overline{M} = m$ (inversamente proporcionales

Además: $PV = nRT \Rightarrow \dfrac{PV}{R} = nT$ (inversamente proporcionales)

Luego: $C_V = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{dU}{dT}$

En consecuencia:

A mayor $\overline{M}$, menor n ⇒ T creciente y por lo tanto "C_v" mayor, aumenta.

37. En un modelo burdo (Fig. P21.37) de una molécula diatómica giratoria de cloro (Cl_2), los dos átomos de Cl están separados por $2{,}0 \times 10^{-10}$ m y giran alrededor de su centro de masa con velocidad angular $\omega = 2{,}0 \times 10^{12}$ rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional de una molécula de Cl_2, que tiene una masa molar de 70?

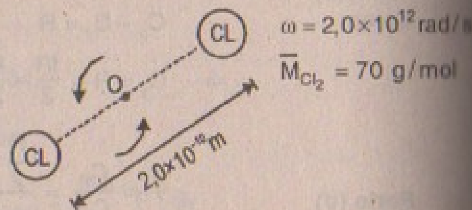


Figura P21.37

Resolución:

Datos: $\omega = 2{,}0 \times 10^{12}$ rad/s $\quad M_{Cl_2} = 70$ g/mol

Sabemos que: $E_{K\,rotacional} = \frac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$

Entonces: $E_{K\,rotacional} = \frac{1}{2} (mr^2)\omega^2$

$\Rightarrow \quad E_{K\,rotacional} = \frac{1}{2}(70)(1{,}0 \times 10^{-10})^2 \times (2{,}0 \times 10^{12})^2$

$\therefore \quad E_{K\,rotacional} = 700$ kJ

38. Considere 2 moles de un gas diatómico ideal. Encuentre la capacidad calorífica total a volumen constante y a presión constante si a) las moléculas giran pero no vibran, y b) las moléculas giran y vibran.

Resolución:

Datos: n = 2 moles

Parte (a)

Cuando giran y no vibran,se cumple que:

$$U_{total} = \frac{5}{2} NRT \quad \Rightarrow \quad C_v = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}\left(\frac{5}{2} nRT\right) = \frac{5}{2}R$$

Luego: $C_p = \frac{5R}{2} + R \quad \therefore \quad C_p = \frac{7}{2}R$

Parte (b)

Cuando giran y vibran,se cumple que:

$$U_{total} = \frac{5}{2}nRT + 3nRT = \frac{11}{2}\,nRT$$

$$\Rightarrow \quad C_v = \frac{1}{n} \times \frac{d}{dT}\left(\frac{11}{2}\,nRT\right) = \frac{11}{2}R$$

Luego: $C_p = R + \frac{11}{2}R = \frac{13}{2}R$

LA LEY DE DISTRIBUCIÓN DE BOLTZMANN
DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES MOLECULARES

39. El calor latente de vaporización para el agua a temperatura ambiente es 2 430 J/g. a) ¿Cuánta energía cinética posee cada molécula de agua que se evapora antes de que este proceso ocurra? b) Encuentre la velocidad promedio antes de la evaporación de una molécula de agua que se evapora. c) ¿Cuál es la temperatura efectiva de estas moléculas? ¿Por qué estas moléculas no lo queman?

Resolución:

Parte (a)

En una molécula de agua hay 18 g $\quad N = n \times N_A$

Entonces: $Q = 18\text{ g} \times 2\,430 \frac{J}{g} \quad \therefore \quad Q = 43{,}74$ kJ

Como: $dU = dQ - dW = dQ - 0$

$\Rightarrow \quad U = 43{,}74\text{ kJ} = N.E_{K(molécula)} \quad \therefore \quad E_{K(molécula)} = 7{,}27 \times 10^{-20}$ J

Parte (b)

Sabemos que: $7{,}27 \times 10^{-20}\text{ J} = \frac{1}{2} m_{H_2O} \times \bar{v}^2$

$\Rightarrow \quad 7{,}27 \times 10^{-20} = \frac{1}{2}(18 \times 10^{-3}) \times \bar{v}^2$

$\therefore \quad \bar{v} = 28{,}42 \times 10^{-10}$ m/s

Parte (c)

Sabemos que: $28{,}42 \times 10^{-10} \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$\Rightarrow \quad (28{,}42 \times 10^{-10})^2 = \frac{3RT}{M_{H_2O}}$

$\Rightarrow \quad (28{,}42 \times 10^{-10})^2 \times 18 \times 10^{-3} \frac{g}{mol} = (3)\frac{(8{,}31)}{mol.K} J \times T$

$\therefore \quad T = 0{,}58 \times 10^{-20}$ K

No lo queman porque es una temperatura que tiende a "cero".

40. Quince partículas idénticas tienen las siguientes velocidades: una tiene 2,0 m/s; dos, 3,0 m/s; tres, 5,0 m/s; cuatro, 7,0 m/s; tres, 9,0 m/s; dos, 12,0 m/s. Encuentre a) la velocidad promedio, b) la velocidad rms, y c) la velocidad más probable de estas partículas.

Resolución:

Datos: 1 partícula $\Rightarrow$ 2,0 m/s
3 partículas $\Rightarrow$ 9,0 m/s

2 partículas $\Rightarrow$ 3,0 m/s
3 partículas $\Rightarrow$ 5,0 m/s
4 partículas $\Rightarrow$ 7,0 m/s
2 partículas $\Rightarrow$ 12,0 m/s

Parte (a)

$$v_{prom.} = \frac{1(2)+3(9)+2(3)+3(5)+4(7)+2(12)}{15}$$

$$\therefore \quad v_{promedio} = 6,8 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $U_{total} = N \times E_{K\,prom.} = 15 \times \frac{1}{2} m\overline{v}^2$

Por otro lado: $E_{total} = \frac{1}{2}m(2)^2 + 3\left(\frac{1}{2}m(9)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(3)^2\right)$

$$+ 3\left(\frac{1}{2}m(5)^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}m(7)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(12)^2\right)$$

Entonces: $15 \times \frac{1}{2} m\overline{v}^2 = 412 \text{ m}$

$$\Rightarrow \quad V_{rms} = \sqrt{\frac{412 \times 2}{15}} \approx 7,41 \text{ m/s}$$

Parte (c)

Vemos y observamos que la mayor cantidad de partículas tienen una velocidad de 7,0 m/s entonces dicha velocidad es la "más probable".

41. Se informa que sólo hay una partícula por metro cúbico en las profundidades del espacio. Utilizando la temperatura promedio de 3,0 K y suponiendo que la partícula es H_2 con un diámetro de 0,20 nm, a) determine la trayectoria libre media de la partícula y el tiempo promedio entre choques. b) Repita la parte a) suponiendo que sólo hay una partícula por centímetro cúbico.

Resolución:

Datos: $n_v = 1 \text{ mol/m}^3$; $T = 3,0 \text{ K}$; $M_{H_2} = 2 \text{ g/mol}$
$d_{H_2} = 0,20 \times 10^{-9} \text{ m}$

Parte (a) $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_V} \Rightarrow \ell = \frac{1}{\sqrt{2} \times (3,1416)(0,20 \times 10^{-9})^2 \times (1)}$

$$\therefore \quad \ell = 5,63 \times 10^{18} \text{ m}$$

Sabemos que: $f = \sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n_V$

Entonces: $\frac{1}{f} = t_{promedio} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n_v}$

Pero: $\overline{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{(3)(8,31)(3)}{0,002}} \approx 193,4 \text{ m/s}$

En consecuencia: $T_{promedio} = \frac{1}{\sqrt{2} \times (3,1416)(1)} \approx 1,16 \times 10^{-3} \text{ s}$

42. La composición química de la atmósfera cambia ligeramente con la altitud debido a que las masas de las diversas moléculas son diferentes. Emplee la ley de las atmósferas para determinar cómo cambia la proporción entre las moléculas de oxígeno y nitrógeno entre el nivel del mar y 10 km. Suponga una temperatura de 300 K y considere que las masas son iguales a 32 u para el oxígeno (O_2) y 28 u para el nitrógeno (N_2).

Resolución:

Datos: Masa de N_2 = 28 u ; T = 300 K ; $1u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg
Masa de O_2 = 32 u ; h = 10 km

Sabemos que: $n(y) = n_o e^{\frac{-mg(y)}{k_B \cdot T}}$

Entonces: $n_{(10\,km)} = n_o e^{\frac{-4,65 \times 10^{-26} \times (9,8)(10^4)}{1,38 \times 10^{-23}(300)}}$

$$\therefore \quad n_{N_2}(10 \text{ km}) = 0,33\, n_o$$

Por otro lado: $n_{O_2}(10 \text{ km}) = n_o e^{\frac{-5,3 \times 10^{-26} \times (9,8)(10^4)}{1,38 \times 10^{-23} \times (300)}}$

$$\therefore \quad n_{O_2}(10 \text{ km}) = 0,285\, n_o$$

En consecuencia: $\frac{n_{O_2}}{n_{N_2}} = \frac{0,285\, n_0}{0,33\, n_0} = 0,864$

43. a) Encuentre la proporción de velocidades para los dos isótopos del cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl, a medida que se difunden por el aire. b) ¿Cuál isótopo se mueve más rápido?

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27}$ kg

Por la ley de distribución de velocidades moleculares:

$$\overline{v} = 1,60 \times \sqrt{\frac{k_B \cdot T}{m}}$$

Entonces para: ^{35}Cl $35\ u = 5{,}81 \times 10^{-26}$ kg

Entonces: $\bar{v}_{(35Cl)} = \dfrac{1{,}60}{\sqrt{5{,}81\times10^{-26}}} \times \sqrt{k_B T}$

Para: ^{37}Cl $37\ u = 6{,}1 \times 10^{-26}$ kg

Entonces: $\bar{v}_{(37Cl)} = \dfrac{1{,}60}{\sqrt{6{,}1\times10^{-26}}} \times \sqrt{k_B T}$

En consecuencia: $\dfrac{\bar{v}_{(35Cl)}}{\bar{v}_{(37Cl)}} = \dfrac{\dfrac{1{,}60\times\sqrt{k_B T}}{\sqrt{5{,}81\times10^{-26}}}}{\dfrac{1{,}60\times\sqrt{k_B T}}{\sqrt{6{,}1\times10^{-26}}}} \Rightarrow \dfrac{\bar{v}_{(35Cl)}}{\bar{v}_{(37Cl)}} = 1{,}02$

Parte (b)
se mueve más rápido: ^{35}Cl

44. Demuestre que la velocidad más probable de una molécula de gas está dada por la ecuación 21.29. Obsérvese que la velocidad más probable corresponde al punto donde la pendiente de la curva de distribución de velocidades, dN_v/dv, es cero.

Resolución:

Sabemos que: $N_v = 4\pi.N\left(\dfrac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

Sea: $A = 4\pi.N\left(\dfrac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}$

$B = -mv^2/2k_B T$

Entonces: $v_{mp} = \dfrac{dN_v}{dv} = 0 \Rightarrow v_{mp} = \dfrac{d}{dv}[A.v^2.e^B] = 0$

$\Rightarrow v_{mp} = \dfrac{d}{dv}(A.v^2).e^B + \dfrac{d}{dv}(e^B)Av^2$

$\Rightarrow v_{mp} = 2A.v.e^B + \dfrac{d}{dv}(B)e^B Av^2 = 0$

$\Rightarrow -2 = \dfrac{d(B)}{dv} v$

Reemplazando: $-2 = v . \dfrac{d}{dv}\left[-\dfrac{m}{2k_B T} . v^2\right]$

$\Rightarrow -2 = \dfrac{-vm}{2k_B T}(2v)$

$\therefore v_{mp} = \sqrt{\dfrac{2k_B T}{m}} = 1{,}41 \times \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}}$ l.q.q.d.

45. A qué temperatura la velocidad promedio de los átomos de helio sería igual a a) la velocidad de escape de la Tierra, $1{,}12 \times 10^4$ m/s y b) la velocidad de escape de la Luna, $2{,}37 \times 10^3$ m/s? (Véase el capítulo 14 para un análisis de la velocidad de escape, y observe que la masa de un átomo de helio es $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg).

Resolución:

Datos: Masa de helio = $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Parte (a)

Por Maxwell: $\bar{v} = 1{,}60 \times \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}}$

$\Rightarrow \bar{v} = 1{,}60 \times \sqrt{\dfrac{1{,}38\times10^{-23}\times T}{6{,}65\times10^{-27}}} = \underbrace{1{,}12 \times 10^4 \text{ m/s}}_{\text{Por dato}}$

$\therefore T = 2{,}37 \times 10^4$ K

Parte (b)

Por Maxwell: $\bar{v} = 1{,}60 \times \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}}$

$\Rightarrow \bar{v} = 1{,}60 \times \sqrt{\dfrac{1{,}38\times10^{-23}\times T}{6{,}65\times10^{-27}}} = \overbrace{2{,}37 \times 10^3 \text{ m/s}}^{\text{Por dato}}$

$\therefore T = 1{,}06 \times 10^3$ K

46. Un gas está a 0°C. ¿A qué temperatura debe calentarse para duplicar la velocidad rms de sus moléculas?

Resolución:

Sabemos que: $v_{rms} = ,173 \times \sqrt{k_B T/m}$

$\Rightarrow v_{rms(0°C)} = 1{,}73 \times \sqrt{\dfrac{(1{,}38\times10^{-23})(273)}{m}}$

Luego: $2\, v^{rms}{}_{(0°C)} = 1{,}73 \times \sqrt{\dfrac{(1{,}38\times10^{-23})(T)}{m}}$

Entonces: $2\,(1{,}73)\times\sqrt{\dfrac{(1{,}38\times10^{-23})(273)}{m}} = 1{,}73\times\sqrt{\dfrac{(1{,}38\times10^{-23})(T)}{m}}$

$\therefore\quad T = 33\ K$

TRAYECTORIA LIBRE MEDIA

47. En un sistema de ultraalto vacío, se mide una presión igual a $1{,}00\times10^{-10}$ torr (donde 1 torr = 133 Pa). Si las moléculas de gas tienen un diámetro de $3{,}00\times10^{-10}$ m y la temperatura es de 300 K, encuentre a) el número de moléculas en un volumen de $1{,}00\ m^3$, b) la trayectoria libre media de las moléculas, y c) la frecuencia de choque, suponiendo una velocidad promedio de 500 m/s.

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00\times10^{-10}$ torr ; 1 torr ≡ 133 N/m^2

$D_{molécula} = 3{,}00\times10^{-10}$ m ; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$

$T = 300\ K$

Parte (a)

Sea: $V = 1{,}00\ m^3$

Entonces: $n_V = \dfrac{N}{V}$

Por otro lado: $PV = Nk_BT \quad\Rightarrow\quad \dfrac{P}{k_BT} = \dfrac{N}{V} = n_V$

Luego: $N_{moléculas} = \dfrac{PV}{k_B T} = \dfrac{1{,}00\times10^{-10}\,torr\times\dfrac{133\ N/m^2}{1\ torr}\times1{,}00\ m^3}{1{,}38\times10^{-23}\,\dfrac{J}{K}\times300K}$

$\therefore\quad N_{moléculas} = 3{,}21\times10^{12}$ moléculas

Parte (b)

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V}$

$\Rightarrow\quad \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times(3{,}1416)\times1\,(3{,}00\times10^{-10})^2\times\dfrac{3{,}21\times10^{12}\ mol}{1{,}00\ m^3}}$

$\therefore\quad \ell = 778$ km

Parte (c)

Asumiendo $\bar{v} = 500$ m/s

Entonces: $f = \pi\times d^2\times\bar{v}\times n_V$

$\Rightarrow\quad f = (3{,}1416)(3{,}00\times10^{-10})^2\times500\times\dfrac{3{,}21}{1{,}00}\times10^{12}$

$\therefore\quad f_{choque} = 6{,}42\times10^{-4}\ s^{-1}$

48. Muestre que la trayectoria libre media para las moléculas de un gas ideal es $\ell = \dfrac{k_BT}{\sqrt{2}\,\pi d^2P}$ donde *d* es el diámetro molecular.

Resolución:

Por demostrar que: $\ell = \dfrac{k_B\,T}{\sqrt{2}\,\pi\,d^2P}$

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2\times n_V}$

Además: $PV = nRT = N\,k_B\,T \quad\Rightarrow\quad \dfrac{P}{k_B\,T} = \dfrac{N}{V} = n_V$

luego: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{P}{k_BT}} \quad\therefore\quad \ell = \dfrac{k_B\,.\,T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times P}$ l.q.q.d.

49. En un tanque lleno de oxígeno, cuántos diámetros moleculares *d* (en promedio) viajará una molécula de oxígeno (a 1,00 atm y 20,0°C) antes de chocar con otra molécula de O_2? (El diámetro de la molécula de O_2 es aproximadamente $3{,}60\times10^{-10}$ m).

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00$ atm ; $T = 20°C \equiv 293\ K$

$D_{O_2} = 3{,}60\times10^{-10}$ m ; $d_{MOLECULARES} = ?$

Supongamos que hay "N" moléculas, entonces habrá N veces "d" diámetros, por otro lado:

$PV = nRT$

$\Rightarrow\quad \dfrac{P}{RT} = \dfrac{n}{V} = n_V \quad\therefore\quad n_V = \dfrac{1{,}00}{(0{,}082)(293)} = 4{,}16\times10^{-2}\ \dfrac{mol}{m^3}$

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{N}{V}}$

$\Rightarrow\quad N\times d = \dfrac{V}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N} = \dfrac{nRT}{P}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N} = \left(\dfrac{N}{N_A}\right)\left(\dfrac{RT}{P}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N}\right)$

Reemplazando:

$$N = \frac{(8,31)(293)}{\left(6,023\times10^{23}\right)\left(1,013\times10^{5}\right)(3,6)^{3}\times10^{-30}\times\sqrt{2}\times\pi} \qquad \therefore\ N = 193 \text{ diámetros}$$

50. Gas argón a presión atmosférica y 20,0°C se confina en un recipiente de 1,00 m³. El diámetro efectivo de una esfera sólida de un átomo de argón es $3,10 \times 10^{-10}$ m. a) Determine la trayectoria libre media ℓ. b) Encuentre la presión cuando $\ell = 1,00$ m. c) Encuentre la presión cuando $\ell = 3,10 \times 10^{-10}$ m.

Resolución :

Datos: $P_{Ar} = 1,00 \text{ atm} \equiv 1,013 \times 10^{5}\ N/m^{2}$

$T = 20°C \equiv 293\ K$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ J/K$

$d_{Ar} = 3,10 \times 10^{-10}\ m$; $V = 1,00\ m^{3}$

Parte (a)

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\times n_V} \quad \Rightarrow \quad \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times(3,1416)\times\left(3,1\times10^{-10}\right)^{2}\times\frac{N}{V}}$

Como: $\dfrac{P}{k_B T} = \dfrac{N}{V} = n_V \quad \Rightarrow \quad \dfrac{N}{V} = \dfrac{1,013\times10^{5}}{1,00}$

Luego: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times(3,1416)\left(3,1\times10^{-10}\right)^{2}\times1,013\times10^{5}}$

$\therefore \quad \ell = 2,31 \times 10^{13}$ m

Parte (b)

Sea: $\ell = 1,00$ m

Entonces: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^{2}\times n_V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\times\frac{P}{k_B T}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{k_B \cdot T}{\ell\times\left(\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\right)} = P \quad \Rightarrow \quad P = \dfrac{\left(1,38\times10^{-23}\right)\times293}{(1,00)\left(\sqrt{2}\right)(3,1416)\times\left(3,1\times10^{-10}\right)^{2}}$

$\therefore \quad \ell = 9,47 \times 10^{-3}\ N/m^{2}$

Parte (c)

Si: $\ell = 3,10 \times 10^{-10}$ m $\qquad k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K

Como: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\times n_V}$

Pero: $n_V = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{k_B . T}$

$\Rightarrow \quad \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\times\frac{P}{k_B T}} = \dfrac{k_B . T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}\times P}$

$\Rightarrow \quad \ell\times P = \dfrac{k_B\ .\ T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^{2}}$

$\Rightarrow \quad P = \dfrac{\left(1,38\times10^{-23}\ \frac{J}{K}\right)\times293\ K}{\left(3,10\times10^{-10}m\right)\left(\sqrt{2}\right)(3,1416)\times\left(3,1\times10^{-10}\right)^{2} m^{2}}$

$\therefore \quad P = 3,05 \times 10^{7}\ N/m^{2}$

ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS

51. Se encuentra que la constante *b* que aparece en la ecuación de estado de Van der Waals para el oxígeno mide 31,8 cm³/mol. Suponiendo una forma esférica, estime el diámetro de la molécula.

Resolución :

Datos: $b = 31,8\ cm^{3}/ mol$

$n = 1,00$ mol de O_2

$\dfrac{\text{Volumen}}{\text{mol}} = \dfrac{4}{3}\pi\left[\dfrac{d}{2}\right]^{3}$

Sabemos que: $\dfrac{V}{n} = b = 31,8\ \dfrac{cm^{3}}{mol}$

pero: $\dfrac{V}{n} = \dfrac{4}{3}\pi\times r^{3} = \dfrac{4}{3}\pi\left[\dfrac{d}{2}\right]^{3}$

$\Rightarrow \quad 31,8\ \dfrac{cm^{3}}{mol} = \dfrac{4}{3}(3,1416)\ \dfrac{\left(d^{3}\right)}{8}\times (6,023 \times 10^{23}\ \text{part.})$

$\therefore \quad d \approx 0,46 \times 10^{-7}\ cm \equiv 46\ nm$

52. Muestre que el trabajo realizado al expandir 1 mol de un gas de Van der Waals desde un volumen inicial V_i hasta un volumen V_f a presión constante es

$$W = RT \ln\left(\frac{V_f - b}{V_i - b}\right) + a(V_f^{-1} - V_i^{-1})$$

Resolución :

Datos: $n = 1$ mol

Por demostrar que: $W_{total} = RT\ln\left(\dfrac{V_f - b}{V_i - b}\right) + a(V_f^{-1} - V_i^{-1})$

Por la ecuación de estado de Van Der Walls sabemos que:

$$\left(P + \frac{na}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (n = 1)$$

$$\Rightarrow \quad P + \frac{na}{V^2} = \frac{RT}{V-b} \qquad \therefore \quad P = \frac{RT}{V-b} - \frac{1a}{V^2}$$

Por otro lado:

Sabemos que: por definición

$$W_{total} = \int P dV$$

Entonces a presión constante:

$$W_{total} = P\int_{V_i}^{V_f} dV$$

Luego. (reemplazando) $W_{total} = \left(\dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}\right)\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} dV$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V-b}\,dV - a\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V^2}\,dV$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\ln(V-b)\Big|_{V_i}^{V_f} + \frac{a}{V}\Big|_{V_i}^{V_f}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\ln(V_f - b) - RT\ln(V_i - b) + \frac{a}{V_f} - \frac{a}{V_i}$$

$$\therefore \quad W_{total} = RT\ln\left[\frac{V_f - b}{V_i - b}\right] + a(V_f^{-1} - V_i^{-1}) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

53. Una mezcla de dos gases será esparcida por un filtro a tasas proporcionales a sus velocidades rms. Si las moléculas de los dos gases tienen masas m_1 y m_2, muestre que la razón de sus velocidades rms (o la razón de sus tasas de difusión) es

$$\frac{v_{1\,(rms)}}{v_{2\,(rms)}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Resolución :

Por demostrar que: $\dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$

Sea: $n_1 = n_2$ entonces:

$$(v_1)\,rms = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}} \quad y \quad v_2\,(rms) = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}}$$

Como: $\dfrac{m}{M} = n$

Entonces: $\dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{3RT \times n_1}{m_1}}{\dfrac{3RT \times n_2}{m_2}}} \quad \therefore \quad \dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$ l.q.q.d.

54. Un cilindro que contiene n moles de un gas ideal experimenta un proceso adiabático reversible. a) Partiendo de la expresión $W = \int P\,dV$ y utilizando PV^γ = constante, demuestre que el trabajo realizado es

$$W = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)(P_iV_i - P_fV_f)$$

b) A partir de la ecuación de la primera ley en forma diferencial pruebe que el trabajo realizado también igual a $nC_V(T_i - T_f)$. Demuestre que este resultado es consistente con la ecuación del inciso a).

Resolución :

Por demostrar que: $W = \left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)(P_iV_i - P_fV_f)$

Sabemos que: $W = \int P\,dV$

Además: $P.V^\gamma = cte$

Sabemos que: $W = \displaystyle\int \frac{cte}{V^\gamma}\,.\,dV$

$$\Rightarrow \quad W = cte\int \frac{1}{V^\gamma}dV = P_1V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma}\,dV$$

$$\Rightarrow \quad W = P_1V_1^\gamma \times V^{1-\gamma}\Big|_{V_1=V_i}^{V_2=V_f}$$

$$\therefore \quad W = \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)(P_i V_i - P_f V_f) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Sabemos que: $P.V^{\gamma} = cte$

Además: $PV = nRT \Rightarrow T = \dfrac{PV}{nR}$

En un proceso adiabático reversible se cumple que: $dQ = 0$

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = dQ - dW = 0 - dW$$

Como: $dU = nC_v \,.\, dT$

$$\Rightarrow \quad dW = -nC_v \, dT$$

$$\therefore \quad W_{total} = nC_v\,(T_i - T_f) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

55. Veinte partículas cada una de masa *m* y confinada a un volumen *v*, tienen las si-guientes velocidades: dos tienen velocidad *v*, tres, 2*v*, cinco, 3*v*, cuatro, 4*v*, tres, 5*v*, dos, 6*v*, una, 7*v*. Encuentre a) la velocidad promedio, b) velocidad rms, c) la veloci-dad más probable, d) la presión que ejercen sobre las paredes del recipiente, y e) la energía cinética promedio por partícula.

Resolución :

Parte (a) $v_{promedio} = \dfrac{2(v)+3(2v)+5(3v)+4(4v)+3(5v)+2(6v)+1(7v)}{20}$

$$\therefore \quad v_{promedio} = 3{,}65 \text{ v}$$

Parte (b) $E_{K\,total} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}m(2v)^2\right) + 5\left(\frac{1}{2}m(3v)^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}m(4v)^2\right)$

$$+\ 3\left(\frac{1}{2}m(5v)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(6v)^2\right) + \frac{1}{2}m(7v)^2$$

$$\therefore \quad E_{K\,total} = 159{,}5 \text{ m.v}^2$$

Por otro lado sabemos que: $E_{total} = N \times \frac{1}{2}\,mv^2$

$$\Rightarrow \quad 20 \times \frac{1}{2}\,mv^2 = 159{,}5\,mv^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{159{,}5}{10} \times v^2} \qquad \therefore \quad v_{rms} = 3{,}99 \text{ v m/s}$$

Parte (c)

Como la mayor cantidad de partículas que ocupan un volumen "V" es de "5", enton-ces la velocidad más probable es de 3,00 v

Parte (d)

Sabemos que: $P_{total} = \frac{2}{3} \times \frac{N}{v} \times E_{K\,prom/mol} \Rightarrow P_{total} = \frac{2}{3} \times \frac{N}{V} \times (2\,mv^2)$

$$\Rightarrow \quad P_{total} = \frac{2}{3} \times \frac{(20)}{V} \times (2\,mv^2)$$

$$\therefore \quad P_{total} = 27\, m\bar{v}^2/V$$

Parte (e) $E_{K\,(partícula)} = \frac{1}{2}\,mv^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,(partícula)} = \frac{1}{2}\,m\left(\sqrt{\frac{159{,}5 \times v^2}{10}}\right)$$

$$\therefore \quad E_{K\,(partícula)} = 2\,m\,v^2$$

56. Un recipiente contiene $1{,}00 \times 10^4$ moléculas de oxígeno a 500 K. a) Elabore una gráfica exacta de la función de distribución de velocidades de Maxwell contra la velocidad con puntos en intervalos de velocidad de 100 m/s. b) A partir de esta gráfica, encuentre la velocidad más probable. c) Calcule las velocidades promedio y rms para las moléculas y marque estos puntos sobre su gráfica. d) Según esta gráfica, estime la fracción de moléculas con velocidades en el intervalo de 300 m/s a 600 m/s.

Resolución :

Datos: $N = 1{,}00 \times 10^4$ moléculas ; $T = 500$ K ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

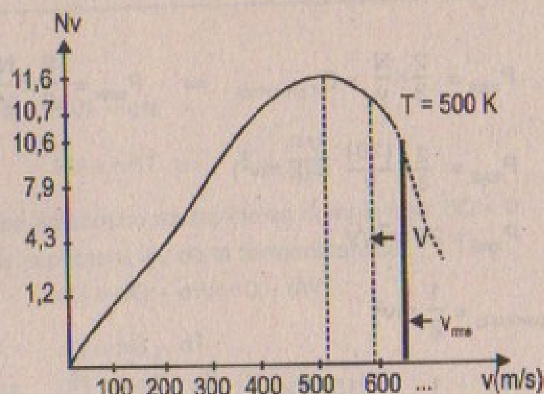
Parte (a)

Sabemos que: $N_V = 4\pi.N\left(\dfrac{m}{2\pi\, k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$

Por otro lado: Masa de O_2 = 32 umas = $32 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg

Tabulando:

v = 100 m/s	N_V = 1,2 moléc /m.s^{-1}
v = 200 m/s	N_V = 4,3 moléc /m.s^{-1}
v = 300 m/s	N_V = 7,9 moléc /m.s^{-1}
v = 400 m/s	N_V = 10,6 moléc /m.s^{-1}
v = 500 m/s	N_V = 11,6 moléc /m.s^{-1}
v = 600 m/s	N_V = 10,7 moléc /m.s^{-1}



Parte (b)

Por la ley de distribución de Maxwell:

$$\frac{dNv}{dV} = v_{mp} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{mp} = 1{,}41 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

Luego: $$v_{mp} = 1{,}41 \times \sqrt{\frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times 500}{5{,}9 \times 10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v_{mp} = 508{,}7 \text{ m/s}$$

Parte (c)

Por la ley de distribución de Maxwell:

$$v_{rms} = 1{,}73 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad v_{rms} = 1{,}73 \times \sqrt{\frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times 500}{5{,}3 \times 10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v_{rms} = 624{,}2 \text{ m/s}$$

Por otro lado: $$v = 1{,}60 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad \Rightarrow \quad v = 1{,}60 \times \sqrt{\frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times (500)}{5{,}3 \times 10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v = 577{,}3 \text{ m/s}$$

57. Un metro cúbico de hidrógeno atómico a 0°C y presión atmosférica contiene aproximadamente $2{,}7 \times 10^{25}$ átomos. El primer estado excitado del átomo de hidrógeno tiene una energía de 10,2 eV arriba del nivel más bajo de energía llamado el estado base. Con el factor de Boltzmann encuentre el número de átomos en el primer estado excitado a 0°C y a 10 000°C.

Resolución :

Datos: $V_{H_2} = 1 \text{ m}^3$; $T = 0°C \equiv 273 \text{ K}$

$P = 1{,}00 \text{ atm} \equiv 1{,}013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

$N = 2{,}7 \times 10^{25}$ átomos

$1 \text{ eV} = 1{,}60 \times 10^{-19} \text{ J}$

Por dato: E_2 (arriba) – E_1 (base) = 10,2 eV

Por Boltzman: $$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B . T}$$

$$\Rightarrow \quad n(E_2) = 2{,}7 \times 10^{25} \times e^{-\frac{(10{,}2)(1{,}6 \times 10^{-19})}{(273)(1{,}38 \times 10^{-23})}}$$

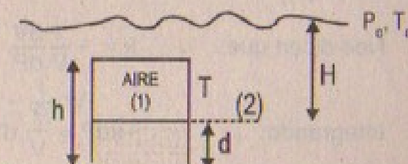
$$\therefore \quad n(E_2) = 0 \ \text{ a } \ 0°C$$

58. En un día en el cual la presión atmosférica es 1,00 atm y la temperatura es 20,0°C, una campana de buceo en forma de un cilindro de 4,0 m de altura, cerrada en el extremo superior, se sumerge en el agua para auxiliar en la construcción del cimiento subterráneo de una torre de un puente. El nivel del agua dentro de la campana asciende hasta 1,5 m de la parte superior, y la temperatura disminuye a 8,0°C. a) Determine la presión del aire dentro de la campana. b) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua se encuentra la campana? (En el uso real, se bombea aire dentro de la campana forzando el agua a salir con el fin de que haya más espacio para los trabajadores de la construcción).

58A. En un día en el cual la presión atmosférica es P_0 y la temperatura es T_0, una campana de buceo en forma de cilindro de altura h, cerrada en el extremo superior, se sumerge en el agua para auxiliar en la construcción del cimiento subterráneo de una torre de un puente. El agua dentro de la campana asciende hasta una distancia $d < h$ de la parte superior, y la temperatura disminuye a T. a) Determine la presión del aire dentro de la campana. b) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua se encuentra la campana?

Resolución :

Parte (a)



$$P_{aire} = P_0 \, e^{-M_{aire} . g \, (h-d)/k_B T}$$

(Ley de las atmósferas)

$$\therefore \quad P_{aire} = P_0 \, e^{-mgh/k_B T} \, . \, e^{mgd/k_B . T}$$

Parte (b)

Por el principio de la Hidrostática: $P_{(1)} = P_{(2)}$

$$\Rightarrow \quad P_{aire} = P_{(2)} = P_o e^{-m_{H_2O} gH/k_B . T_o}$$

$$\Rightarrow \quad P_o e^{-\frac{m_A g (h-d)}{k_B . T}} = P_o e^{-\frac{m_{H_2O} gH}{k_B . T_o}}$$

$$\therefore \quad H = \frac{T_o}{T} \times \frac{m_{aire}}{m_{H_2O}} \times (h-d)$$

En consecuencia:

La campana se encontrará a: $\quad H - (h-d) = h - d \left(\frac{T_o}{T} \times \frac{m_{aire}}{m_{H_2O}} - 1 \right)$

59. El oxígeno a presiones muy arriba de 1 atm se vuelve tóxico para las células del pulmón. ¿Qué proporción, en peso, entre el gas helio (He) y el oxígeno (O_2) debe usar un buzo que va a descender a una profundidad de 50,0 m en el océano?

Datos incorrectos

60. La compresibilidad, *k*, de una sustancia se define como el cambio fraccionario en el volumen de esa sustancia para un cambio de presión determinado:

$$k = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

a) Explique por qué el signo negativo de esta expresión asegura que k siempre será positiva. b) Muestre que si un gas ideal se comprime isotérmicamente, su compresibilidad está dada por $k_1 = 1/P$. c) Muestre que si un gas ideal se comprime adiabáticamente, su compresibilidad está dada por $k_2 = 1/\gamma P$. d) Determine valores para k_1 y k_2 para un gas monoatómico ideal a una presión de 2,00 atm.

Resolución :

Parte (a)

Nos dicen que: $\quad k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$

Integrando: $\quad -kdP = \frac{1}{V} dV \quad \Rightarrow \quad -k\int dP = \int \frac{1}{V} dV$

$$\therefore \quad -kP \Big|_{P_i}^{P_f} = \ln(V) \Big|_{V_i}^{V_f}$$

entonces: $\quad k = \dfrac{\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}{P_i - P_f}$

Sabemos que: $\quad P \frac{1}{\alpha} V$ (debido a que PV = nRT)

Entonces si: $\quad V_f > V_i \quad \Rightarrow \quad \ln(V_f/V_i) > 0$

Luego: $\quad P_i - P_f = \frac{cte}{V_i} - \frac{cte}{V_f} = \frac{(V_f - V_i)\,cte}{V_f V_i} > 0$

En consecuencia: $\quad k = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dP} > 0 \quad$ l.q.q.d.

Parte (b)

Por dato: $\quad PV = cte \quad ... (\alpha)$

Por demostrar que: $\quad k_1 = \frac{1}{P}$

Derivando (α): $\quad dPV + PdV = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{P}.dP = -\frac{1}{V}dV$

como: $\quad k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dP}\right)$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{P} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

Por condición: $\quad P.V^{\gamma} = cte \quad ... (\beta)$

Por demostrar que: $\quad k_2 = \frac{1}{\gamma P}$

Derivando (β): $\quad V^{\gamma}.d\gamma + P\gamma dV^{\gamma} = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{P\gamma}dP = -\frac{dV^{\gamma}}{V^{\gamma}} = -\frac{1}{V}dV$$

Como: $\quad k_2 = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$

$$\Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{dP} \times \left(-\frac{1}{V} dV\right) = \frac{1}{dP} \times \left(+\frac{1}{P.\gamma} dP\right)$$

$$\therefore \quad k_2 = \frac{1}{\gamma P} \qquad \text{l.q.q.d}$$

Parte (d)

para: P = 2,00 atm ; $\gamma_{monoatómico} = 1,67$

Entonces: $k_1 = \dfrac{1}{2,00 \text{ atm}} = 0,5 \text{ atm}^{-1} \equiv 0,49 \times 10^{-5} \dfrac{m^2}{N}$

$$k_2 = \frac{1}{(1,67)(2,00 \text{ atm})} = 0,3 \text{ atm}^{-1} \equiv 0,3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$$

61. Un mol de gas que obedece la ecuación de estado de Van der Walls se comprime isotérmicamente. A cierta temperatura crítica, T_c, la isoterma tiene un punto de pendiente cero, como en la figura 21.17. Es decir, en $T = T_c$,

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$$

Empleando la ecuación 21.32 y estas condiciones, muestre que en el punto crítico, $P_c = a/27b^2$, $V_c = 3b$, y $T_c = 8a/27\,Rb$.

Resolución :

Datos: n = 1,00 mol ; T = cte

Por dato: $\dfrac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$

Por la ecuación de Van Der Walls:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT = \text{cte (isoterma)}$$

$$\therefore \quad P = \frac{\text{cte}}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}$$

Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\text{cte}}{V-b}\right) - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{a}{V^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{\text{cte}}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \qquad \therefore \quad \frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Por otro lado: $\dfrac{\partial}{\partial V}\left[\dfrac{\partial P}{\partial V}\right] = \dfrac{\partial}{\partial V}\left[\dfrac{\partial\, \text{cte}}{V-b}\right] - \dfrac{\partial}{\partial V}\left[\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{a}{V^2}\right)\right] = 0$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{-\text{cte}}{(V-b)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{2a}{V^3}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{RT}{(V-b)^3} = \frac{3a}{V^4} \quad \ldots (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) resulta que: $\boxed{V_c = 3b}$ l.q.q.d.

Reemplazando (α) y (β) en la ecuación de estado resulta que:

$$P_c = \frac{\text{cte}}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{2a}{V^3}(V-b) - \frac{a}{V^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_c = \frac{a}{27\,b^2}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Por último: reemplazando (α) y (β) en la ecuación de estado resulta que:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{27\,b^2} + \underbrace{\frac{a}{V^2}}_{9b^2}(3b - b) = RT_c$$

$$\therefore \quad T_c = \frac{8a}{27Rb} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

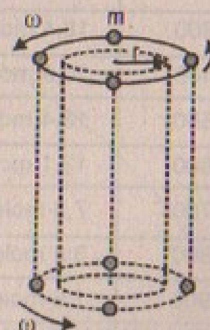
62. Considere las partículas en una centrífuga de gas, un dispositivo con el cual se separan partículas de diferentes masas haciéndolas girar en una trayectoria circular de radio r a una velocidad angular ω. La fuerza central que actúa sobre una partícula es $mr\omega^2$. a) Analice cómo puede emplearse una centrífuga de gas para separar partículas de diferente masa. b) Muestre que la densidad de las partículas como una función de r es

$$n(r) = n_0\, e^{-m\, r^2 \omega^2 / 2\, k_B T}$$

Resolución :

Parte (a)

Se podría utilizar manteniéndolas enlazadas unas a otras y haciéndolas girar a un eje fijo.



Parte (b)

Por la ley de las atmósferas:

$$n(y) = n_o\, e^{-\frac{mgY}{k_B T}} \Rightarrow n(r) = n_o e^{-\frac{mg(r)}{k_B T}} = n_o e^{-\frac{E_{total}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow n(r) = n_o e^{-\frac{E_{rotac}}{k_B . T}}$$

$$\therefore \quad n(r) = n_o e^{-\frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2 / k_B . T} = n_o e^{-\frac{m r^2 . \omega^2}{2 k_B . T}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

63. Considere un sistema de 1,00 × 10^4 moléculas de oxígeno a una temperatura T. Escribe un programa con el que pueda calcular la función de distribución de Maxwell N_v como una función de la velocidad de las moléculas y la temperatura. Con su programa evalúe N_v para velocidad que varían de $v = 0$ a $v = 2\ 000$ m/s (en intervalos de 100 m/s) a temperaturas de a) 300 K, y b) 1 000 K. c) Elabore gráficas de sus resultados (N_v contra v) y con la gráfica en $T = 1\ 000$ K calcule el número de moléculas que tienen velocidades entre 800 m/s y 1 000 m/s en $T = 1\ 000$ K.

Resolución :

Parte (a)

Datos: $N = 1{,}00 \times 10^4$ moléculas de O_2 ; masa de $O_2 = 5{,}3 \times 10^{-26}$ kg

$T = 300$ K ; $v = 0$ m/s $\wedge$ $v = 2\ 000$ m/s (intervalos de 100 m/s)

$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Sabemos que: $N_v = 4\pi N \left(\dfrac{m}{2\pi k_B . T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B . T}$

v(m/s)	N_v (moléc/m/s)
0	0
100	3,4 moléc/m/s
200	11,3 moléc/m/s
300	18,4 moléc/m.s^{-1}
400	20,9 moléc/m.s^{-1}
500	18,4 moléc/m.s^{-1}
600	13,1 moléc/m.s^{-1}
700	7,8 moléc/m.s^{-1}
800	3,9 moléc/m.s^{-1}
900	1,6 moléc/m.s^{-1}

1000	0,6 moléc/m.s^{-1}
1100	0,2 moléc/m.s^{-1}
1200	0,05 moléc/m.s^{-1}
1300	0,01 moléc/m.s^{-1}
1400	tiende a cero
1500	" " "
1600	" " "
1700	" " "
1800	" " "
1900	" " "
2000	" " "

Parte (b)

A $T = 1\ 000$ K $m_{O_2} = 5{,}3 \times 10^{-26}$ kg

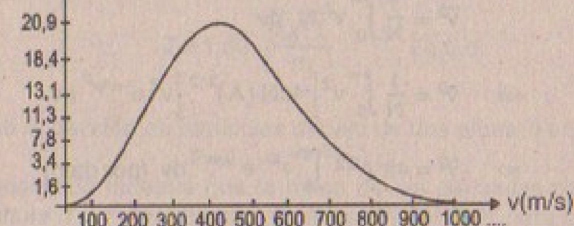
Sabemos que: $N_v = 4\pi N\left(\dfrac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m.v^2}{2k_B.T}}$

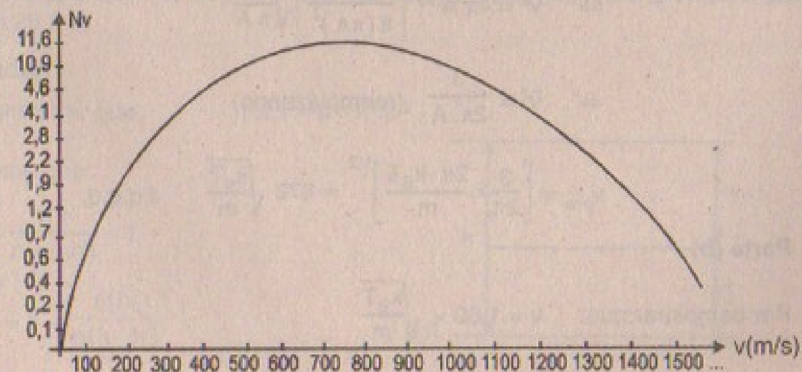
v(m/s)	N_v(moléc/m/s^{-1})
0	0 moléc/m.s^{-1}
100	0,6 moléc/m.s^{-1}
200	2,2 moléc/m.s^{-1}
300	4,6 moléc/m.s^{-1}
400	7,1 moléc/m.s^{-1}
500	9,3 moléc/m.s^{-1}
600	10,9 moléc/m.s^{-1}
700	11,6 moléc/m.s^{-1}
800	11,4 moléc/m.s^{-1}
900	10,4 moléc/m.s^{-1}

1 000	8,9 moléc/m.s^{-1}
1 100	7,3 moléc/m.s^{-1}
1 200	5,6 moléc/m.s^{-1}
1 300	4,1 moléc/m.s^{-1}
1 400	2,8 moléc/m.s^{-1}
1 500	1,9 moléc/m.s^{-1}
1 600	1,2 moléc/m.s^{-1}
1 700	0,7 moléc/m.s^{-1}
1 800	0,4 moléc/m.s^{-1}
1 900	0,2 moléc/m.s^{-1}
2 000	0,1 moléc/m.s^{-1}

Parte (c)

Moléculas/M.s^{-1}





64. Verifique las ecuaciones 21.27 y 21.28 para las velocidades rms y promedio de las moléculas de un gas a una temperatura T. Observe que el valor promedio de v^n es

$\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^n\, N v dv$ y use las integrales

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} \qquad \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Resolución :

Datos: $\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} \qquad \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Parte (a)

Por demostrar que: $\overline{v}_{rms} = 1{,}73 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

De la condición: $\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^n N_v\, dv$

Entonces, como: $N_v = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

Sea: $\frac{m}{2\pi k_B T} = A$ (artificio)

Luego: $\overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^2 . N_v\, dv$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^2\left[4\pi N (A)^{3/2}\right] v^2 e^{-\pi A v^2} dv$$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = 4\pi\, A^{3/2}\int_0^{\infty} v^4 . e^{-\pi A v^2} . dv \text{ (por dato)}$$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = 4\pi\, A^{3/2}\left[\frac{3}{8(\pi A)^2}\right]\sqrt{\frac{\pi}{\pi A}}$$

$$\Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3}{2\pi . A} \text{ (reemplazando)}$$

$$\therefore\ v_{rms} = \left[\frac{3}{2\pi}\times\frac{2\pi . k_B T}{m}\right]^{1/2} = 1{,}73\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $v = 1{,}60 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

De la condición: $\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^n N_v\, dv$

Entonces, como: $N_v = 4\pi . N\left(\frac{m}{2\pi\, k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

Sea: $\frac{m}{2\pi k_B T} = B$ (artificio)

Luego: $\overline{v} = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} v\, N_v\, dv$

$$\Rightarrow \overline{v} = \frac{1}{N} . \int_0^{\infty} v\left[4\pi N (B)^{3/2}\right] v^2 . e^{-\pi B v^2} dv$$

$$\Rightarrow \overline{v} = \frac{1}{N}(4\pi N) B^{3/2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\pi B v^2} dv \text{ (por dato)}$$

$$\Rightarrow \overline{v} = 4\pi B^{3/2}\times\left[\frac{1}{2\pi^2 . B^2}\right]$$

$$\Rightarrow \overline{v} = \frac{2}{\pi\times B^{1/2}} \text{ (reemplazando)}$$

$$\Rightarrow \overline{v} = \frac{2}{\pi}\times\sqrt{\frac{2\pi\, k_B . T}{m}} = \frac{2}{\pi}\times\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{k_B . T}{m}}\right)$$

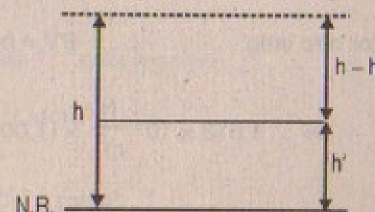
$$\therefore\ \overline{v} = 1{,}60\sqrt{\frac{k_B . T}{m}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

65. a) Muestre que la fracción de partículas debajo de una altura h en la atmósfera es $f = 1 - e^{-mgh/k_BT}$

b) Con este resultado muestre que la mitad de las partículas se encuentran por debajo de la altura $h' = k_B T \ln(2)/mg$. ¿Cuál es el valor de h' para la Tierra? (Suponga una temperatura de 270 K y recuerda que la masa molecular promedio para el aire es 28,8 u).

Resolución :

Por demostrar que: $f = 1 - e^{-mgh/k_B.T}$



Sabemos que:

$$\frac{n(h)}{n(h')} + \frac{n(h)}{n(h-h')} = 1$$

$$\Rightarrow f = 1 - \frac{n(h)}{n(h-h')}$$

$$\Rightarrow \quad f = 1 - \frac{n_o e^{-mgh/k_B.T}}{n_o e^{-g(h-h')/k_B.T}} \qquad \Rightarrow \quad f = 1 - \frac{e^{-\frac{mgh}{k_B.T}}}{e^{-mgh/k_BT}.\, e^{mgh'/k_BT}}$$

Entonces: $f = 1 - e^{-mgh'/k_B.T}$

En particular: $h = h'$

$\therefore \quad f = 1 - e^{-mgh'/k_B.T}$ l.q.q.d.

Parte (b)

De la condición: $1 - e^{-mgh'/k_B.T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-mgh'/k_B.T}$

$$\Rightarrow \quad \ln(1) = \ln(2) - \frac{mgh'}{k_BT}$$

$$\therefore \quad h' = \frac{k_B.T \times \ln(2)}{mg} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Si: $T = 270$ K ; masa del aire $= 4{,}78 \times 10^{-26}$ kg ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Entonces: $h' = \frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times \ln(2)}{4{,}78 \times 10^{-26} \times 9{,}8} \quad \therefore \quad h' = 5{,}47$ km

66. En volumen, el aire se compone aproximadamente de 78% de nitrógeno (N_2), 21% de oxígeno (O_2) y 1% de otros gases. Ignore el 1% de otros gases y a) con esta información encuentre la masa de un metro cúbico de aire en condiciones estándar (1,00 atm, 0,0°C). b) Dado este resultado, calcule la fuerza de elevación sobre un globo lleno de helio con un volumen de 1,00 m³ a una presión de 1,00 atm. c) Muestre que un globo lleno de helio tiene 92,6% de la fuerza de elevación de un globo similar lleno de hidrógeno.

Resolución :

Datos: Aire = 78% N_2 + 21% O_2 + 1% (otros)

Parte (a)

$V = 1{,}00$ m³ ; $P = 1{,}00$ atm $T = 0°C \equiv 273$ K

$$\overline{M}_{aire} = 0{,}78\,\overline{M}_{N_2} + 0{,}21\,M_{O_2} = 0{,}78\left(28 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{mol}\right) + 0{,}21\left(36 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{mol}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{M}_{aire} = 29{,}4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

Por otro lado: $PV = nRT = \frac{m_{aire}}{M_{aire}} \times R \times T$

$$\Rightarrow \quad 1{,}013 \times 10^5\,\frac{N}{m^2} \times (1{,}00\,m^3) = \frac{\text{masa aire}}{29{,}4 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{mol}} \times 8{,}31\,\frac{J}{mol.K} \times 273\text{ K}$$

$\therefore$ masa aire = 1,3 kg

Parte (b) $F_{elevación\ aire} = \text{Masa aire} \,.\, g \quad \Rightarrow \quad F_{elev/aire} = 1{,}3 \times (9{,}8)$

$\therefore \quad F_{aire} = 12{,}74$ N

Parte (c)

Si la $F_{elev\ aire/helio} = 12{,}74$ N —— 100%

$F_{elev\ aire/hidrógeno} = 0{,}88$ N —— x

Sabemos que: $F_{elev\ aire/hidrógeno} = \rho_{hidrógeno} \,.\, g \,.\, V$

$= 8{,}99 \times 10^{-2} \times (9{,}8)(1) = 0{,}88$ N

$\therefore \quad x = 7{,}4\%$

En consecuencia: $F_{helio} = 92{,}6\%\ F_{hidrógeno}$

67. Hay aproximadamente 10^{59} neutrones y protones en una estrella promedio y casi 10^{11} estrellas en una galaxia ordinaria. Las galaxias tienden a formarse en cúmulos de (en promedio) casi 10^3 galaxias, y hay más o menos 10^9 cúmulos en la parte conocida del universo. a) De manera aproximada, ¿cuántos neutrones y protones hay en el universo conocido? b) Suponga que toda esta materia estuviera comprimida en una esfera de materia nuclear de modo que cada partícula nuclear ocupara un volumen de 10^{-45} m³ (casi el "volumen" de un neutrón o protón). ¿Cuál sería el radio de esta esfera de materia nuclear? c) ¿Cuántos moles de partículas nucleares hay en el universo observable?

Resolución :

Datos: Hay: 10^{50} (n° + p°) en una estrella (en promedio)

10^{11} estrellas en una galaxia (en promedio)

10^9 cúmulos en todo el universo (en promedio)

Parte (a)

En una galaxia hay aproximadamente 10^{61} (n° + P)

En parte conocida del universo hay aproximadamente 10^{21} galaxias

Entonces:

1 galaxia —— 10^{61} (n + p) Aprox.

10^{21} —— x

$\therefore \quad x = 10^{82}$ (n + p) aproximadamente

Parte (b)

Sabemos que: $n_{n+p} = 10^{82}$

Además por dato: $V_n + V_p = 10^{-45}$ m³

Entonces: $n_{(n+p)} \times V_{(n+p)} = V_{total} = V_{esfera\ comprimida}$

$$\Rightarrow \quad 10^{82} + 10^{-45} = \frac{4}{3}\pi \times \text{radio}^3$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3{,}1416}\right) \times 10^{37} = \text{radio}^3$$

$\therefore$ Radio de la esfera de materia nuclear $= 1{,}3 \times 10^{12} \approx 10^{12}$ m

Parte (c)

Sabemos que: $N = n \times N_A$

$\Rightarrow \quad 10^{82} = n\,(6{,}023 \times 10^{29})$

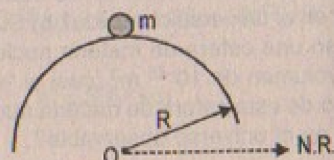
$\therefore \quad n_{moles} = 10^{58}$ moles de partículas

68. a) Si tiene suficiente energía cinética, ¿una molécula en la superficie de la Tierra puede escapar de la gravitación terrestre. Utilizando la conservación de la energía, demuestre que la energía cinética mínima necesaria para escapar es *mgR*, donde *m* es la masa de la molécula, *g* es la aceleración en la caída libre de la superficie, y *R* es el radio de la Tierra. b) Calcule la temperatura a la cual la energía cinética de escape mínima sea igual a diez veces la energía cinética promedio de una molécula de oxígeno.

Resolución:

Parte (a)

Por la conservación de la energía:



$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$U_{P\,inicial} = E_{K\,final}$

$\Rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2} m v^2_{esc} = E_{K\,mínima}$

$\therefore \quad E_{K\,mínima} = mgR$

Parte (b)

Sabemos que: $E_{K\,molécula} = \frac{3}{2} k_B T$

Por dato: $E_{K\,mínima} = 10\, E_{K\,molécula}$

$\Rightarrow \quad mgR = 10\left(\frac{3}{2} k_B T\right) \qquad \therefore \quad T = \frac{mgR}{15 k_B}$

69. Mediante el empleo de rayos láser múltiples, los físicos han sido capaces de enfriar átomos de sodio y confinarlos en una pequeña región. En un experimento la temperatura de los átomos se redujo a $2{,}4 \times 10^{-4}$ K. a) Determine la velocidad rms de los átomos de sodio a esta temperatura. Los átomos pueden confinarse por alrededor de 1,0 s. La trampa tiene una dimensión lineal cercana a 1,0 cm. b) Aproximadamente ¿cuánto tardaría un átomo en escapar de la región donde quedan atrapados si no hubiera el efecto de confinamiento?

Resolución:

Parte (a)

$T = 2{,}4 \times 10^{-4}$ K; masa del sodio = 23 umas ; 1 UM = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg

Sabemos que: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{(3)(1{,}38\times10^{-23})(2{,}4\times10^{-4})}{(23)(1{,}66\times10^{-27})}}$

$\therefore \quad v_{rms(Na)} = 0{,}510$ m/s

Parte (b)

$v \times t = L$

$\Rightarrow \quad 0{,}510$ m/s $\times\, t = 0{,}01$ m

$\therefore \quad t = 19{,}6 \times 10^{-3} \approx 20$ ms

70. Para un gas maxwelliano, utilice una computadora o una calculadora programable para encontrar el valor numérico de la razón $(N_v(v) / N_v(v_{mp}))$ para los siguientes valores de *v*: $v = (v_{mp}/50)$, $(v_{mp}/10)$, $(v_{mp}/2)$, $2v_{mp}$, $10v_{mp}$, $50v_{mp}$. Proporcione sus resultados hasta tres cifras significativas.

Resolución:

En este problema se debe utilizar una calculadora tipo "HP" para poder hallar los resultado más rápidos mediante la función de distribución de Maxwell.

Capítulo 22

MÁQUINAS TÉRMICAS Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

1. Una máquina térmica absorbe 360 J de energía térmica y realiza 25 J de trabajo en cada ciclo. Encuentre a) la eficiencia de la máquina y b) la energía térmica liberada en cada ciclo.

Resolución :

Parte (a) Eficiencia $= e = \dfrac{W_{neto}}{Q_{entra}}$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{25\ J}{360\ J} = 0{,}069 \text{ ó } 6{,}9\%$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad e = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{Q_{entra}} \Rightarrow \quad 0{,}069 = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{360}$

$$\therefore \quad |Q_{sale}| = 335\ J$$

2. Una máquina térmica efectúa 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30% . En cada ciclo, ¿cuánta energía térmica se a) absorbe y b) libera?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\quad e = \dfrac{W_{neto}}{Q_{entra}} \Rightarrow \quad 30\% = 0{,}3 = \dfrac{200\ J}{Q_{entra}}$

$$\therefore \quad Q_{entra} = 666{,}7\ J$$

Parte (b)

Por otro lado: $\quad e = 1 - \dfrac{Q_{sale}}{666{,}7} \quad \Rightarrow \quad 0{,}3 = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{666{,}7}$

$$\therefore \quad |Q_{libera\ o\ sale}| = 466{,}7\ J$$

3. El calor que absorbe una máquina es tres veces mayor que el trabajo que realiza a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? b) ¿Qué fracción del calor absorbido es liberado hacia el deposito frío?

Resolución :

Parte (a)

Por dato: $Q_{absorbe} = 1/3\ W_{realiza}$

Entonces: $e = \dfrac{W_{realiza}}{Q_{absorbe}} = \dfrac{1}{3} = 33{,}3\%$

Parte (b)

Sabemos que: $e = 1 - \dfrac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}}$

$$\therefore \quad \frac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}} = \frac{2}{3}$$

4. Determine el cambio en la energía interna de un sistema que a) absorbe 500 cal de energía térmica mientras efectúa 800 J de trabajo externo, b) absorbe 500 cal de energía térmica mientras 500 J de trabajo externo se efectúan sobre el sistema, y c) se mantiene a un volumen constante mientras se extraen 1 000 cal del sistema.

Resolución :

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 500\ \text{cal} \times \left(\frac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) - 800\ \text{J}$$

$$\therefore \quad \Delta U = 1\ 293\ \text{J}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 500\ \text{cal} \times \left(\frac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) - 500\ \text{J}$$

$$\therefore \quad \Delta U = 1\ 593\ \text{J}$$

Parte (c)

A volumen constante

Entonces: $\Delta U = Q - 0 = 1\ 000\ \text{cal}\left(\dfrac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) = 4\ 186\ \text{J}$

5. Un gas ideal se comprime a la mitad de su volumen original mientras su temperatura se mantiene constante. a) Si 1 000 J de energía se extraen del gas durante la compresión, ¿cuánto trabajo se realiza sobre el gas? b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas durante la compresión?

Resolución :

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W \quad$ (a T = cte)

$\Rightarrow \quad 0 = Q - W \quad \therefore \quad Q = W = 1\ 000\ \text{J} = 1{,}00\ \text{kJ}$

Parte (b)

Por la primera ley $\Delta U = 0$

6. Una máquina particular tiene una salida de potencia de 5,0 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8 000 J de energía térmica en cada ciclo, encuentre a) el calor absorbido en cada ciclo, y b) el tiempo para cada ciclo.

Resolución :

Datos: Potencia de salida = 5,0 kW ; $|Q_{libera}| = 8\ 000$ J

Eficiencia = 25%

Parte (a)

Sabemos que: Eficiencia $= \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbido}}$

$$\Rightarrow \quad e = 0{,}25 = \frac{Q_{abs.} - Q_{libera}}{Q_{absorbido}} = 1 - \frac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbido}}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido/ciclo} = \frac{8\ 000}{0{,}75} = 10{,}7\ \text{kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que: Potencia $= \dfrac{W_{neto}}{\text{segundo}} = \dfrac{Q_{absorbido} - Q_{libera}}{\text{tiempo}}$

$$\Rightarrow \quad 5{,}0 \times 10^3 = \frac{10{,}7 \times 10^3 - 8 \times 10^3}{t}$$

$$\therefore \quad \text{tiempo/ciclo} = 0{,}54\ \text{s}$$

7. Una máquina absorbe 1 600 J de un depósito caliente y expulsa 1 000 J hacia un depósito frío en cada ciclo. a) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina? b) ¿Cuánto trabajo se efectúa en cada ciclo? c) ¿Cuál es la salida de potencia de la máquina si cada ciclo dura 0,30 s?

Resolución:

Parte (a) $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbido}}$

$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{-1\,000\text{ J}}{1\,600\text{ J}}$ (por dato)

$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}375$ ó $37{,}5\%$

Parte (b)

$W_{neto} = Q_{absorbido} - |Q_{libera}| \quad \Rightarrow \quad W_{neto} = 1\,600 - 1\,000 = 600\text{ J} = 0{,}6\text{ kJ}$

Parte (c)

En un tiempo: 0,30 s

$\text{Potencia} = \dfrac{W_{neto}}{t} = \dfrac{600\text{ J}}{0{,}30} \quad \therefore \quad \text{Potencia} = 2\text{ kW}$

LA MÁQUINA DE CARNOT

8. Una máquina térmica opera entre dos depósitos a 20°C y 300°C. ¿Cuál es la eficiencia máxima posible para esta máquina?

Resolución:

Datos: $T_f = 20°C = 293\text{ K}$

$T_c = 300°C = 573\text{ K}$

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{293\text{ K}}{573\text{ K}}$

$\therefore \quad e = 0{,}49$ ó 49%

9. Una central eléctrica trabaja con una eficiencia de 32% durante el verano, cuando el agua de mar para enfriamiento está a 20°C. La planta utiliza vapor a 350°C para accionar las turbinas. Suponiendo que la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal, ¿Cuál es la eficiencia de la planta en el invierno cuando el agua de mar se encuentra a 10°C?

Resolución:

Datos: $T_{verano} = 20°C \equiv 293\text{ K}$; $T_c = 350°C \equiv 623\text{ K}$

$T_{invierno} = 10°C \equiv 283\text{ K}$; Eficiencia planta (invierno) = ?

$T_{\text{eficiencia de la planta (verano)}} = 0{,}32$

Por condición: $\dfrac{\text{eficiencia de la planta}}{\text{eficiencia ideal}} = k$

$\Rightarrow \quad \dfrac{0{,}32}{1 - \dfrac{293\text{K}}{623\text{K}}} = k \quad \therefore \quad k = 0{,}604$

Luego: $\dfrac{\text{Eficiencia de la planta}}{\left(1 - \dfrac{283\text{ K}}{623\text{ K}}\right)} = 0{,}604$

$\therefore$ Eficiencia de la planta en invierno $= 0{,}330$ ó 33%

10. Una máquina de Carnot tiene una salida de potencia de 150 kW. La máquina opera entre dos depósitos a 20°C y 500°C. a) ¿Cuánta energía térmica se absorbe por hora? b) ¿Cuánta energía térmica se pierde por hora?

Resolución:

Datos: Potencia = 150 kW

$T_f = 20°C$; $T_c = 500°C$

Parte (a)

Sabemos que: $150 \times 10^3\ \dfrac{\text{J}}{\text{s}} = \dfrac{W_{neto}}{t}$

Por otro lado: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{20 + 273}{500 + 273}$

$\therefore \quad e = 0{,}62$

Luego: $0{,}62 = \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbe}} = \dfrac{150 \times 10^3}{Q_{absorbe}}$ J/s

$\therefore \quad Q_{absorbe/s} = 242 \times 10^3\text{ J}$

En consecuencia:

En una hora se absorbe: 871,2 MJ (por 3 600 s)

ó 871,2 MW.h

Parte (b)

Sabemos que: $0{,}62 = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbe}} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{242 \times 10^3\text{ J/s}}$

$\Rightarrow \quad |Q_{libera/s}| = 92 \times 10^3\text{ J/s} = 92\text{ kW}$

En consecuencia:

En una hora se libera ó se pierde: 331,2 MJ (por 3600 s) ó 331,2 MW.h

11. Se ha propuesto una central eléctrica que aprovecharía el gradiente de temperatura del océano. El sistema operará entre 20°C (temperatura del agua superficial) y 5°C (temperatura del agua a una profundidad cercana a 1km). a) ¿Cuál es la eficiencia máxima de un sistema con estas características? b) Si la salida de potencia de la planta es 75 MW, ¿cuanta energía térmica se absorbe por hora? c) ¿Qué factor compensatorio hace interesante esta propuesta a pesar del valor calculado en el inciso a)?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow e = 1 - \dfrac{5{,}0°C + 273}{20°C + 273}$

$\therefore \quad e = 0{,}0512$ ó $5{,}12\%$

Parte (b)

Por dato: $\text{Potencia} = 75 \times 10^6 \dfrac{J}{s} = \dfrac{W_{neto}}{t}$

Entonces: $0{,}0512 = \dfrac{W_{neto/s}}{Q_{absorbido}} = \dfrac{75 \times 10^6 J/s}{Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido/s} = 1\,465 \text{ MJ/s} \equiv 1\,465 \text{ MW}$

En consecuencia:

En una hora se absorbe: 5,27 TJ (por 3 600 s) ó 5,274 TWh

12. Una máquina térmica opera en un ciclo de Carnot entre 80°C y 350°C. De un depósito caliente absorbe $2{,}0 \times 10^4$ J de energía térmica por ciclo. La duración de cada ciclo es de 1,0 s.a) ¿Cuál es la máxima salida de potencia de esta máquina? b) ¿Cuánta energía térmica expulsa en cada ciclo?

Resolución :

Datos: $T_f = 80°C$; $T_c = 350°C$; 1 ciclo = 1,00 s

$Q_{absorbido/ciclo} = 2{,}0 \times 10^4$ J/ciclo

Parte (a)

Sabemos que: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_C} = \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbido}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{W_{neto}}{t} = \frac{Q_{abs}}{t}\left(\frac{T_c - T_f}{T_c}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Potencia/ciclo} = 2{,}0 \times 10^4 \frac{J}{s} \times \left(\frac{623 - 353}{623}\right) = 8{,}67 \text{ kW}$$

Parte (b)

Por otro lado: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|/t}{Q_{absorbe}/t}$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{353}{623} = 1 - \frac{\dfrac{|Q_{libera}|}{t}}{2{,}0 \times 10^4 \text{ J/s}}$$

$$\therefore \quad \frac{|Q_{libera}|}{t} = 1{,}13 \times 10^4 \text{ J/s}$$

En consecuencia:

En un ciclo se libera: $1{,}13 \times 10^4$ J

13. Una de las máquinas más eficientes jamás construida (42%) opera entre 430°C y 1 870°C. a) ¿Cuál es su máxima eficiencia teórica? b) ¿Cuánta potencia entrega la máquina si absorbe $1{,}4 \times 10^5$ J de energía térmica cada segundo?

Resolución :

Parte (a) $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{[430 + 273]}{1\,870 + 273}$

$\therefore \quad e_{máxima} = 0{,}672$ ó $67{,}2\%$

Parte (b)

Sabemos que: $\text{potencia} = \dfrac{W_{neto}}{t} = e \times \dfrac{Q_{absorbido}}{t}$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = (0{,}420) \times 1{,}4 \times 10^5 \frac{J}{s}$$

$\therefore \quad \text{Potencia} = 58{,}80$ kW

14. En una turbina entra vapor a 800°C y se expulsa a 120°C. ¿Cuál es la eficiencia máxima de esta turbina?

Resolución :

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{[120+273]}{800+273}$

$\therefore$ Eficiencia = 0,634 ó 63,4%

15. La eficiencia de una central nucleoeléctrica de 1 000 MW es 33%; esto es, 2 000 MW de calor se liberan al ambiente por cada 1 000 MW de energía eléctrica producida. Si se utilizara un río de 10^6kg/s de tasa de flujo para transportar el exceso de energía térmica, ¿Cuál sería el aumento de la temperatura promedio del río?

Resolución :

Datos: Potencia producida = 1 000 MW

$$\frac{Q_{liberado}}{t} = 2\,000 \text{ MW}; \quad \frac{M_{H_2O}}{t} = 10^6 \frac{kg}{s} \quad ; \quad \Delta T = ?$$

Sabemos que: $\dfrac{W_{total\ producido}}{t} = 1\,000 \text{ MW}$

Por otro lado: $\dfrac{Q_{liberado}}{t} = \dfrac{Q_{exceso}}{t} = 2\,000 \text{ MW}$

$$\Rightarrow \quad M_{H_2O} \times C_{H_2O} \times \frac{\Delta T}{t} = 2\,000 \text{ M}\frac{J}{s}$$

$$\Rightarrow \quad 10^6 \frac{kg}{s} \times 4\,186 \frac{J}{kg°C} \times \Delta T = 2\,000 \text{ M}\frac{J}{s} \quad \therefore \quad \Delta T = 0{,}478°C$$

16. En el punto A en un ciclo de Carnot, 2,30 moles de un gas monoatómico tienen una presión de 1 400 kPa, un volumen de 10,0 litros y una temperatura de 720 K. Se expande isotérmicamente hasta el punto B y después se expande adiabáticamente hasta el punto C, donde su volumen es 24,0 litros. Una compresión isotérmica lo lleva hasta el punto D, donde su nuevo volumen es 15,0 litros. Un proceso adiabático regresa al gas al punto A. a) Determine todas las presiones, volúmenes y temperaturas desconocidas llenando la siguiente tabla.

	P	V	T
A	1 4000 kPa	10,0 litros	720 K
B			
C		24,0 litros	
D		15,0 litros	

b) Encuentre el calor agregado, el trabajo realizado y el cambio en la energía interna para cada una de las etapas, AB, BC, CD y DA. c) Demuestre que $W_{neto}/Q_{en} = 1 - T_c/T_A$, la eficiencia de Carnot.

Resolución :

Datos: n = 2,36 moles de gas monoatómico

$$C_p = \frac{5}{2}R\,;\ C_V = \frac{3}{2}R\,;\ \gamma = 1{,}67$$

a) A → B (expansión isotérmica) b) B → C (expansión adiabática)

c) C → D (compresión isotérmica) d) D → A (proceso adiabático)

Parte (a)

$P_A = 1{,}4 \times 10^3$ kPa $\quad V_A = 10{,}0$ litros $\quad T_A = T_B = 720$ K

Entonces: $P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow P_A \cdot V_A / V_B = P_B$ ... (1)

$T_B \cdot V_B^{\gamma-1} = T_C \cdot V_C^{\gamma-1}$ ... (2)

Además: $T_D \cdot V_D^{\gamma-1} = T_A \cdot V_A^{\gamma-1}$ ... (3)

De (3): $T_D = \dfrac{T_A \cdot V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} = \dfrac{720 \times (10{,}0)}{(15{,}0)^{1{,}67-1}}$

$\therefore \quad T_D = T_C = 544{,}6$ K

De (2): $(720 \text{ K}) \cdot V_B^{1{,}67-1} = 544{,}6 \times (24 \text{ litros})^{1{,}67-1}$

$\therefore \quad V_B = 15{,}8$ litros

Luego de (1) $\quad \dfrac{1{,}4 \times 10^3 \text{ kPa} \times 10 \text{ litros}}{15{,}8 \text{ litros}} = P_B \quad \therefore \quad P_B = 886$ kPa

En consecuencia:

El cuadro queda de la siguiente manera:

*	P (kPa)	V (litros)	T (K)
A	1400 kPa	10,0 litros	720 K
B	886 kPa	15,8 litros	720 K
C	440,8 kPa	24,0 litros	554,6 K
D	711,4 kPa	15,0 litros	544,6 K

Parte (b)

$$\Delta U_{A\to B} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = {}_{+}W_{AB} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{AB} = W_{AB} = (2{,}36)(8{,}31)(720)\ \ln\left(\frac{15{,}8}{10}\right) = 6{,}46\ \text{kJ (compresión)}$$

En: B → C

$$Q_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{BC} = -W_{BC}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = \frac{P_B \cdot V_B - P_C \cdot V_C}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = \frac{(886\ \text{kPa})(15{,}8\ \text{litros}) - (440{,}8\ \text{kPa})(24\ \text{litros})}{1{,}67 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = 5{,}1\ \text{MPa} \times \text{litros}\ \frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3} \times \frac{10^3 \text{cm}^3}{1\ \text{litro}}$$

$$\therefore \quad W_{BC} = 5{,}1\ \text{kJ}$$

Luego: $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 5{,}1\ \text{kJ}$ (compresión)

En C → D

$$\Delta U_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{CD} = W_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{CD} = W_{CD} = nRT\ \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = (2{,}36)(8{,}31)(554{,}6)\ \ln\left(\frac{15}{24}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{CD} = W_{CD} = 5{,}1\ \text{kJ (compresión)}$$

En D → A

$$Q_{DA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{DA} = -W_{DA}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = \frac{P_D \cdot V_D - P_A \cdot V_A}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = \frac{(711{,}4\ \text{kPa})(15\text{litros}) - (1400\ \text{kPa})(10\ \text{litros})}{1{,}67 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = -4{,}96\ \text{MPa} \times \text{litros}\ \frac{10^3 \text{cm}^3}{1\ \text{litro}} \times \frac{1\ \text{m}^3}{10^6 \text{cm}^3}$$

$$\therefore \quad \Delta U_{DA} = W_{DA} = 4{,}96\ \text{kJ (expansión)}$$

Parte (c)

Por demostrar que: $\dfrac{W_{neto}}{Q_{abs.}} = 1 - \dfrac{T_C}{T_A}$ (eficiencia de Carnot)

Sabemos que en un ciclo de Carnot $\Delta U_{ABCDA} = 0$

$$\Rightarrow \quad Q_{ABCDA} = W_{neto}$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = Q_{AB} + 0 + Q_{CD} + 0$$

Pero: $Q_{AB} = Q_{absorbe}$

$Q_{CD} = Q_{libera}$

$$\Rightarrow \quad \text{De la hipótesis: } \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs.} + Q_{libera}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbe}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{nRT_C . \ln(V_D/V_C)}{nRT_A . \ln(V_B/V_A)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{T_C}{T_A} \times \frac{\ln(V_D/V_C)}{\ln(V_B/V_A)} \quad \dots (\alpha)$$

De la relación en la parte (a) de (2) y (3).

Dividiendo (3) por (2)

Resulta que: $\dfrac{T_D \cdot V_D^{\gamma-1}}{T_C \cdot V_C^{\gamma-1}} = \dfrac{T_A \cdot V_A^{\gamma-1}}{T_B \cdot V_B^{\gamma-1}}$

Como: $T_A = T_B \ \wedge \ T_C = T_D \ \Rightarrow \ \ln\left(\dfrac{V_D}{V_C}\right) = -\ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right) \quad \dots (\beta)$

En consecuencia: (β) en (α)

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 + \frac{T_C}{T_A} \times \frac{\ln(V_D/V_C)}{-\ln(V_D/V_C)}$$

$$\therefore \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{T_C}{T_A} \quad \text{l.q.q.d.}$$

17. Una máquina de vapor trabaja en un clima frío donde la temperatura de escape es 0°C. a) Calcule la máxima eficiencia teórica de la máquina utilizando una temperatura de vapor de entrada de 100°C. b) Si, en vez de eso, se usa vapor sobrecalentado a 200°C, encuentre la máxima eficiencia posible.

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\text{Eficiencia (e)} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow e = 1 - \dfrac{0°C + 273}{100°C + 273}$

$\therefore \quad E_{máx} = 0{,}268$

Parte (b) $\quad e_{máx} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow e_{máx} = 1 - \dfrac{0°C + 273}{200°C + 273}$

$\therefore \quad e_{máx} = 0{,}423$

18. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 25% cuando la temperatura del depósito caliente es de 500°C. Si deseamos mejorar la eficiencia hasta 30%, ¿cuál sería la temperatura del depósito caliente, suponiendo que todo lo demás permanece inalterado?

Resolución :

Datos: $\quad \text{Eficiencia}_i = 25\% \qquad T_{ci} = 500\,°C = 773\ K$

$\text{Eficiencia}_f = 30\% \qquad T_{cf} = ?$

Sabemos que: $\text{eficiencia} = 0{,}25 = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{T_f}{500°C + 273}$

$\Rightarrow \quad T_f = 579{,}75\ K$

Por otro lado:

Si: $\quad \text{Eficiencia} = 0{,}3 \Rightarrow 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0{,}3 \Rightarrow 0{,}3 = 1 - \dfrac{573{,}75\ K}{T_{c\ final}}$

$\therefore \quad T_{c\,final} = 828{,}2\ K$

19. Una máquina 20% eficiente se utiliza para acelerar un tren desde el reposo hasta 5,0 m/s. Se sabe que una máquina ideal (de Carnot) con los mismos depósitos frío y caliente aceleraría al mismo tren desde el reposo hasta una velocidad de 6,5 m/s empleando la misma cantidad de combustible. Si la máquina emplea aire a 300 K como un depósito frío, encuentre la temperatura del vapor que sirve como depósito caliente.

Resolución :

Sabemos que: $\quad 0{,}2 = \dfrac{W_{máquina/tren}}{Q_{absorbido}} = \dfrac{M_{tren}\cdot(5{,}0)^2}{2Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido} = \dfrac{M_{tren}\times(5{,}0)^2}{2(0{,}2)} \quad \ldots (1)$

Por otro lado: $\quad \dfrac{W_{máquina\ de\ Carnot/tren}}{Q_{absorbido}} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = \dfrac{M_{tren}(6{,}5)^2}{2Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido} = \dfrac{T_c\times M_{tren}(6{,}5)^2}{2(T_c - T_f)} \quad \ldots (2)$

(1) = (2) donde $T_f = 300\ K$

$$\frac{M_{tren}(5{,}0)^2}{2(0{,}2)} = \frac{T_c\times M_{tren}\times(6{,}5)^2}{2(T_c - T_f)} \quad \therefore \quad T_c = 453\ K$$

EL MOTOR DE GASOLINA

20. Un motor de gasolina tiene una relación de compresión de 6 y usa un gas para el cual $\gamma = 1{,}4$. a) ¿Cuál es la eficiencia del motor si opera en un ciclo de Otto idealizado? b) Si la eficiencia real es de 15%, ¿qué fracción del combustible se desperdicia como resultado de la fricción y de las inevitables pérdidas térmicas? (Suponga combustión completa de la mezcla aire-combustible).

Resolución :

Datos: $\quad \dfrac{V_1}{V_2} = 6\ ;\ \gamma = 1{,}4\ ;$

Parte (a)

Sabemos que en un ciclo de Otto:

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} \Rightarrow \text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{(6)^{1{,}4-1}}$$

$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}512$ ó $51{,}2\%$

Parte (b)

Si la eficiencia real = 15%

Entonces: $\frac{15\%}{51,2\ \%} = 0,293$ (fracción de combustible que se desperdicia)

21. Un motor de gasolina de 1,6 litros con una relación de comprensión de 6,2 tiene una salida de potencia de 102 CP. Si el motor opera en un ciclo de Otto idealizando, encuentre el calor absorbido y expulsado por el motor cada segundo. Suponga que la mezcla aire-combustible se comporta como un gas ideal.

Resolución:

Datos: Volumen de gasolina = 1,6 litros ; $\gamma = 1,4$

$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = 6,2$ 1 CP = 746 W

Salida de potencia = 102 CP

Sabemos que: $\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = 6,2$

$$\Rightarrow \frac{V_{final}}{1,6\text{ litros}} = 6,2 \quad \therefore \quad V_{final} = 6,2 \times 1,6 = 9,92 \text{ litros}$$

Por otro lado:

$$\text{Eficiencia en un ciclo de Otto} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{(6,2)^{1,4-1}}$$

$\therefore$ Eficiencia = 0,52

Como: $\text{Eficiencia} = 0,52 = \frac{W_{neto}(1/t)}{Q_{abs}(1/t)}$

$$\Rightarrow 0,52 = \frac{\text{Potencia}}{Q_{abs/t}} = \frac{102\text{ CP}}{Q_{abs/t}} \times \frac{746\text{ W}}{1\text{ CP}}$$

$\therefore$ $Q_{absorbido/s} = 146$ kW

Además: $0,52 = 1 - \frac{Q_{libera/s}}{Q_{absorbe/s}} \Rightarrow 0,52 = 1 - \frac{Q_{libera/s}}{Q_{absorbe/s}}$

$\therefore$ $Q_{libera/s} = 70$ kW

22. En un cilindro de un motor de automóvil, justo después de la combustión, el gas se confina en un volumen de 50 cm³ y tiene una presión inicial de 3,0 × 10⁶ Pa. El émbolo se mueve hacia afuera a un volumen final de 300 cm³ y el gas se expande sin perder calor. Si $\gamma = 1,40$ para el gas, ¿cual es la presión final?

Resolución : 22

Datos: $V_{inicial} = 50,0\text{ cm}^3$; $V_{final} = 300\text{ cm}^3$

$P_{inicial} = 3,0 \times 10^6$ Pa $\gamma = 1,4$

$P_{final} = ?$

En un proceso adiabático (Q = 0) se cumple que:

$P \cdot V^{\gamma} = cte$

$$\Rightarrow P_{inicial} \cdot V_{inicial}^{\gamma} = P_{final} \cdot V_{final}^{\gamma}$$

$$\Rightarrow (3,0 \times 10^6\text{ Pa}) \times (50,0)^{1,4} = P_{final} \times (300\text{ cm}^3)^{1,4}$$

$$\therefore P_{final} = 2,43 \times 10^5 \text{ Pa}$$

23. ¿Cuánto trabajo hace el gas en el problema 22 al expandirse en $V_1 = 50\text{ cm}^3$ a $V_2 = 300\text{ cm}^3$?

Resolución:

Datos: $V_1 = 50,0\text{ cm}^3$; $V_2 = 300\text{ cm}^3$

$W_{total} = ?$

En un proceso adiabático se cumple que:

$$W_{total} = \frac{P_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot V_2}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow W_{total} = \frac{3,0\times10^6\times(50,0) - 2,43\times10^5\times(300)}{1,4-1}$$

$$\Rightarrow W_{total} = 19,3 \times 10^7 \frac{N}{m^2} \times cm^3 \times \frac{1\text{ m}^3}{10^6\text{ cm}^3}$$

$$\therefore W_{total} = 193 \text{ J}$$

BOMBAS DE CALOR Y REFRIGERADORES

24. Un refrigerador ideal o bomba de calor ideal es equivalente a una máquina de Carnot que funciona a la inversa. Es decir, se absorbe calor Q_f de un deposito frío y se libera calor Q_c hacia el depósito caliente. a) Demuestre que el trabajo que debe

suministrarse para operar el refrigerador o la bomba es:

$$W = \frac{T_c - T_f}{T_f} . Q_f$$

b) Muestre que el coeficiente de rendimiento del refrigerador ideal es:

$$CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $W = \frac{T_c - T_f}{T_f} . Q_f$

Sabemos que en un ciclo de Carnot se cumple que:

$$1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{W}{Q_c} \Rightarrow \frac{T_c - T_f}{T_c} = \frac{W}{Q_c}$$

como la bomba ideal ó refrigerador trabaja a la inversa se tiene que:

$$\frac{T_c - T_f}{T_f} = \frac{W}{Q_f}$$

$$\therefore \quad W = \frac{T_c - T_f}{T_f} \times Q_f \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

Sabemos que: $CDR = \frac{Q_f}{W} \Rightarrow CDR = \frac{Q_f}{\left(\frac{T_c - T_f}{T_f}\right) \times Q_f}$

$$\therefore \quad CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

25. Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento igual a 5. Si en cada ciclo el refrigerador absorbe 120 J de energía térmica de un depósito frío, encuentre a) el trabajo hecho en cada ciclo, y b) la energía térmica liberada hacia el depósito caliente.

Resolución:

Datos: CDR (refrigerador) = 5

$Q_f = 120$ J

Parte (a)

Sabemos que: $CDR\text{ (refrig)} = \frac{Q_f}{W} \Rightarrow 5 = \frac{120\text{ J}}{W}$

$$\therefore \quad W_{realiza} = 24\text{ J}$$

Parte (b)

Sabemos que: $W_{realiza} = Q_c - Q_f \Rightarrow 24\text{ J} = Q_c - 120\text{ J}$

$$\therefore \quad Q_{libera} = 144\text{ J} = Q_c$$

26. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento de una bomba de calor que lleva calor de los exteriores a – 3°C hacia el interior de una casa a 22°C? (Sugerencia: La bomba de calor realiza el trabajo W, mismo que también está disponible para calentar la casa).

Resolución:

Datos: $T_f = -3°C \equiv 270$ K

$T_c = 22°C \equiv 295$ K

Sabemos que: $CDR\text{ (bomba de calor)} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

$$\Rightarrow \quad CDR\text{ (bomba de calor)} = \frac{295\text{ K}}{295\text{ K} - 270\text{ K}}$$

$$\therefore \quad CDR\text{ (bomba de calor)} = 11{,}8$$

27. ¿Cuánto trabajo se requiere, utilizando un refrigerador de Carnot, para extraer 1,0 J de energía térmica de gas helio a 4,0 K y liberar esta energía térmica en un medio a temperatura ambiente (273 K)?

27.A ¿Cuánto trabajo se requiere, utilizando un refrigerador de Carnot, para extraer helio a T_f Q joules de energía térmica y liberar esta energía térmica en un medio a temperatura ambiente a T_f?

Resolución:

Datos: "Refrigerador de Carnot"

T_f y Q $\quad T_c \quad W = ?$

Sabemos que: $CDR\text{ (refrig.)} = \frac{Q}{W}$

Así también: $CDR\text{ (refrig.) Carnot} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

Igualando: $\frac{Q}{W} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \Rightarrow W = \frac{(T_c - T_f)}{T_c} . Q$

$\therefore \quad W = \frac{\Delta T}{T_c} . Q$

ENTROPÍA

28. ¿Cuál es el cambio de entropía cuando 1 mol de plata (108 g) se funde a 961°C?

Resolución:

Datos: n = 1,00 mol Ag ; m_{Ag} = 108 g ; T = 961°C ; $Q_{fusión} = 8,82 \times 10^4$ J

Sabemos que: $dS = \frac{dQ_f}{T}$

$$\Rightarrow \int_i^f dS = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_f \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_f$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{T} . Q_f$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{961° + 273} \times m_{Ag} . L_f = \frac{1}{1\,234\text{ K}} \times 108 \times 10^{-3}\text{kg} \times 8,82 \times 10^4 \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 7,72 \frac{J}{K}$$

29. ¿Cuál es la reducción de entropía en 1 mol de gas helio que se ha enfriado a 1atm desde la temperatura ambiente de 293 K hasta 4 K? (C_p del helio = 21 J/mol.K)

Resolución:

Datos: ΔS = ? ; n_{He} = 1,00 mol ; P = 1,00 atm

$T_{inicial}$ = 293 K ; T_{final} = 4 K ; C_P (helio) = 21 J/mol.K

Sabemos que $L_{fusión(He)} = 5,23 \times 10^3$ J/kg

Por otro lado:

$$+ \begin{cases} P . V_{inicial} = n\,R\,T_{inicial} \\ P . V_{final} = n\,R\,T_{final} \end{cases}$$

$$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{T_{final}}{T_{inicial}}$$

Como: $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = nC_v \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

Por dato: C_p (He) = 21 J/mol.K $\Rightarrow$ C_V (He) = 12,69 $\frac{J}{mol.K}$

Luego: (reemplazando datos)

$$\Delta S = (1\text{ mol})(12,69 \frac{J}{mol K}) \ln\left(\frac{4\text{ K}}{293\text{ K}}\right) + (1,00\text{ mol})(8,31 \frac{J}{mol K}) \ln\left(\frac{4\text{ K}}{293\text{ K}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 12,69 \frac{J}{K}(-4,293878) + (8,31 \frac{J}{K})(-4,293878)$$

$$\therefore \quad \Delta S = -90,2 \frac{J}{K} \quad \text{(reducción en la entropía)}$$

30. Una congeladora hermética tiene una temperatura inicial de 25°C y 1,0 atm. El aire se enfría después hasta –18°C. a) ¿Cuál es el cambio de entropía del aire si el volumen se mantiene constante? b) ¿Cuál sería el cambio si la presión se mantuviera en 1 atm durante el enfriamiento?

Resolución:

Datos: P_i = 1,00 atm ; $T_{inicial}$ = 25°C ; T_{final} = –18°C ; $C_{V\,aire} = \frac{5}{2}R$

Parte (a)

Por hallar ΔS = ? a volumen constante

Sabemos que: $\Delta S = n\,C_V \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

$$\Delta S = nC_V \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + 0 \quad \text{(volumen = cte)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = (1,00\text{ mol})\left(\frac{5}{2}(R)\right) . \ln\left(\frac{-18 + 273}{25 + 273}\right)$$

$\therefore \quad \Delta S = -3{,}24\ \dfrac{J}{K}$ (para una mol de aire)

Hay una reducción en la entropía.

Parte (b)

$P = 1$ atm = cte $\qquad \Delta S = ?$

Sabemos que: $\Delta S = n\,.\,C_V\,.\,\ln\left(\dfrac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$

Por otro lado: $\quad \div \begin{cases} P\,.\,V_{inicial} = n\,R\,.\,T_{inicial} \\ P\,.\,V_{final} = n\,R\,.\,T_{final} \end{cases}$

$$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{T_{final}}{T_{inicial}}$$

Luego: $\quad \Delta S = n \times \dfrac{5}{2} R \times \ln\left(\dfrac{-18+273}{25+273}\right) + n \times R \times \ln\left(\dfrac{-18+273}{25+273}\right)$

$\Rightarrow \quad \Delta S = \dfrac{5}{2}(8{,}31)(n) \times (0{,}15583) + n(8{,}31)\,(-0{,}15583)$

$\Rightarrow \quad \Delta S = -29{,}085$ n J/K

Para n = 1,00 mol de aire

Entonces: $\qquad \Delta S = -29{,}085\ \dfrac{J}{K}$ (reducción en la entropía)

31. Calcule el cambio de entropía de 250 g de agua que se calienta lentamente de 20°C a 80°C. (Sugerencia: advierta que $dQ = mc\ dT$).

Resolución :

Datos: $\quad m_{H_2O} = 250$ g ; $C_{H_2O} = \dfrac{1\ \text{cal}}{g.°C}$

$T_{inicial} = 20°C \equiv 293$ K ; $\quad 1$ cal $\equiv 4{,}186$ J

$T_{final} = 80°C \equiv 353$ K ; $\quad \Delta S = ?$

Sabemos que: $\quad \Delta S = \int_i^f \dfrac{dQ}{T} = \int_i^f mC.\dfrac{dT}{T}$ (por sugerencia)

$\Rightarrow \quad \Delta S = m\,.\,C\,.\int_i^f \dfrac{dT}{T}$

$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O}\,.\,C_{H_2O}\,.\,\ln\left(\dfrac{T_{final}}{T_{inicial}}\right)$

$\Rightarrow \quad \Delta S = 250\ g \times \dfrac{1\ \text{cal}}{g°C} \times \ln\left(\dfrac{353\ K}{233\ K}\right) \times \dfrac{4{,}186\ J}{1\ \text{cal}}$

$\therefore \quad \Delta S = 195\ \dfrac{J}{K}$

32. Una bandeja de hielo contiene 500 g de agua a 0°C. Calcule el cambio de entropía del agua cuando a medida que se congela lentamente a 0°C.

Resolución :

Datos: $\quad m_{hielo} = 500$ g ; $\quad C_{hielo} = 0{,}5$

$T = 0°C \equiv 273$ K

Sabemos que: $\quad \Delta S = \dfrac{dQ_r}{T} \qquad \Rightarrow \quad \Delta S = \dfrac{mC\Delta T}{T} = \dfrac{Q_{trans.}}{T}$

$\Rightarrow \quad \Delta S = \dfrac{m_{hielo} \times L_{fusión}}{T} \Rightarrow \quad \Delta S = \dfrac{(0{,}5\,kg) \times 3{,}39 \times 10^5\ \frac{J}{kg}}{273\ K}$

$\therefore \quad \Delta S = 1{,}665 \times 10^5\ \dfrac{J}{K}$

33. Una herradura de hierro de 1 kg se toma de un horno a 900°C y se sumerge en 4,0 kg de agua a 10°C. Si no se libera calor en los alrededores, determine el cambio de entropía total.

Resolución :

Datos: $\quad m_{hierro} = 1{,}00$ kg ; $\quad T_{inicial(Fe)} = 900°C \equiv 1\,173$ K ; $\quad C_H = 0{,}107\ \dfrac{cal}{g.°C}$

$m_{agua} = 4{,}00$ kg ; $\quad T_{inicial} = 10°C \equiv 283$ K ; $\quad C_{H_2O} = \dfrac{1\ cal}{g.°C}$

$\Delta S = ?$

Por calorimetría: $Q_{ganado\,(H_2O)} = Q_{perdido\,(Fe)}$

$\Rightarrow \quad m_{H_2O}\,.\,C_{H_2O}\,.\,\Delta T = m_{Fe}\,.\,C_{Fe}\,.\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad (4{,}0\ kg) \times \left(1{,}00\dfrac{cal}{g.°C}\right) \times (T_E - 10°C) = (1{,}00\ kg) \times \left(0{,}107\dfrac{cal}{g.°C}\right) \times (900°C - T_E)$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 32{,}2°C \equiv 306{,}2\ K$$

Por otro lado:

Sabemos que: $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_{total}}{T} = \int_{T_1}^{T_E} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_E} \frac{dQ_2}{T}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} \cdot \int_{T_{x1}}^{T_E} \frac{dT}{T} + m_{hierro} \cdot C_{Fe} \cdot \int_{T_{i2}}^{T_E} \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + m_{Fe} \cdot C_{Fe} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_{i2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 4{,}00\ kg \times \frac{J}{kg.°C} \cdot \ln\left(\frac{306{,}2\ K}{283\ K}\right) + 1{,}00\ kg \times 448\ \frac{J}{kg.°C} \times \ln\left(\frac{306{,}2\ K}{1173\ K}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 1\ 319{,}3\ \frac{J}{°C} - 601{,}7\ \frac{J}{°C}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 717\ \frac{J}{°C} \equiv 717\ \frac{J}{K}$$

34. A una presión de 1 atm, helio líquido hierve a 4,2 K. El calor latente de evaporación es 20,5 kJ/kg. Determine el cambio de entropía (por kilogramo) que produce de la evaporación.

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00\ atm$; $L_{vap.} = 20{,}5\ \frac{J}{kg}$; $T_{vap.} = 4{,}2\ K$

$\Delta S = ?$

Sabemos que: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q_{vap.}}{T_{vap.}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T} \times m_{He} \times L_{vap.}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{4{,}2K} \times 1\ kg \times 20{,}5\ \frac{kJ}{kg}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{(X\ kilogramo)} = 4{,}88\ \frac{kJ}{K}$$

35. La superficie del Sol está aproximadamente a 5 700 K y la temperatura de la superficie de la Tierra es de casi 290 K. ¿Qué cambio de entropía ocurre cuando 1 000 J de energía térmica se transfieren del Sol a la Tierra?

Resolución:

Datos: $T_{Sol} = 5\ 700\ K$; $T_{Tierra} = 290\ K$

$Q_{Sol-Tierra} = 1000\ J$; $\Delta S_{univ.} = ?$

Sabemos que: $\Delta S_{univ} = \frac{Q_{Ganado \times Tierra}}{T_{Tierra}} - \frac{Q_{Liberado \times Sol}}{T_{Sol}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{univ.} = \frac{1\ 000 J}{290\ K} - \frac{1\ 000 J}{5\ 700 K}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{univ.} = 3{,}448\ \frac{J}{K} - 0{,}1754\ \frac{J}{K}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{univ} = 3{,}27\ \frac{J}{K}$$

36. Un iceberg de 100 000 kg a –5°C se desprende de la capa de hielo polar y flota por el océano a 5°C. ¿Cuál es el cambio final de entropía del sistema cuando el iceberg se ha fundido por completo? (El calor específico del hielo es 2 010 J/kg.°C)

Resolución:

Datos: $M_{iceberg} = 10^5\ kg$; $T_{iceberg} = -5°C \equiv 268\ K$

$T_{océano} = 5\ °C \equiv 278\ K$; $c_{hielo} = 2\ 010\ \frac{J}{kg.°C}$

$L_{fusión\ agua} = 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$; $\Delta S_{sistema} = ?$

Sabemos que: $Q_{absorbido\ iceberg} = Q_{perdido \times océano}$

Entonces:

$$Q_{absorbido \times iceberg} = M_{iceberg} \times C_H \times \Delta T + Q_{trans.} + Q_{adquirido}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{absorbido \times iceberg} = 10^5\ kg \times 2\ 010\ \frac{J}{kg.°C} \times (0°C + 5°C) + 10^5\ kg \times 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido \times iceberg} = |Q_{liberado \times océano}| = 3{,}43 \times 10^{10}\ J$$

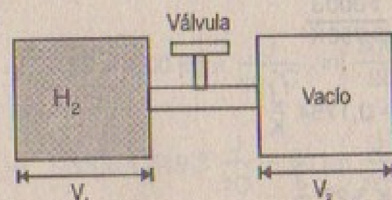
Luego: $\Delta S_{sistema} = \frac{Q_{absorbido \times iceberg}}{T_{iceberg}} - \frac{Q_{liberado \times océano}}{T_{océano}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{sistema} = \frac{3{,}43\times10^{10}\,J}{268\,K} - \frac{3{,}43\times10^{10}\,J}{278\,K}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{sistema} = 4{,}62\ \frac{MJ}{K}\ \text{(aumenta)}$$

37. Un mol de gas H_2 está contenido en el lado izquierdo del recipiente mostrado en la figura P22.37, el cual tiene volúmenes iguales a la izquierda y a la derecha. En el lado derecho se ha hecho vacío. Cuando la válvula se abre, el gas fluye hacia el lado derecho. ¿Cuál es el cambio de entropía final? ¿Cambia la temperatura del gas?

Resolución :



Volumen 1 = volumen 2
$n = 1{,}00$ mol (H_2)
$\Delta S = ?$

Por la primera ley de la termodinámica:

$$dQ = dU + dW \quad (V = cte)$$

$$\Rightarrow \quad dQ = dU$$

Pero como es un proceso irreversible, lo convertimos a reversible; entonces: a T ambiente y constante:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dW}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T}\int dW = \frac{1}{T} nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV \quad \dots (1)$$

Como: $V_{inicial} = H_2$ (ocupa toda la molécula)

$\Rightarrow \quad V_{final} = 2\,V_{inicial} = H_2$ (ocupa toda la molécula cuando se abre la válvula)

Luego: (1)

$$\Delta S = nR\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right) = 1\text{ mol} \times 8{,}31\ \frac{J}{mol.K}\ .\ln\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S = 5{,}76\ \frac{J}{K}$$

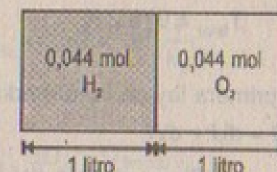
No cambia la temperatura (se produce un proceso isotérmico).

38. Un recipiente de 2,0 litros está dividido en dos partes iguales como se indica en la figura P22.38. El lado izquierdo contiene gas H_2 y en lado derecho hay gas O_2.

Ambos gases están a temperatura ambiente y a presión atmosférica. La división se elimina y se deja que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento de entropía?

Resolución :

Datos: $V_{total} = 2{,}0$ litros
$T_{ambiente}$
$P = 1{,}00$ atm
$\Delta S = ?$



Manteniéndose la temperatura constante y a presión atmosférica,por la primera ley de la termodinámica se cumple que:

$$dQ_T = dW_T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = \int \frac{dW_{total}}{T} = \frac{1}{T} n_{total} \,.\, RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV$$

Como el volumen inicial que ocupa cada molécula es de 1 litro, entonces al mezclarse cada molécula ocupará todo el recipiente es decir 2 litros. Luego:

$$\Delta S_{total} = (0{,}044\text{ mol } H_2 + 0{,}044\text{ mol } O_2)\left(8{,}31\,\frac{J}{mol.K}\right)\times\ln\left(\frac{2\text{ litros}}{1\text{ litro}}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 0{,}506\ J/K$$

39. Un mol de un gas monoatómico ideal, inicialmente a una presión de 1 000 atm y un volumen de 0,025 m³, se calienta hasta un estado final donde la presión es 2,000 atm y el volumen es 0,040 m³. Determine el cambio de entropía en este proceso.

Resolución :

Datos: $n = 1$ mol gas monoatómico ; $C_v = \frac{3}{2}R$; $R = 8{,}31$ J/mol.K

$P_{inicial} = 1{,}00$ atm ; $P_{final} = 2{,}00$ atm

$V_{inicial} = 0{,}025\ m^3$; $V_{final} = 0{,}040\ m^3$

$\Delta S = ?$

Por la ley de los gases ideales:

$$P_{inicial} \cdot V_{inicial} = n \,.\, R \,.\, T_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad T_{inicial} = \frac{P_{inicial}\times V_{inicial}}{n\,.\,R} = \frac{1{,}00\text{ atm}\times 0{,}025\ m^3}{1\text{ mol}\times 8{,}31\frac{J}{mol.K}} \times \frac{1{,}013\times10^5\ N/m^2}{1\text{ atm}}$$

$$\therefore \quad T_{inicial} = 304{,}7\ K$$

Por otro lado: $P_{final} \cdot V_{final} = n.R\,T_{final}$

$$\Rightarrow \quad T_{final} = \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{nR} = \frac{2{,}00\ atm \times 0{,}040\ m^3}{1\ mol \times 8{,}31\ J/mol.K} \times \frac{1{,}013 \times 10^5\ N/m^2}{1\ atm}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 975{,}2\ K$$

Luego, por la primera ley de la termodinámica:

$$dQ = dU + dW$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU}{T} + \int \frac{dW}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = n\,C_v . \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR\ \ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$$

Reemplazando datos resulta que:

$$\Delta S = 18{,}4\ J/K$$

40. Un mol de un gas diatómico ideal, inicialmente a una presión P y volumen V, se expande hasta tener una presión 2P y un volumen 2V. Si durante la expansion la presión se mantiene directamente proporcional al volumen, determine el cambio de entropía en el proceso.

Resolución:

Por la ley de gases: $\frac{T_{final}}{T_{inicial}} = \frac{2P \times 2V}{P\ .\ V} = 4$

Luego:

Sabemos que: $\Delta S = n\,C_V . \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR . \ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

Por dato: $n = 1$; $V_{inicial} = V$;
$V_{final} = 2V$

Entonces: $\Delta S = \frac{3}{2} R \ln(4) + R \ln(2)$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 34{,}56\ J/K$$

PROBLEMAS ADICIONALES

41. Un cubo de hielo de 18 g a 0,0°C se calienta hasta que se convierte en vapor. a) ¿Cuánto aumenta la entropía? b) ¿Cuánta energía se requirió para evaporar el cubo de hielo?

Resolución:

Datos: $m_{hielo} = 18\ g$; $T_{inicial} = 0°C$

$C_{H_2O} = 1\ \frac{cal}{g°C}$; $L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$

$L_{vaporiz.} = 2{,}26 \times 10^6\ \frac{J}{kg}$

Parte (a)

$$\Delta S_{total} = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{Q_{trans/fusión}}{T} + \int \frac{dQ_r}{T} + \frac{Q_{trans/vap}}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = \frac{5\,884\ J}{273\ K} + 18\ g \times \frac{1\ cal}{g.°C} \int_{0°C}^{100°C} \frac{dT}{T} + \frac{m_{H_2O} \cdot L_{vap}}{373\ K}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = 21{,}96\ \frac{J}{K} + 18\ g\ \frac{1\ cal}{g.°C} \ln\left(\frac{373\ K}{273\ K}\right) + \frac{18 \times 10^{-3} kg \times (2{,}26 \times 10^6 J/kg)}{373\ K}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 154{,}5\ J/K$$

Parte (b)

$$Q_{trans/fusión} = m_{hielo} \cdot L_{fusión} = 18 \times 10^{-3}\ kg \times 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{trans/fusión} = 5\,994\ J$$

$$Q_{requerido} = m_{H_2O}\ .\ C\ .\ \Delta T = 18\ g \times \frac{1\ cal}{g°C} \times 100°C \times \left(\frac{4{,}186\ J}{1\ cal}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{requerido\ (F-V)} = 7\,534{,}8\ J$$

$$Q_{trans/vap} = \ .\ L_{vap.} = 18 \times 10^{-3}\ kg \times 2{,}26 \times 10^6\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{trans/vap.} = 40\,680\ J$$

En consecuencia:

$$Q_{total\ requerida} = 5\,994\ J + 7\,534{,}8\ J + 40\,680\ J$$

$$\therefore \quad Q_{total\ requerida} = 54{,}2\ kJ$$

42. Si una máquina de Carnot con 35% de eficiencia se opera en sentido contrario de modo que se integre a un refrigerador, ¿Cual sería el coeficiente de rendimiento del refrigerador?

Resolución:

Datos: $e = 35\%$; CDR (refrig) = ?

Sabemos que: $e = 0{,}35 = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$ ... (α)

$$\Rightarrow \frac{T_f}{T_c} = 0{,}65 \quad \dots (\beta)$$

Por otro lado: $\quad \text{CDR (refrig.)} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f} \quad \dots (\theta)$

Entonces: de (θ)

$$\text{C.D.R. (refrig.)} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{\frac{T_c - T_f}{T_c}} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{1 - \frac{T_f}{T_c}} \quad \Rightarrow \quad \text{CDR (refrig)} = \frac{0{,}65}{0{,}35} \quad (\text{de } \alpha \text{ y } \beta)$$

$$\therefore \quad \text{CDR (refrig.)} = 1{,}86$$

43. Una casa pierde energía térmica por las paredes exteriores y el techo a razón de 5 000 J/s = 5 kW cuando la temperatura interior es de 22°C y la exterior de −5°C. Calcule la potencia eléctrica requerida para mantener el interior en 22°C en los siguientes dos casos: a) La potencia eléctrica se usa en calefactores de resistencia eléctrica (los cuales convierten toda la electricidad suministrada en energía térmica). b) La potencia eléctrica se usa para operar el compresor de una bomba de calor (la cual tiene un coeficiente de rendimiento igual a 60% del valor del ciclo de Carnot)

Resolución:

Datos: $\quad T_{int} = 22°C \;;\quad Q_{libera} = 5\,000\ \dfrac{J}{s} = 5{,}00\ kW$

$\qquad T_{ext} = -5{,}0°C$

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{W}{t} = \text{Potencia}$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_{suministrado}}{t} = \text{Potencia} \quad (\text{por dato})$$

$$\Rightarrow \quad 5\,000\ \frac{J}{s} = \text{Potencia}$$

$$\therefore \quad \text{Potencia eléctrica} = 5{,}00\ kW$$

Parte (b)

Por dato: CDR (bomba de calor) × 60% = 1/e

Entonces:

Sabemos que: $\text{CDR (bomba de calor)} = \dfrac{Q_{entrega/t}}{W_{realizado/t}} \times (1/60)\% = \dfrac{1}{e}$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_{entrega/t}}{\text{Potencia}} = \frac{1}{e} \times \frac{100}{60}$$

$$\Rightarrow \quad 500\ \frac{J}{s} \times \frac{100}{60} \times \left[1 - \frac{268\ K}{295\ K}\right] = \text{Potencia}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{50\,000}{60}\ \frac{J}{s} \times \frac{(295 - 268)\ K}{295\ K} = \text{Potencia}$$

$$\therefore \quad \text{Potencia eléctrica requerida} = 763\ W$$

44. Calcule el aumento de la entropía del universo cuando usted añade 20 g de crema a 5°C a 200 g de café a 60°C. El calor específico de la crema y el café es 4,2 J/g.°C.

Resolución:

Datos: $\quad M_{crema} = 20{,}0\ g \quad \wedge \quad T = 5°C \equiv 278\ K$

$\qquad M_{café} = 200\ g \quad \wedge \quad T = 60°C \equiv 333\ K$

$\qquad C_{café} = C_{crema} = 4{,}2\ \dfrac{J}{g°C}$

$\qquad \Delta S = ?$

Por calorimetría: $\quad Q_{ganado\ crema} = Q_{perdido\ café}$

$$\Rightarrow \quad M_{crema} \cdot C_{crema} \cdot \Delta T = M_{café} \cdot C_{café} \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad 20{,}0\ g \times \frac{J}{g°C} \times (T_E - 5°C) = 200\ g \times \frac{J}{g°C} \times (60°C - T_E)$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 32{,}5\ °C \equiv 305{,}5\ K$$

Luego:

$$\Delta S_{total} = \int_{T_1}^{T_E} m_1 C_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{T_E} m_2 C_2 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = M_{crema} \cdot C_{crema} \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + M_{café} \cdot C_{café} \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = 20{,}0\ g \times 4{,}2\ \frac{J}{g°C} \times \ln\left(\frac{305{,}5\ K}{278\ K}\right) + 200\ g \times 4{,}2\ \frac{J}{g°C} \times \ln\left(\frac{305{,}5\ K}{333\ K}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = 7{,}924\ \frac{J}{°C} + \left(-72{,}4\ \frac{J}{°C}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 64{,}5\ \frac{J}{°C} \equiv 64{,}5\ \frac{J}{K}$$

45. Un mol de un gas monoatómico ideal se somete al ciclo que se muestra en la figura P22.45. El proceso AB es una expansión isotérmica reversible. Calcule a) el trabajo neto hecho por el gas, b) la energía térmica entregada al gas, c) la energía térmica expulsada por el gas, d) la eficiencia del ciclo.

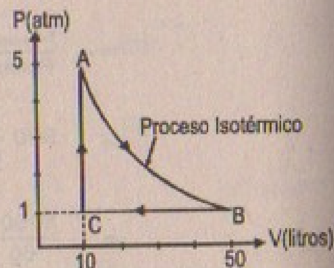


Figura P22.45

Resolución:

Datos: $n = 1{,}00$ mol de gas monoatómico

AB = expansión isotérmica reversible

Parte (a)

$$W_{total} = W_{BC} + \cancelto{0}{W_{CA}} + W_{AB} = W_{BC\ (P\,=\,cte)} + W_{AB\ (T\,=\,cte)}$$

Entonces:

$$W_{BC} = P \times \Delta V = 1\text{ atm} \times (10 - 50)\text{ litros} \times \frac{1{,}013\times10^5\text{ N/m}^2}{1\text{ atm}} \times \frac{10^3\text{cm}^3}{1\text{ litro}} \times \frac{1\text{ m}^3}{10^6\text{ cm}^3}$$

$$\therefore\quad W_{BC} = -4{,}05\text{ kJ (compresión)}$$

Además: $W_{AB} = nRT \times \ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right)$ a $T = $ cte, donde $T_A = T_B = T$

Por otro lado: $P_A \cdot V_A = nRT_A \;\Rightarrow\; T_A = \dfrac{P_A \cdot V_A}{nR}$

Luego: $W_{AB} = nR\left(\dfrac{P_A \cdot V_A}{nR}\right) \times \ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)$

$$\Rightarrow\quad W_{AB} = 5\text{ atm} \times 10\text{ litros} \times \ln\left(\frac{50}{10}\right) \times \frac{1{,}013\times10^5\text{N/m}^2}{1\text{ atm}} \times \frac{10^3\text{cm}^3}{1\text{ litro}} \times \frac{1\text{ m}^3}{10^6\text{ cm}^3}$$

$$\therefore\quad W_{AB} = 8{,}152\text{ kJ (expansión)}$$

En consecuencia:

$$W_{neto} = W_{BC} + W_{AB} = -4{,}05\text{ kJ} + 8{,}152\text{ kJ}$$

$$\therefore\quad W_{neto} = 4{,}1\text{ kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que:

$$T_A = T_B = \frac{P_A \cdot V_A}{nR} = \frac{5\text{ atm}\times10\text{ litros}}{1\text{ mol}\times0{,}080\,\dfrac{\text{atm . litros}}{\text{mol . K}}} = 609{,}76\text{ K}$$

$$T_C = \frac{P_C \cdot V_C}{nR} = \frac{1\text{ atm}\times10\text{ litros}}{1\text{ mol}\times0{,}080\,\dfrac{\text{atm . litro}}{\text{mol . K}}} = 122\text{ K}$$

Luego: $Q_{entregado \times gas} = Q_{CA} + Q_{AB} = Q_{CA} + 8{,}152\text{ kJ}$

$$Q_{entregado \times gas} = n \cdot C_v\,\Delta T + 8{,}152\text{ kJ}$$

$$Q_{entregado \times gas} = 1\text{ mol} \times \frac{3}{2}R\,(609{,}76\text{ K} - 122\text{ K}) + 8{,}152\text{ kJ}$$

$$\therefore\quad Q_{entregado \times gas} = 14{,}2\text{ kJ}$$

Parte (c) $Q_{expulsado \times gas} = Q_{BC} = n \cdot C_p \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow\quad Q_{expulsado \times gas} = 1\text{ mol} \times \frac{5}{2}R \times (122\text{ K} - 609{,}76\text{ K})$$

$$\therefore\quad Q_{expulsado \times gas} = |-10{,}1\text{ kJ}|$$

Parte (d)

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{Q_{exp.}}{Q_{entrega}} \quad\Rightarrow\quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{10{,}1\text{ kJ}}{14{,}2\text{ kJ}}$$

$$\therefore\quad \text{Eficiencia} = 28{,}8\%$$

46. Empleando un refrigerador de Carnot ideal, ¿cuánto trabajo se requiere para cambiar 0,50 kg de agua de la llave a 10°C en hielo a −20°C? Suponga que el compartimiento de la congeladora se mantiene en −20°C y que el refrigerador libera calor en un cuarto a 20°C.

Resolución:

Datos: $m_{H_2O} = 0{,}5\text{ kg} \;\wedge\; T_i = 10°C \;\rightarrow\; T_f = -20°C$

$W = ?$; $L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5$ J/kg

$$Q_{total\ requerido} = Q_{pierde} + Q_{trans.} + Q_{ganado}$$

$$\Rightarrow\quad Q_{total\ requerido} = m_{H_2O} \cdot C \cdot (\Delta T) + m_{H_2O} \cdot L_{fusión} + m_{hielo} \cdot C_H \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow\quad |Q_{total\ requerido}| = |0{,}5\text{ kg} + 4\,186\,\frac{\text{J}}{\text{kg.°C}} \cdot (0 - 10)°C + 0{,}5 \times (3{,}33 \times 10^5)\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$+ (0{,}5) \cdot (2\,030\,\frac{\text{J}}{\text{kg.°C}})(-20°C)|$$

$$\therefore\quad Q_{total\ requerido} = 208{,}33\text{ kJ}$$

Como: $\frac{Q_f}{|Q_c|} = \frac{T_f}{T_c}$ $\Rightarrow$ $|Q_c| = \frac{Q_f \cdot T_c}{T_f}$

$\therefore$ $|Q_c| = 208,33 \text{ kJ} \times \left(\frac{293 \text{ K}}{253 \text{ K}}\right) = 241,3 \text{ kJ}$

En consecuencia: $|W_{requerido}| = -Q_{total\ req.} + |Q_c|$

$\Rightarrow$ $|W_{requerido}| = |Q_c| - Q_{total\ requerido}$

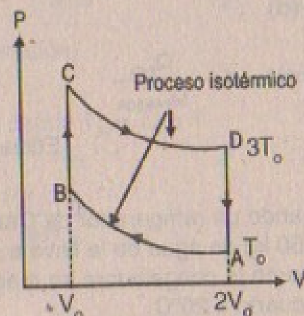
$\Rightarrow$ $|W_{requerido}| = 241,3 \text{ kJ} - 208,33 \text{ kJ}$

$\therefore$ $|W_{requerido}| = 32,97 \text{ kJ}$

47. La figura P22. 47 representa n moles de un gas ideal monoátomico que sigue un ciclo reversible compuesto de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_0$ y T_0, y dos procesos a volumen constante. En función de n, R y T_0 determine para cada ciclo, a) la energía térmica neta que se transfiere al gas, y b) la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo.

Resolución:

Datos: n, R



Parte (a)

Sabemos que:

$$Q_{total} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

Entonces:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nR\,T_0 \ln\left(\frac{V_0}{2V_0}\right) \quad \text{(proceso isotérmico)}$$

$$Q_{BC} = n \cdot C_V\,\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right) \times (3T_0 - T_0) \quad \text{(proceso isovolumétrico)}$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = nR\,(3T_0) \ln\left(\frac{2V_0}{V_0}\right) \quad \text{(proceso isotérmico)}$$

$$Q_{DA} = n\,C_V\,\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right) \times (T_0 - 3T_0) \quad \text{(proceso isovolumétrico)}$$

En consecuencia:

$$Q_{total} = -nRT_0 \ln(2) + 3nRT_0 + 3nRT_0 \ln(2) - 3nRT_0$$

$$\therefore \quad Q_{total} = 2nRT_0 \ln(2)$$

Parte (b)

Sabemos que por la primera ley de la termodinámica:

$$Q_{total} = W_{total} = 2nRT_0 \,\text{Ln}\,(2)$$

Además:

$$Q_{absorbe} = Q_{BC} + Q_{CD} = 3nRT_0 + 3nRT_0 \ln(2)$$

Entonces:

$$\text{Eficiencia} = \frac{W_{total}}{Q_{absorbe}} = \frac{2nRT_0 \cdot \text{Ln}\,(2)}{nRT_0\,(3 + 3\text{Ln}(2))}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0,273$$

48. Un congelador ideal (de Carnot) tiene una temperatura constante de 260 K, mientras que el aire externo tiene una temperatura constante de 300 K. suponga que el aislamiento del congelador no es perfecto de modo que un poco de calor fluye hacia su interior a razón de 0,15 W. Determine la potencia promedio del motor del congelador necesaria para mantener constante la temperatura del congelador.

Resolución:

Datos: $T_f = 260$ K ; $T_c = 300$ K ; $\frac{|Q_C|}{t} = 0,15$ W

Potencia promedio = ?

Sabemos que: $\text{Potencia promedio} = \frac{W_{total}}{t} = \frac{|Q_c| - Q_f}{t}$

Por otro lado: $\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$ $\Rightarrow$ $Q_f = Q_C \times \frac{T_f}{T_c}$

$$\therefore \quad \frac{Q_f}{t} = \frac{Q_c}{t} \times \frac{T_f}{T_c} = 0,15 \text{ W} \times \frac{260 \text{ K}}{300 \text{ K}}$$

En consecuencia:

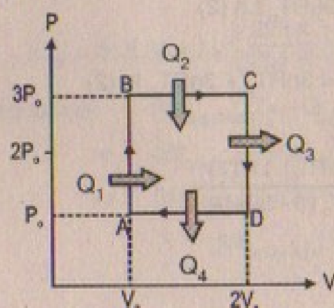
$$\text{Potencia promedio} = \frac{|Q_c|}{t} - \frac{Q_f}{t} = 0,15 \text{ W} - 0,15 \text{ W}\left(\frac{260}{300}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Potencia promedio} = 0,02 \text{ watts}$$

49. Un mol de un gas ideal monoatómico se somete al ciclo reversible que se muestra en la figura P22.49. En el punto A, la presión, el volumen y la temperatura son P_0, V_0 y T_0, respectivamente. En función de R y T_0, encuentre a) el calor total que entra al sistema por ciclo, b) el calor total que sale del sistema por ciclo, c) la eficiencia de

una máquina que opera en este ciclo reversible, y d) la eficiencia de una máquina que opera en un ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas extremas.

Resolución :



Datos: "n" moles de gas monoatómico

$T_A = T_0$

$C_V = \frac{3}{2} R$

$C_p = \frac{5}{2} R$

n = 1,00 mol

Parte (a)

$Q_{\text{total que entra}} = Q_{AB} + Q_{BC}$ (según gráfico)

$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que entra}} = n\,C_v\,\Delta T + n\,C_p\,\Delta T \quad \dots (1)$

Por otro lado:

$$T_B = \frac{3P_o V_o}{nR} \;;\; T_C = \frac{6P_o V_o}{nR} \;;\; T_D = \frac{2P_o V_o}{nR} \;;\; T_A = \frac{P_o V_o}{nR} = T_0$$

Luego de (1):

$$Q_{\text{total que entra}} = n \times \frac{3}{2} R \times \left(\frac{3P_oV_o}{nR} - \frac{P_oV_o}{nR}\right) + n \times \frac{5}{2} R \left(\frac{6P_oV_o}{nR} - \frac{3P_oV_o}{nR}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{entra}} = 3R\,\frac{P_oV_o}{R} + \frac{15}{2}\,\frac{P_oV_o}{R} = 10{,}5\,RT_0 \text{ (ya que: } P_oV_o = RT_o)$$

Parte (b)

$Q_{\text{total que sale}} = Q_{CD} + Q_{DA}$ (según gráfico)

$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que sale}} = n\,C_v\,\Delta T + n\,C_p\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que sale}} = n \times \frac{3}{2} R \left(\frac{2P_oV_o}{nR} - \frac{6P_oV_o}{nR}\right) + n \times \frac{5}{2} R \times \left(\frac{P_oV_o}{nR} - 2\frac{P_oV_o}{nR}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{total que sale}} = 8{,}5\,RT_o$$

Parte (c)

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{Q_{\text{total que sale}}}{Q_{\text{total que entra}}} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{8{,}5\,RT_o}{10{,}5\,RT_o}$$

$\therefore \quad$ Eficiencia = 0,190

Parte (d)

$$T_A = \frac{P_o V_o}{nR} \;;\quad T_C = \frac{6\,P_o V_o}{nR} \quad \text{(temperaturas extremas)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_A}{T_C} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{\frac{P_o V_o}{nR}}{\frac{6\,P_o V_o}{nR}}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{6} = 0{,}833$$

50. Un mol de un gas ideal se expande isotérmicamente, a) si el gas duplica su volumen, muestre que el trabajo de expansión es W = RTln2. b) Puesto que la energía interna de U de un gas ideal depende sólo de su temperatura, no hay cambio en U durante la expansión. Se concluye con base en la primera ley que la energía térmica absorbida por el gas durante la expansión se convierte por completo en trabajo. ¿Por qué esto no viola la segunda Ley?

Resolución :

Parte (a)

n = 1 mol ; $V_{\text{inicial}} = V$ $\quad V_{\text{final}} = 2V$; T = cte

por demostrar que: $\quad$ W = RT ln (2)

Sabemos que por la primera ley: $\Delta U = 0 \quad$ (T = cte)

$$\Rightarrow \quad Q = W = \int P \,.\, dV = \int \frac{nRT}{V} \,.\, dV \quad (n = 1)$$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{total}} = RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\, dV$$

$$\therefore \quad W_{\text{total}} = RT \ln \Big|_{V}^{2V} = RT \ln (2) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

No viola la segunda ley, porque debido a que no hay aumento o disminución en la temperatura, el aumento o disminución en la entropía sí varía; debido a que hay calor absorbido por el sistema.

En consecuencia:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{1}{T}\, dW = \frac{1}{T} \int RT \frac{1}{V} dV$$

$$\therefore \quad \Delta S = R.\ln(2) \qquad \text{(no depende de T)}$$

51. Un sistema compuesto de n moles de un gas ideal se somete a un proceso isobárico reversible de un volumen V_0 a un volumen $3V_0$. Calcule el cambio de entropía del gas. (Sugerencia: imagine que el sistema va del estado inicial al estado final primero a lo largo de una trayectoria isotérmica; y después a lo largo de una trayectoria adiabática; no hay cambio de entropía a lo largo de la trayectoria adiabática).

Resolución:

Datos: P = cte ; $V_{inicial} = V_0$; $V_{final} = 3V_0$; $\Delta S = ?$; n moles

Sabemos que en un proceso reversible se cumple que:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T}$$

Por otro lado: Por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = dQ_r - dW$$

$$\Rightarrow \quad dQ_r = dU + dW = n\,C_v\,dT + P.dV$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dQ_r}{T} = \int n.C_v \frac{dT}{T} + \int \frac{nRT}{VT}.dV$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = n\,.\,C_v \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T}\,dT + nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV$$

Por la ley de gases sabemos que:

$$V_0 = \text{cte}\ T_{inicial} \quad \Rightarrow \quad T_{inicial} = \text{cte}\,.\,V_0$$

$$3V_0 = \text{cte}\,.\,T_{final} \quad \Rightarrow \quad T_{final} = \text{cte}\,.\,(3V_0)$$

Luego: $\Delta S = n\,.\,C_v \ln(T)\Big|_{\text{cte}.V_0}^{\text{cte}.3V_0} + nR\ln(V)\Big|_{V_0}^{3V_0}$

$$\therefore \quad \Delta S = n\,(C_p - R)\ln(3) + nR\ln(3)$$

$$\therefore \quad \Delta S = n\,C_p \ln(3)$$

52. Una central eléctrica tiene una eficiencia total de 15%. La planta entregará 150 MW de potencia a una ciudad, y sus turbinas utilizan carbón como combustible. El carbón quemado produce el vapor que acciona las turbinas. Este vapor luego se condensa en agua a 25°C al pasar a través de serpentines de enfriamiento que están en contacto con el agua de un río. a) ¿cuántas toneladas métricas de carbón consume la planta diariamente (1 ton métrica = 10^3 kg)? b) ¿Cuál es el costo total del combustible por año si el precio a la entrega es de 8 dólares/ton métrica? c) Si el agua del río se suministra a 20°C, ¿a qué tasa mínima debe fluir sobre los serpentines de enfriamiento para que su temperatura no exceda de 25°C?)(nota: el calor de combustión del carbón es de 33 kJ/g).

Resolución:

Datos: e = 15% ; Potencia de la planta = 150 MW

$c_{comb.carbón} = 33$ kJ/g

Parte (a)

Sabemos que eficiencia = $\dfrac{\text{Potencia}}{\dfrac{Q_{absorbe}}{t}}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}15 = \frac{150\ \text{M}\frac{\text{J}}{\text{s}}}{\frac{Q_{absorbe}}{t}} = \frac{150\frac{\text{MJ}}{\text{s}}}{\frac{M_{carbón}}{t} \times 33\frac{\text{kJ}}{\text{g}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_{carbón}}{t} = \frac{150\frac{\text{MJ}}{\text{s}}}{(0{,}15)\left(33\ \frac{\text{kJ}}{\text{g}}\right)\left(\frac{10^3\text{g}}{1\text{kg}} \times \frac{10^3\text{kg}}{1\ \text{ton}}\right)}$$

Luego se consumen en un segundo = 0,03 ton/s

En consecuencia en un día se consumirán = 2 618,2 ton/día

Parte (b)

En un día el costo total del combustible es: 2 618,2 × $ 8 = $ 20 945,4

En consecuencia:

En un año el costo total del combustible será:

$20 945,4 × 365 = $ 7 645 083 dólares

Parte (c)

Sabemos que: $\dfrac{Q_{abs/t}}{Q_{f/t}} = \dfrac{T_c}{T_f} = \dfrac{293\text{ K}}{298\text{K}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_f}{t} = \left(\frac{298\text{ K}}{293\text{K}}\right) \times \frac{Q_{abs}}{t} = \frac{298}{293} \times \frac{150\text{ MJ}}{0{,}03 \times 10^6 \times (0{,}15)(33)} = 1{,}03\text{ kJ/s}$$

53. Una planta de potencia, que tiene una eficiencia de Carnot, produce 1 000 MW de potencia eléctrica a partir de turbinas a las que llega el vapor a 500 K y que expulsan agua a 300 K hacia un río que fluye. Si el agua aguas abajo está 6 K más caliente debido a la salida de la planta de potencia, determine la tasa de flujo del río.

53.A Una planta de potencia, que tiene una eficiencia de Carnot, produce una potencia eléctrica P (en MW) a partir de turbinas a las que llega el vapor a T_c, y que expulsan agua a T_f hacia un río que fluye. Si el agua aguas abajo esta ΔT más caliente debido a la salida de la planta de potencia, determine la tasa de flujo del río.

Resolución:

Datos: P = Potencia (en MW) ; T_c ; T_f ; ΔT

Nos piden $\dfrac{dm}{t} = ?$

Sabemos que: $\dfrac{W}{Q_{abs.}} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c}$ (eficiencia de Carnot)

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{W}{t}}{\frac{Q_{abs.}}{t}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{P}{Q_{abs.}} \times t$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido} = \frac{P \times t \times T_c}{T_c - T_f}$$

De la relación: $\dfrac{Q_{abs.}}{Q_{expulsa}} = \dfrac{T_c}{T_f} \Rightarrow Q_{expulsa} = \left| \dfrac{T_f}{T_c} \times \dfrac{P \times t \times T_c}{T_f - T_c} \right|$

Luego: $d_{m_{rio}} \times C_{RIO} \times \Delta T = Q_{expulsa} = \dfrac{T_f \times P \times t}{t(T_f - T_c)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm_r}{t} \times C_{rio} \times \Delta T = \frac{T_f \times P \times t}{t(T_f - T_c)}$$

$$\therefore \quad \text{Tasa del flujo} = \left| \frac{dm_r}{t} \right| = \frac{T_f \times P}{|T_f - T_c| . C_{rio}} \times \frac{1}{\Delta T}$$

54. Suponga que usted trabaja en una oficina de patentes y que una inventora llega con usted afirmando que su máquina térmica, la cual emplea agua como sustancia de trabajo, tiene una eficiencia termodinámica de 0,61. Ella explica que la máquina opera entre depósitos de calor a 4°C y 0°C. Es un dispositivo muy complicado, con muchos émbolos, engranes y poleas, y el ciclo implica congelación y fusión. ¿Su afirmación de que e = 0,61 amerita una seria consideración? Explique.

Resolución :

Datos: e = 0,61 $\quad T_f = 0°C = 273\ K$

$T_c = 4°C = 277\ K$

Sabemos que: $\quad \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_c}$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia (e)} = 1 - \frac{273\ K}{277\ K}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia (e)} = 0{,}01$$

Conclusión:

Al afirmar la inventora que la máquina termodinámica tiene una eficiencia de 0,61 que es mucho mayor a la eficiencia (0,01) no está considerando realmente las pérdidas de energía por fricción, en los embolos, engranajes y poleas.

55. Una máquina diesel idealizada opera en un ciclo conocido como el *ciclo diesel de aire estándar*, que se muestra en la figura P22.55. El combustible se rocía dentro del cilindro en el punto de máxima comprensión, B. La combustión ocurre durante la expansión B→C, la cual se aproxima como un proceso isobárico. El resto del ciclo es el mismo que en el motor de gasolina, descrito en la figura 22.11. Demuestre que la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo diesel idealizado es

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

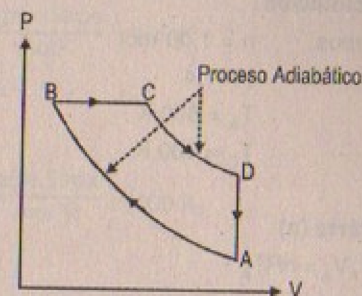


Figura P22.55

Resolución :

Por demostrar que:

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

Sabemos que: Eficiencia (e) = $\dfrac{W_{total}}{Q_{absorbe}}$

Por otro lado: $\quad W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

Entonces: $\quad W_{AB} = -\Delta U_{AB} = n\,C_v\,(T_A - T_B)$

$$W_{BC} = \int P \,.\, dV = n\,C_p\,(T_C - T_B) - n\,C_v\,(T_C - T_B)$$

$$W_{CD} = n\,C_v\,(T_C - T_D)$$

Luego: $\quad W_{total} = n\,C_v\,(T_A - T_B) + n\,(T_C - T_B)(C_p - C_v) + n\,C_v\,(T_C - T_D) \quad ... (1)$

Por otro lado: $\quad Q_{total\ que\ absorbe} = Q_{BC} \quad (T_C > T_B)$

$$\Rightarrow \quad Q_{total\ que\ absorbe} = n\,C_p\,(T_C - T_B)$$

De (1): $\quad W_{total} = n\,C_p\,(T_C - T_B) + n\,C_v\,(T_A - T_D)$

Entonces: $\quad \text{Eficiencia (e)} = \dfrac{n\,C_p\,(T_C - T_B) + n\,C_v\,(T_A - T_D)}{n\,C_p\,(T_C - T_B)}$

$$\Rightarrow \quad e = 1 + \frac{C_v}{C_p}\,\frac{(T_A - T_D)}{(T_C - T_B)}$$

Como: $\quad \dfrac{C_p}{C_v} = \gamma$

En consecuencia:

$$\text{Eficiencia (e)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\,\frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

56. Un mol de un gas ideal ($\gamma = 1,4$) se somete al ciclo de Carnot descrito en la figura 22.9. En el punto A, la presión es de 25 atm y la temperatura de 600 K en el punto C, la presión es 1atm y la temperatura es 400 K. a) Determine las presiones y volúmenes en los puntos A, B, C y D. b) Calcule el trabajo neto efectuado por ciclo. c) Determine la eficiencia de una maquina que opera en este ciclo.

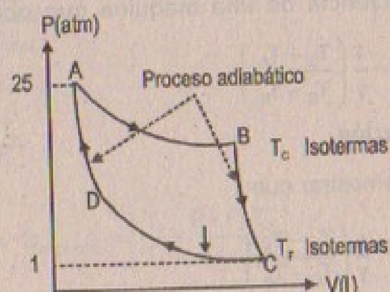
Resolución :

Datos: $n = 1,00$ mol

$\gamma = 1,4$

$T_A = 600$ K

$T_C = 400$ K



Parte (a)

$P_A V_A = nRT_A$

$$\Rightarrow \quad 25 \text{ atm} \times V_A = 1 \text{ mol} \times 0,082 \frac{\text{atm. litro}}{\text{mol.K}} \times (600 \text{ K})$$

$$\therefore \quad V_A = 1,97 \text{ litros}$$

$P_c \cdot V_c = nRT_c$

$$\Rightarrow \quad 1 \text{ atm} . V_c = 1 \text{ mol} \times 0,082 \frac{\text{atm . litros}}{\text{molK}} \times 400 \text{ K}$$

$$\therefore \quad V_c = 32,8 \text{ litros}$$

En un proceso adiabático se cumple que: $P_A . V_A^{\gamma} = P_D . V_D^{\gamma}$

además: $T_A . V_A^{\gamma-1} = T_D . V_D^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad 600 \text{ K } (1,97 \text{ litros})^{1,4-1} = 400 \text{ K} . (V_D)^{1,4-1}$$

$$\therefore \quad V_D = 5,43 \text{ litros}$$

Luego: $T_B . V_B^{\gamma-1} = T_C . V_C^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad 600 \text{ K} . V_B^{0,4} = 400 \text{ K } (32,8)^{0,4}$$

$$\therefore \quad V_B = 11,9 \text{ litros}$$

En consecuencia:

$$V_A = 1,97 \text{ litros} ; V_B = 11,9 \text{ litros} ; V_C = 32,8 \text{ litros} ; V_D = 5,43 \text{ litros}$$

Hallando las presiones: $P_B . V_B = nRT_B$

$$\Rightarrow \quad P_B . (11,9 \text{ litros}) = 1 \text{ mol} \times (0,082) (600 \text{ K}) \times \frac{1 \text{ atm}}{\text{litros. mol.K}}$$

$$\therefore \quad P_B = 4,13 \text{ atm}$$

$P_C . V_C = nRT_c$

$$\Rightarrow \quad P_C (32,8 \text{ litros}) = 1,00 \text{ mol} \times 0,082 \frac{\text{atm} \times \text{litros}}{\text{molK}} . 400 \text{ K}$$

$$\therefore \quad P_C = 1,00 \text{ atm}$$

$P_D . V_D = nRT_D$

$$\Rightarrow \quad P_D (5,43 \text{ litros}) = 1,00 \text{ mol} \times \left(0,082 \frac{\text{atm. litros}}{\text{mol.K}}\right) (400 \text{ K})$$

$$\therefore \quad P_D = 6,04 \text{ atm}$$

En consecuencia:

$$P_A = 25 \text{ atm} ; P_B = 4,13 \text{ atm} ; P_C = 1,00 \text{ atm} ; P_D = 6,04 \text{ atm}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = 0 = Q_{total} - W_{total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = Q_{total} = Q_{AB} + Q_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = W_{AB} + W_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = n\, RT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = 8,31 \times (600) \ln\left(\frac{11,9}{1,97}\right) + 8,31 \times (400) \ln\left(\frac{5,43}{32,8}\right)$$

$$\therefore \quad W_{total} = 2,99 \text{ kJ}$$

Parte (c)

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{400 \text{ K}}{600 \text{ K}}$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0,333 \text{ ó } 33,3\%$$

57. Un humano común tiene una masa de 70 kg y produce cerca de 2 000 kcal ($2,0 \times 10^6$ cal) de calor metabólico diariamente. a) Encuentre la tasa de producción de calor en watts y en calorías por hora. b) Si no hubiera pérdida del calor metabólico y suponiendo que el calor específico del cuerpo humano es 1,0 cal/g.°C, encuentre la tasa a la cual aumentaría la temperatura del cuerpo. Proporcione su respuesta en °C por hora y en °F por hora.

Resolución:

Datos: $M_{humano} = 70$ kg

$Q_{humano} = 2{,}0 \times 10^6$ cal

Parte (a)

$$\text{Tasa de producción en watts} = \frac{Q_{humano}}{t} = 2{,}0\times10^6\,\text{cal}\times\left(\frac{4{,}186\text{ J}}{1\text{cal}}\right)/24\text{ h}\times\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}$$

$\therefore$ Tasa de producción = 96,9 W

$$\text{Tasa de producción en cal}\times\text{h} = \frac{Q_{humano}}{t} = \frac{2{,}0\times10^6\text{cal}}{24\text{ h}} = 8{,}33\times10^4\ \frac{\text{cal}}{\text{h}}$$

Parte (b)

$$\frac{Q_{humano}}{t} = \frac{m_{humano}\cdot C\cdot dT}{t} \Rightarrow \frac{2{,}0\times10^6\text{cal}}{24\text{ h}} = 7\times10^4\text{g}\times\frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}\times\frac{dT}{t}$$

$$\therefore\quad \frac{dT}{t} = 1{,}19\frac{°\text{C}}{\text{h}}\quad\text{(en grados Celsius)}$$

En grados Fahrenheit:

$$\frac{dT}{t} = 1.19\ \frac{°\text{C}}{\text{h}}\times\left(\frac{212°\text{F}}{100°\text{C}}\right) = 2{,}52\ °\text{F/h}$$

58. Suponga que 1,00 kg de agua de 10,0°C se mezcla con 1,00 kg de agua a 30,0°C a presión constante. Cuándo la mezcla ha alcanzado el equilibrio, a) ¿Cuál es la temperatura final? b) Considere $C_p = 4{,}19$ kJ/kg.K para el agua y muestre que la entropía del sistema aumenta en

$$\Delta S = 4{,}19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\text{kJ/K}$$

c) Compruebe numéricamente que $\Delta S > 0$. d) ¿La mezcla es un proceso irreversible?

Resolución:

Datos: $m_{H_2O} = 1{,}00$ kg a $T_{agua} = 10°C$; $C_{agua} = \frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}$

$m_{H_2O} = 1{,}00$ kg a $T_{agua} = 30°C$

Parte (a)

Por calorimetría: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$$\Rightarrow\quad m_{H_2O}\times C\times\Delta T = m_{H_2O}\cdot C\,\Delta T \quad\Rightarrow\quad T_E - 10 = 30 - T_E$$

$$\therefore\quad T_{equilibrio} = 20°C$$

Parte (b)

Por dato: $C_p = 4{,}19\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$; $m_1 = m_2$; $c_1 = c_2$

Por demostrar que: $\Delta S = 4{,}19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

Sabemos que: $\Delta S = m_1C_1\int_{T_1}^{T_E}\frac{dT}{T} + m_2C_2\int_{T_2}^{T_E}\frac{dT}{T}$

$$\Rightarrow\quad \Delta S = m_1C_1\ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + m_2C_2\ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \Delta S = m_1C_1\left[\ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad \Delta S = m_1\cdot C_1\ln\left[\left(\frac{T_E}{T_1}\right)\left(\frac{T_E}{T_2}\right)\right]$$

Como: $m_1 = m_2 = 1{,}00$ kg ; $C_1 = C_2 = \frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}$

$T_1 = 10°C$; $T_2 = 30°C$; $T_E = 20°C$

Sabemos que: $n = \frac{m}{M} = \frac{1\,000\text{ g}}{18\text{ g/mol}}$

Reemplazando datos:

$$\Delta S = 10^3\text{ g}\times\frac{1\text{ cal}}{\text{g°C}}\times\frac{(4{,}186\text{ J})}{1\text{ cal}}\ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\therefore\quad \Delta S = 4{,}19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}}\quad\text{l.q.q.d.}$$

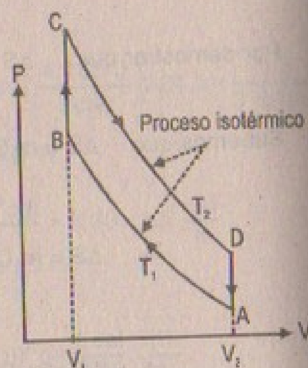
Parte (c)

Sabemos que: $\Delta S = 4{,}19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]$

$$\therefore\quad \Delta S = 0{,}004\text{ kJ/K} > 0$$

La mezcla sí es un proceso irreversible, pero que se puede tratar o interpretar como un proceso reversible.

59. La máquina Stirling descrita en la figura P22.59 opera entre las isotermas T_1 y T_2, donde $T_2 > T_1$. Suponga que el gas de operación es un gas monoatómico ideal, calcule la eficiencia de una máquina cuyo proceso a volumen constante ocurre a los volúmenes V_1 y V_2.



Resolución:

Sabemos que:

$$W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

Entonces: $W_{AB} = Q_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$

$$W_{BC} = 0$$

$$W_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

$$W_{DA} = 0$$

Luego: $W_{total} = nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Por otro lado: $Q_{total} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$

$\Rightarrow$ $Q_{AB} = nRT_1 . \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$ (libera)

$Q_{BC} = nC_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) > 0$ (absorbe)

$Q_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$ (absorbe)

$Q_{DA} = nC_v(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2) < 0$ (libera)

Luego: $Q_{total\ que\ absorbe} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Como $\text{Eficiencia} = \frac{W_{total}}{Q_{absorbe}}$

$$\Rightarrow \text{Eficiencia (e)} = \frac{2nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{3nR(T_2 - T_1) + 2nRT_2\ln(V_2/V_1)}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia (e)} = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{3(T_2 - T_1) + 2T_2\ln(V_2/V_1)}$$

60. Suponga que una máquina térmica está conectada a dos depósitos de calor, uno con aluminio fundido (660°C), y el otro es un bloque de mercurio sólido (–38,9°C). La máquina funciona congelando 1,00 g de aluminio y fundiendo 15,0 g de mercurio durante cada ciclo. El calor latente de fusión del aluminio es $3,97 \times 10^5$ J/kg, y el de mercurio es $1,18 \times 10^4$ J/kg. a) ¿Cuál es la eficiencia de esa máquina? b) ¿Cómo se compara esta eficiencia con la de una máquina de Carnot?

Resolución:

Datos: $T_{aluminio} = 660°C$; $m_{Al} = 1,00$ g ; $L_{Al} = 3,97 \times 10^5$ J/kg

$T_{mercurio} = -38,9°C$; $m_{Hg} = 15,0$ g ; $L_{Hg} = 1,18 \times 10^4$ J/kg

Parte (a)

$$Q_{requerido/cong.aluminio} = Q_{liberado} = m_{Al} \times L_{Al}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{liberado} = 1,00 \times 10^{-3}\ kg \times 3,97 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{liberado} = 397\ J$$

$$Q_{requerido/fundir\ mercurio} = Q_{absorbido} = m_{Hg} \times L_{Hg}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = 15 \times 10^{-3}\ kg \times 1,18 \times 10^4\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido} = 177\ J$$

Entonces: $Q_{libera\ aluminio}$: lo absorbe la máquina térmica

$Q_{absorbe\ mercurio}$: lo libera la máquina térmica

En consecuencia:

$$e = 1 - \frac{Q_{liberado}}{Q_{absorbido}} \quad \Rightarrow \quad e = 1 - \frac{177\ J}{397\ J}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia (e)} = 0,554$$

Parte (b)

$$\text{Eficiencia (máquina de Carnot)} = 1 - \frac{T_1}{T_c}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia (Maq. Carnot)} = 1 - \frac{(273 - 38,9)K}{(660 + 273)K}$$

Conclusión:

Eficiencia (Máq. Carnot) = 0,75

La máquina de Carnot es más eficiente que esta máquina.

61. Un gas sigue el proceso cíclico descrito en la figura P22.61. a) si Q es negativa en el proceso BC, y ΔU es negativa en el proceso CA, determine los signos de Q, W y ΔU asociados a cada proceso. b) Encuentre el calor neto trasferido al sistema durante un ciclo completo. c) Si se invierte el ciclo, es decir, si el proceso sigue la trayectoria ACBA, ¿Cuál es el calor neto transferido por el ciclo?

Resolución :

Parte (a)

Por dato:

$Q_{BC} < 0$ y $\Delta U_{CA} < 0$

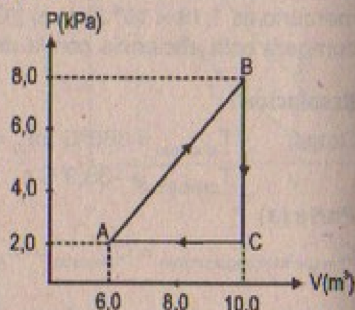


Figura P22.61

Según gráfico: por la primera ley de la termodinámica:

C → A: $\Delta U_{CA} = Q_{CA} - W_{CA}$

$\Rightarrow (-) = Q_{CA} - (-)$ $\therefore$ $Q_{CA} = (-) < 0$

$W_{CA} = (-) < 0$ (compresión)

A → B: $\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB}$

$\Rightarrow (+) = Q_{AB} - (+)$ $\therefore$ $Q_{AB} = (+) > 0$

$W_{AB} = (+) > 0$ (expansión)

$\Delta U_{AB} = (+) > 0$ $(T_B > T_A)$

B → C: $\Delta U_{BC} = Q_{BC} - 0$

$\Rightarrow \Delta U_{BC} = Q_{BC}$ $\therefore$ $Q_{BC} = (-) < 0$

$W_{BC} = 0$

$\Delta U_{BC} = (-) < 0$ $(T_C < T_B)$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{total} = 0 = Q_{neto} - W_{neto}$$

Luego: $Q_{neto} = W_{neto} = W_{CA} + W_{AB} + \cancel{W_{BC}}^{0}$

$W_{CA} = P \cdot \Delta V = (2,0)(6 - 10) = -8,0$ kJ

$W_{AB} = \text{Área}_{\triangle} = (2 + 8)/2 \cdot (4) = 20,0$ kJ

En consecuencia: $Q_{neto} = -8,0 \text{ kJ} + 20,0 \text{ kJ} = 12,0$ kJ

Parte (c) $Q_{neto} = W_{neto} = W_{AC} + W_{CB} + W_{BA}$

$W_{AC} = 2,0\ (10 - 6) = 8$ kJ (expansión)

$W_{CB} = 0$ (V = cte)

$W_{BA} = \text{ trapecio } = \dfrac{(2+3)}{2} \times (4) = -20$ kJ (compresión)

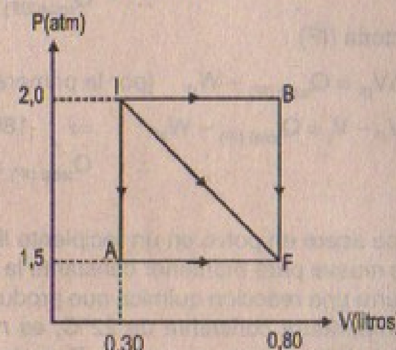
$\therefore$ $Q_{neto} = -20 \text{ kJ} + 8 \text{ kJ} = |-12 \text{ kJ}|$

62. Un mol de gas está inicialmente a una presión de 2,0 atm y a un volumen de 0,30 L y tiene una energía interna igual a 91 J . En su estado final el gas tiene una presión de 1,5 atm y un volumen de 0,80 L y su energía interna es igual a 180 J. Para las trayectorias IAF, IBF e IF en la figura P22.62, calcule a) El trabajo realizado por el gas, b) El calor neto transferido al gas en el proceso.

Resolución :

$U_i = 91$ J

$U_f = 182$ J



Parte (a)

- Trayectoria (IAF)

$W_{total} = W_{IA} + W_{AF} = 0 + W_{AF}$

$\therefore$ $W_{total} = 1,5 \times (0,80 - 0,3) \text{ atm . L} \times \left(\dfrac{1,013\times10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right)\times\left(\dfrac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3}\right)$

$\therefore$ W_{total} (IAF) = 76 J

- Trayectoria (IBF)

$W_{total} = W_{IB} + W_{BF} = W_{IB} + 0$

$\Rightarrow$ $W_{total} = 2,0 \text{ atm} \times (0,80 - 0,3) \text{ L} \times \left(\dfrac{1,013\times10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right)\times\left(\dfrac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3}\right)$

$\therefore$ W_{total} (IBF) = 101,3 J

- Trayectoria (IF)

$W_{total} = \text{Área}_{\triangle} = (1,5+2)\times\dfrac{(0,80-0,30)}{2} \text{ atm . L}\times\left(\dfrac{1,013\times10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right)\times\left(\dfrac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3}\right)$

$\therefore$ W_{total} (IF) = 88,64 J

Parte (b)

Trayectoria (IAF)

$$Q_{total} = Q_{IA} + Q_{AF} \qquad Q_{IA} = \Delta U_{IA} = n\,C_v\,(T_A - T_I)$$

Pero por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{IAF} = Q_{total\ (IAF)} - W_{(IAF)}$$

$$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IAF)} - W_{(IAF)} \quad \Rightarrow \quad 180 - 91 = Q_{total(IAF)} - 76$$

$$\therefore \quad Q_{total\ (IAF)} = 165\ J$$

Trayectoria (IBF)

$$\Delta V_{IBF} = Q_{total\ (IBF)} - W_{(IBF)} \quad \text{(por la primera ley)}$$

$$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IBF)} - 101{,}3\ J \quad \Rightarrow \quad 180\ J - 91\ J = Q_{total\ (IBF)} - 101{,}3\ J$$

$$\therefore \quad Q_{total(IBF)} = 190{,}3\ J$$

Trayectoria (IF)

$$\Delta V_{IF} = Q_{total\ (IF)} - W_{IF} \quad \text{(por la primera ley)}$$

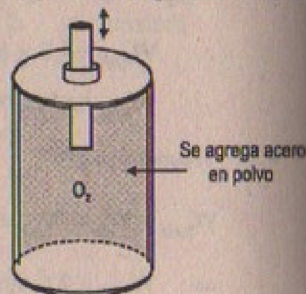
$$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IF)} - W_{IF} \quad \Rightarrow \quad 180\ J - 91\ J = Q_{total\ (IF)} - 88{,}64\ J$$

$$\therefore \quad Q_{total\ (IF)} = 177{,}64\ J$$

63. Se pone acero en polvo en un recipiente lleno de oxígeno y provisto de un émbolo que se mueve para mantener constante la presión de una atmósfera en el recipiente. Ocurre una reacción química que produce calor. Para mantener los contenidos a una temperatura constante de 22°C, es necesario extraer $8{,}3\times10^5$ J de calor del recipiente cuando éste se contrae. Durante la reacción química se encuentra que se consumen 1,5 moles de oxígeno. Encuentre el cambio de la energía interna para el sistema de hierro y oxígeno.

Resolución:

Se agrega acero en polvo.



Datos:
- $P = 1{,}00$ atm
- $T = 22°C = 295$ K
- $Q_{extrae} = 8{,}3 \times 10^5$ J
- $n = 1{,}5$ moles que se consumen

Sabemos que por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

Como: $Q = Q_{extraído} = -8{,}3 \times 10^5$ J

$$W = \int P\,dV = nRT \int \frac{1}{V}dV = 0 \quad (V = cte)$$

En consecuencia: $\Delta U = -8{,}3 \times 10^5$ J



Editorial San Marcos
Av. Garcilaso de la Vega 974 Lima. Telefax: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220 of. 304. Jesús María, Lima. Ventas-telf.: 423-1297
(alt. cdra. 5 Av. Arenales)Telefax: 330-8553 / 332-0153
E-mail: san-marcos@terra.com.pe